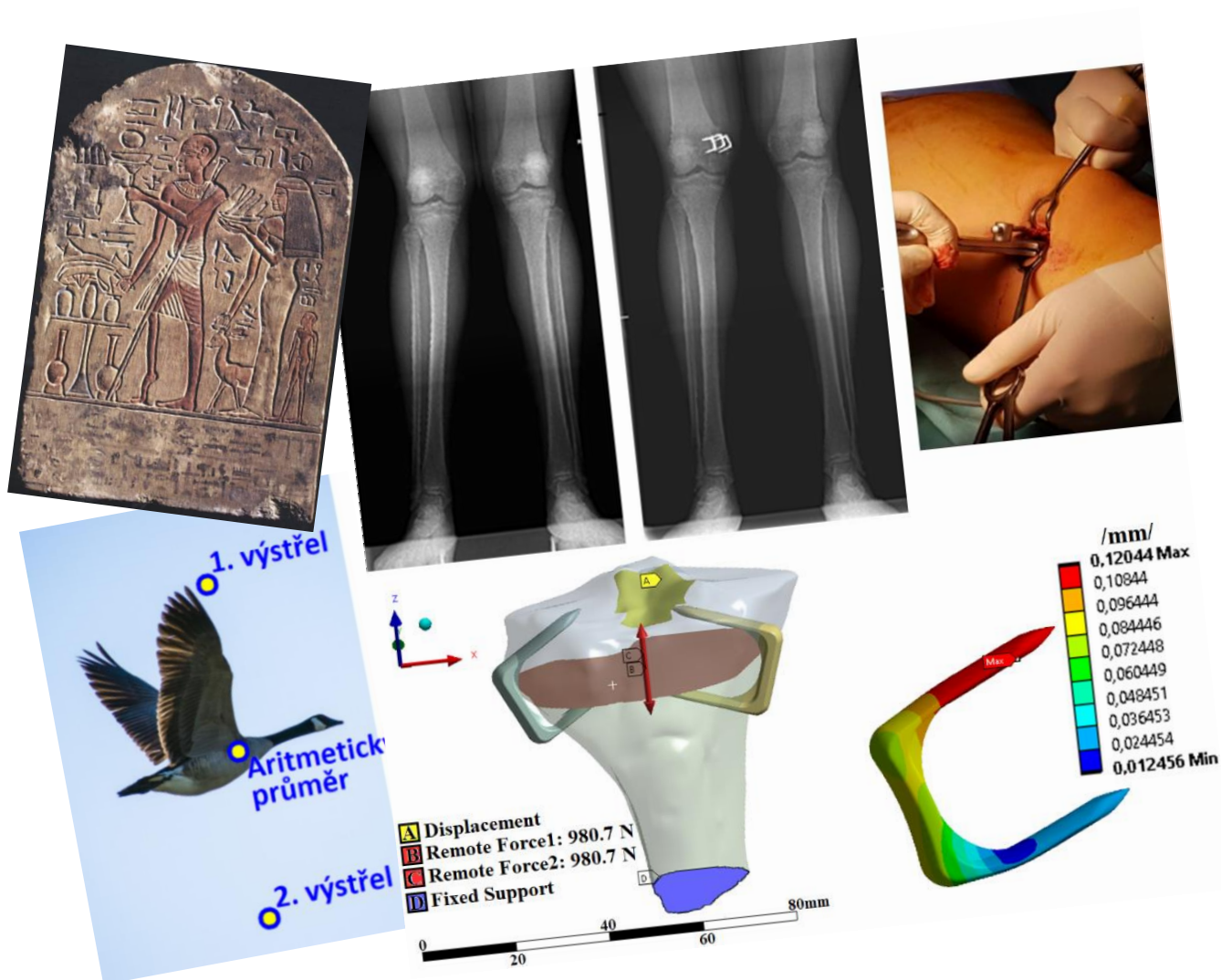


Biomechanika 2



**Karel FRYDRÝŠEK, Roman MADEJA,
Leopold PLEVA a kolektiv**

KATALOGIZACE V KNIZE - NÁRODNÍ KNIHOVNA ČR

Frydryšek, Karel, 1972-

Biomechanika 2 = Biomechanics 2 / Karel Frydryšek, Roman Madeja, Leopold Pleva a kolektiv. -- Vydání první. -- Ostrava : Ostravská univerzita, 2025. -- 1 online zdroj

Nad názvem: Ostravská univerzita, Lékařská fakulta. -- Obsahuje bibliografie a bibliografické odkazy

ISBN 978-80-7599-232-1 (online ; pdf)

* 57:531 * 612.76 * (075.8) * (0.034.2:08)

– biomechanika

– učebnice vysokých škol

– elektronické knihy

Název **Biomechanika 2**
Title in English **Biomechanics 2**

Editoři (Editors) **prof. Ing. Karel FRYDRÝŠEK, Ph.D., ING-PAED IGIP, FEng.**
VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované
mechaniky, Ostrava, Česká republika, e-mail: karel.frydrysek@vsb.cz
&
Ostravská univerzita, Lékařská fakulta, Ústav medicíny katastrof, Ostrava,
Česká republika

doc. MUDr. Leopold PLEVA, Ph.D.
Ostravská univerzita, Lékařská fakulta, Ústav medicíny katastrof, Ostrava,
Česká republika, e-mail: leopold.pleva@osu.cz
&
Klinika úrazové chirurgie a ortopedie, Fakultní nemocnice Ostrava,
Ostrava, Česká republika

MUDr. Roman MADEJA, Ph.D.
Ostravská univerzita, Lékařská fakulta, Ústav medicíny katastrof, Ostrava,
Czech Republic, e-mail: roman.madeja@osu.cz
&
Klinika úrazové chirurgie a ortopedie, Fakultní nemocnice Ostrava,
Ostrava, Česká republika

**Autoři v abecedním
pořadí (Authors in
alphabetical order)** Miroslav BUREŠ, DiS.
Ing. Daniel ČEPICA
MUDr. Jiří DEMEL, Ph.D.
prof. Ing. Karel FRYDRÝŠEK, Ph.D., ING-PAED IGIP, FEng.
Ing. Tomáš HALO
Ing. Miroslav HAVLÍČEK
Ing. Josef HLINKA, Ph.D.
doc. Ing. Leopold HRABOVSKÝ, Ph.D.
Ing. Jiří KOHUT
Ing. Dagmar LIČKOVÁ, Ph.D.
MUDr. Roman MADEJA, Ph.D.
MUDr. Jana POMETLOVÁ, Ph.D.
MUDr. Martin POMPACH, Ph.D.
Ing. Oldřich POSPÍCHAL
doc. MUDr. Leopold PLEVA, Ph.D.
Mgr. Pavla SEGAROVÁ, Ph.D.
Ing. František SEJDA, Ph.D.
MUDr. Jiří SZELIGA
Ing. Kateřina VLČKOVÁ (ŠIMEČKOVÁ), Ph.D.

**Recenzenti
(Reviewers)** **prof. Ing. Roland JANČO, PhD., ING-PAED IGIP**
(Slovenská technická univerzita, Bratislava, Slovenská republika
& Széchenyi István Egyetem – University of Győr, Maďarsko)
prof. Ing. Zuzana MURČINKOVÁ, PhD.
(Technická univerzita v Košicích, Prešov, Slovensko)
doc. MUDr. Filip BURGET, Ph.D.
(Karlova univerzita, Praha, Česká republika)

Klíčová slova biomechanika, historie, etika, mechanika, statika, deformace těles,
materiály, tahové-tlakové namáhání, kinematika, statistika,
pravděpodobnost, metoda Monte Carlo, spolehlivost, lékařské obory,
antropometrie, segmenty lidského těla, síly v lidském těle, implantát,
konstruování, řešené příklady

Keywords biomechanics, history, ethics, mechanics, statics, deformations of bodies,
materials, tensile-compression loading, kinematics, statistics, probability,
Monte Carlo method, reliability, medical specialty, anthropometry,
segments of the human body, forces in the human body, implant, design,
solved examples

Jazyk (Language) čeština/Czech

**Místo a rok vydání
(Place and year of
issue)** Ostrava, Česká republika, 2025, první vydání
Ostrava, Czech Republic, 2025, 1st edition

Vydavatel (Publisher) Ostravská univerzita
Dvořákova 7
701 03 Ostrava
Česká republika

**Počet stran (No. of
pages)** 404

Cite as:

FRYDRÝŠEK, K., MADEJA, R., PLEVA, L. et al: Biomechanika 2, ISBN 978-80-7599-232-1, monograph, University of Ostrava, Faculty of Medicine, Ostrava, Czech Republic, 2025, pp. 1-404 (written in the Czech Language).

The following projects financially supported this book, and the book is also based on their results: Czech projects Specific Research SP2025/048 "Computational and Experimental Modeling in Applied Mechanics and Biomechanics"

- International project CZ.02.1.01/0.0/0.0/17_049/0008441 "Innovative Therapeutic Methods of Musculoskeletal System in Accident Surgery"

- International project CZ.02.1.01/0.0/0.0/17_049/0008407

"Innovative and Additive Manufacturing Technology - New Technological Solutions for 3D Printing of Metals and Composite Materials".

Odbornou záštitu nad knihou převzaly Ostravská univerzita, VŠB – Technická univerzita Ostrava a Inženýrské akademie České republiky.

ISBN 978-80-7599-232-1 (online ; pdf)

Jazyková korektura nebyla provedena. Za jazykovou stránku jsou odpovědní autoři.

Jedná se o autorské dílo.

Licence CC BY-NC-ND 4.0 – Uveďte autora – Nekomerční využití – Nezasahujte do díla

OBSAH

19 ÚVOD KE DRUHÉMU DÍLU KNIHY	11
19.1 Proč autoři sepsali tuto knihu a poděkování	11
19.2 Přehled autorů této publikace.....	15
19.3 Poděkování.....	17
19.4 Otázky k pochopení látky	18
19.5 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	18
19.6 Reference ke kapitole 19.....	18
20 STRUČNĚ O PRÁVU A ETICE V BIOMECHANICE A LÉKAŘSTVÍ.....	19
20.1 Definice etiky a práva	19
20.2 Právo a etika ve vědě	20
20.3 Právo a etika v biomechanice a lékařství	21
20.4 Varovné příklady porušení práva a etiky v biomechanice a lékařství	23
20.5 Otázky k pochopení látky	25
20.6 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	25
20.7 Reference ke kapitole 20.....	26
21 KONCEPT OBECNÝCH DEFORMACÍ TĚLESA A POSUNUTÍ	28
21.1 Úvod a obecný pojem deformace těles	28
21.2 Koncept posunutí	33
21.3 Transformace souřadných systémů a vektorů	37
21.4 Doplnující informace	46
21.5 Příklady	47
21.6 Otázky k pochopení látky	61
21.7 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	63
21.8 Reference ke kapitole 21.....	65
22 KONCEPCE POMĚRNÝCH DEFORMACÍ SE ZAMĚŘENÍM NA JEDNOOŠÉ NAMÁHÁNÍ.....	67
22.1 Úvod a definice pojmu poměrných deformací.....	67
22.2 Délkový poměr, inženýrské a logaritmické poměrné deformace a jednoosá napjatost	70
22.3 Zobecněná definice poměrných deformací a jednoosá napjatost.....	75
22.4 Biologické a lékařské využití	82
22.5 Teorie 1. a 2. řádu a jiné doplňující informace	85

22.6	Příklady	88
22.7	Otázky k pochopení látky	93
22.8	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	94
22.9	Reference ke kapitole 22	94
23	VNITŘNÍ STATICKÉ ÚČINKY	96
23.1	Definice vnitřních statických účinků a virtuální řez tělesem	96
23.2	Rovinný nosník a vnitřní statické účinky	97
23.3	Příklady	102
23.4	Otázky k pochopení látky	122
23.5	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	124
23.6	Reference ke kapitole 23	128
24	STRUČNĚ O MATERIÁLECH, JEJICH POUŽITÍ A VLASTNOSTECH.....	130
24.1	Definice materiálu	130
24.2	Členění materiálu	131
24.3	Historie používání materiálu člověkem	133
24.4	Pružnost, tuhost a poddajnost jako základní fyzikální charakteristiky materiálu	133
24.5	Hookeův zákon a modul pružnosti.....	135
24.6	Základní informace o některých skupinách materiálů	138
24.7	Příklady	152
24.8	Otázky k pochopení látky	160
24.9	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	161
24.10	Reference ke kapitole 24	161
25	NAMÁHÁNÍ TAHEM A TLAKEM (ÚVOD, STATICKY URČITÉ ÚLOHY)	163
25.1	Stručně o mechanickém napětí a historii pružnosti a pevnosti	163
25.2	Jednoosá napjatost (úvod, tah, tlak, normálové síly, napětí a deformace).....	167
25.3	Saint-Venantův princip	172
25.4	Designová nerovnice a návrh součástí nebo technických celků	173
25.5	Příklady	175
25.6	Otázky k pochopení látky	193
25.7	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	193
25.8	Reference ke kapitole 25	197
26	ÚVOD DO KINEMATIKY.....	199
26.1	Definice a historie kinematiky	199

26.2	Hmotný bod, těleso, klid a pohyb	201
26.3	Trajektorie a dráha	202
26.4	Rychlost a zrychlení při přímočarém pohybu	203
26.5	Vztahy mezi dráhou, rychlostí a zrychlením při přímočarém pohybu.....	208
26.6	Příklady	208
26.7	Otázky k pochopení látky	224
26.8	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	224
26.9	Reference ke kapitole 26.....	224
27	ÚVOD DO STATISTIKY A PRAVDĚPODOBNOSTI	226
27.1	Úvod.....	227
27.2	Stručná historie statistiky a pravděpodobnosti.....	230
27.3	Definice pravděpodobnosti	238
27.4	Pojem náhodné veličiny a distribuční funkce	242
27.5	Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce	243
27.6	Kvantilová funkce a kvantil	245
27.7	Ohraničené histogramy	248
27.8	Charakteristiky náhodných veličin.....	249
27.9	Příklady	253
27.10	Otázky k pochopení látky	267
27.11	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	270
27.12	Reference ke kapitole 27	273
28	STRUČNĚ O METODĚ MONTE CARLO A NÁHODNÝCH GENERÁTORECH	276
28.1	Pojem, použitelnost a historie metody Monte Carlo.....	276
28.2	Generátory náhodných čísel.....	280
28.3	Příklady	281
28.4	Otázky k pochopení látky	296
28.5	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	296
28.6	Reference ke kapitole 28.....	298
29	PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSUDEK SPOLEHLIVOSTI	299
29.1	Definice problému a jeho pochopení	299
29.2	Posudky spolehlivosti	301
29.3	Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti	303
29.4	Metoda Simulation-Based Reliability Assessment (SBRA).....	309

29.5	Přesnost a odhad chyby metody SBRA nebo metody MC	311
29.6	Software Anthill	313
29.7	Dvě aplikace metody SBRA v mechanice a biomechanice	313
29.8	Příklady	317
29.9	Otázky k pochopení látky	323
29.10	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	325
29.11	Reference ke kapitole 29	325
30	HISTORIE LÉKAŘSTVÍ, LÉKAŘSKÉ OBORY A JEJICH DEFINICE.....	328
30.1	Definice lékařství	328
30.2	Bolest	328
30.3	Historie lékařství	329
30.4	Hippokratova přísaha	344
30.5	Lékařské obory.....	346
30.6	Otázky k pochopení látky	351
30.7	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	352
30.8	Reference ke kapitole 30	353
31	JEDNODUCHÝ DETERMINISTICKÝ A STOCHASTICKÝ MODEL SEDÍCIHO ČLOVĚKA	355
31.1	Proč zkoumat sedícího člověka.....	355
31.2	Člověk jako mechanismus	355
31.3	(Bio)kinematický řetězec	356
31.4	Deterministický model sedícího člověka (úvod a jednodušší varianta s uvažováním normálových sil a bez uvažování posouvajících sil a ohybových momentů)	357
31.5	Deterministický model sedícího člověka (přesnější varianta s uvažováním normálových a posouvajících sil a ohybových momentů).....	369
31.6	Stochastický model sedícího člověka	375
31.7	Příklady	383
31.8	Otázky k pochopení látky	386
31.9	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	386
31.10	Reference ke kapitole 31	387
32	IMPLANTÁT OD NÁVRHU AŽ K POUŽITÍ	388
32.1	Úvod.....	388
32.2	Implantát a implantologie	389
32.3	Systém managementu kvality	390

32.4	Etapa koncepční	391
32.5	Etapy designu	395
32.6	Ověření návrhu	397
32.7	Etapa integrační a testovací	399
32.8	Etapa uvolnění k uvedení na trh	400
32.9	Otázky k pochopení látky	402
32.10	Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení	402
32.11	Reference ke kapitole 32	403

19. ÚVOD KE DRUHÉMU DÍLU KNIHY

V této kapitole najde čtenář důvody a potřeby sepsání 2. dílu této knihy, vyjádření editorů, seznam autorů a poděkování.

19.1 Proč autoři sepsali tuto knihu a poděkování

Prvním editorem této knihy je strojař Karel FRYDRÝŠEK¹ (Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava² & Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita³) a druhým a třetím editorem jsou chirurgové Leopold PLEVA a Roman MADEJA (Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava⁴). Díky jejich dlouholeté vzájemné spolupráci, přátelství, touze, vynaloženému úsilí a samozřejmě také spolupráci s dalšími autory, kolegy odborníky a studenty, vznikla tato kniha.

1



Karel Frydryšek

² **VŠB – Technická univerzita Ostrava** byla založena r. 1849, a navazuje na silné tradice první hornické akademie v Jáchymově z r. 1716, které je přímým pokračovatelem. Poskytuje vzdělání především v širokých technických a ekonomických oborech. Blíže <https://www.vsb.cz/>.



³ **Ostravská univerzita** byla založena r. 1991 a poskytuje vzdělání především v humanitních, lékařských, přírodovědeckých a uměleckých oborech. Blíže <https://www.osu.cz/>.

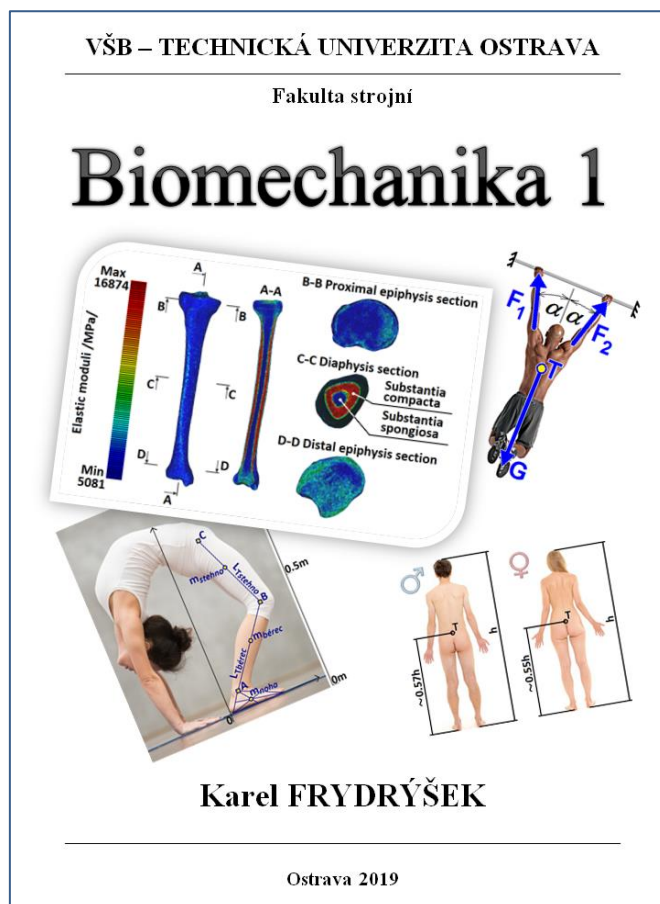


⁴ **Fakultní nemocnice Ostrava**, navazuje na tradice z r. 1912, a je největším státním zdravotnickým zařízením na severní Moravě a českém Slezsku. Blíže <https://www.fno.cz/>.



Kniha je také vydaná pod záštitou **Inženýrské akademie České republiky**⁵.

První díl knihy, tj. „Biomechanika 1“, viz [1] a Obr. 19.1, vzbudil velký zájem, protože „vyplňoval“ chybějící mezeru v literatuře tohoto oboru. Je známým faktem, že Biomechanika stále patří mezi velmi populární, zajímavý, žádaný, prestižní a rychle se rozvíjející vědní obor s vysokým stupněm aplikovatelnosti. Důvodem je např. socio-ekonomický potenciál zkvalitnění léčby či života člověka nebo zvířat, aplikace poznatků biologie v technice a také výrazně silná mezioborovost.



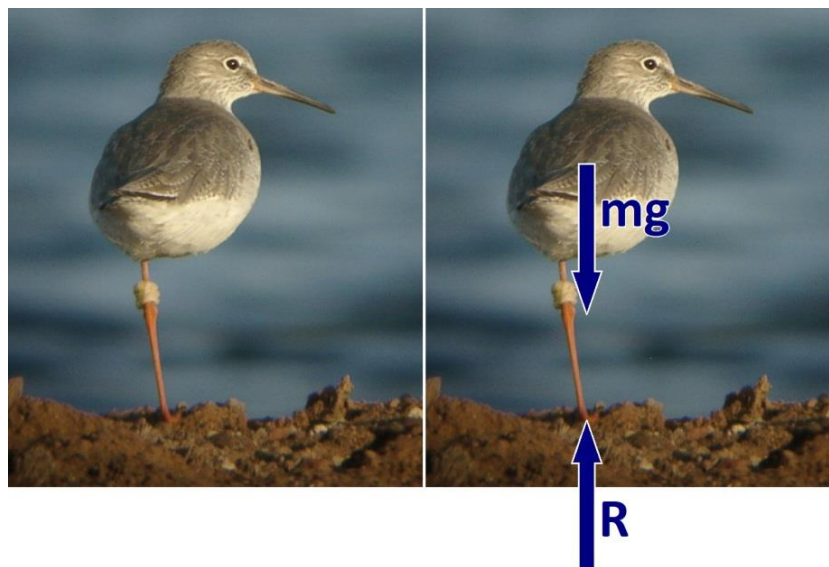
Obr. 19.1 Obálka prvního dílu knihy, viz [1].

⁵ **Inženýrská akademie České republiky, z.s.**, anglicky The Engineering Academy of the Czech Republic, je česká profesní nezisková organizace. Je primárně zaměřena na podporu a rozvíjení technických disciplín, technického rozvoje, technického vzdělávání a výzkumu, vývoje a inovací v těchto oblastech s cílem uspokojení technických, ekonomických, sociálních, environmentálních a kulturních potřeb společnosti. Blíže https://cs.wikipedia.org/wiki/In%C5%BEEen%C3%BDrsk%C3%A11_akademie_%C4%8Cesk%C3%A9_republik_y.

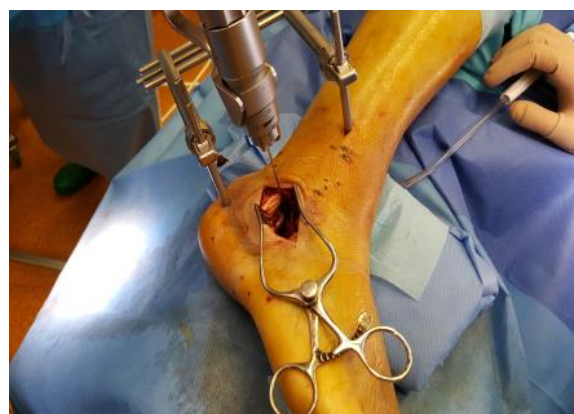
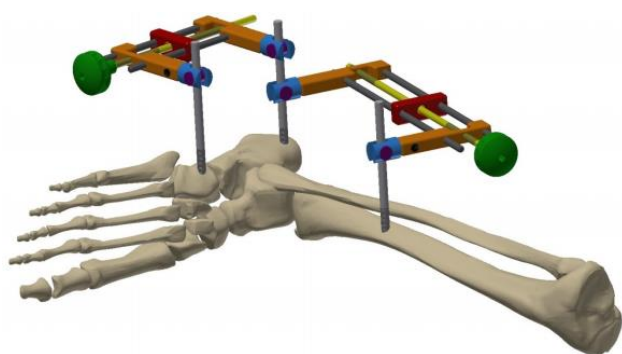


INŽENÝRSKÁ AKADEMIE
ČESKÉ REPUBLIKY

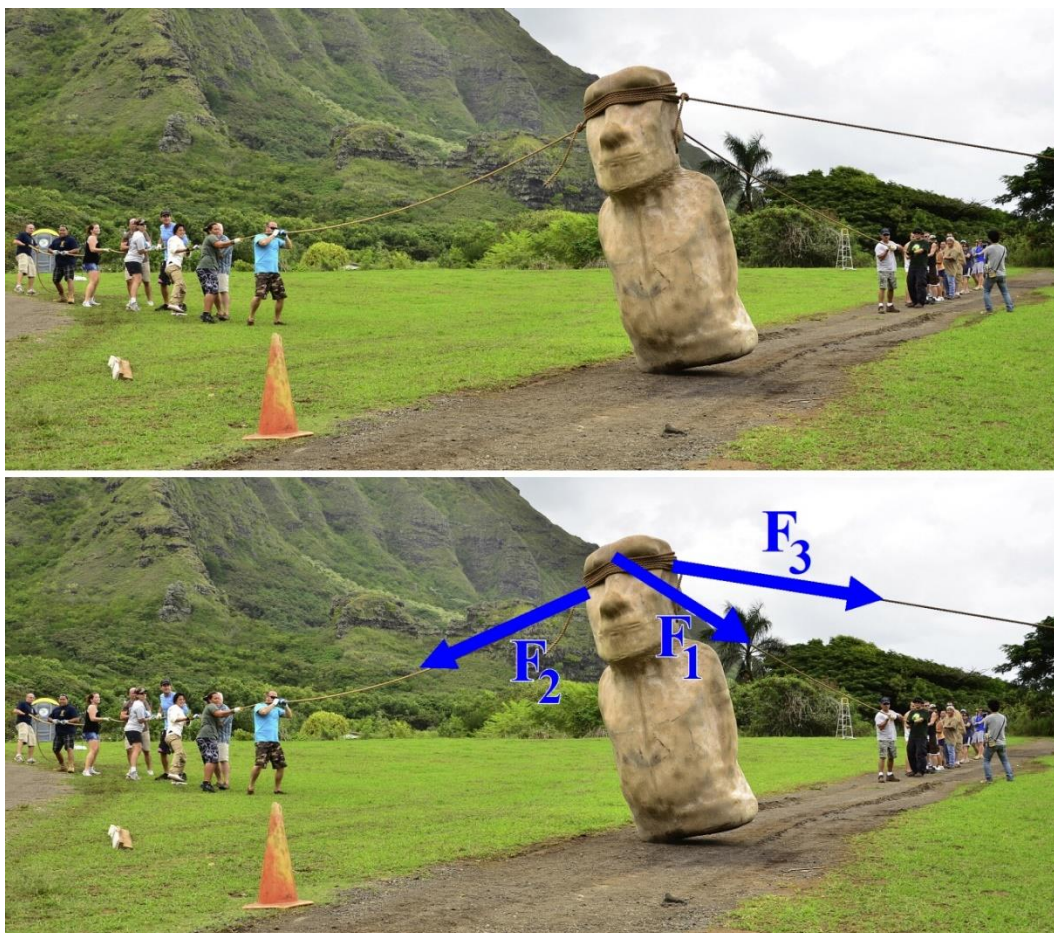
Tak jak je již vysvětleno v [1], tak **zákony mechaniky/biomechaniky jsou přirozenou součástí vesmíru, světa kolem nás a živých či neživých organismů**, viz např. Obr. 19.1 až 19.4.



Obr. 19.2 Biomechanika v přírodě - primitivní silový rozbor statického stoje na jedné noze u Vodouše rudonohého (*Tringa totanus*).



Obr. 19.3 Distraktor pro repozici zlomenin calcanea a talu (CAD model a praktické využití u operace).



Obr. 19.4 Biomechanika v experimentální archeologii - kráčející socha moai⁶ a silový rozbor vnějšího zatížení od lidské síly, Velikonoční ostrov, Polynésie); zdroj [3] a autorem upraveno a doplněno.

Jednoduše „filosoficky“ a trefně lze říci, že **biomechanika je sňatek přírody s technikou** ☺. Podle [1], **Cílem biomechaniky je objevit, porozumět, aplikovat a využívat poznatků tohoto oboru v biomechanice a jiných odvětvích vědy a techniky za účelem zkvalitnění a zefektivnění lidské činnosti a společnosti.**

V blízké i vzdálené budoucnosti lze jistě očekávat velký pokrok biomechaniky v oblasti léčby ztráty sluchu, řeči a zraku, oprav cév, oprav/obnov buněk, různorodém lékařství, materiálech, které jsou spojené s umělými tkáněmi či orgány, mikro/nanosenzorikou,

⁶ **Moai** jsou monolitické kamenné sochy s výrazným obličejem. Jsou vyrobeny ze sopečného tufu. Jednu z několika teorií, jak s těžkými sochami pohybovat pomocí „rozkývání“ a to jen s několika lidmi, představil český inženýr, experimentální archeolog a politik **Pavel Pavel** (nar. 1957).



(zdroj fotografie internet)

nanotechnologiemi, robotikou, kosmonautikou, ergonomikou, fyzikou atp. Zřejmě lze očekávat také výrazný pokrok v ovládání zvířat či rostlin, numerických simulacích⁷, experimentech, zkvalitnění lidské činnosti atd. Významné je i to, že vědecká a odborná výchova biomechaniků se stala běžnou na mnoha vysokých školách celého světa.

Z výše uvedených důvodů a potřeb, se autoři rozhodli pokračovat v započatém díle, rozšířit kolektiv autorů a vznikla tak tato kniha „Biomechanika 2“, kterou právě čtete.

Stejně jako je uvedeno v [1], tato kniha je sepsána nejen pro biomechaniky, ale také pro inženýry či neinženýry. Pokud čtenář náhodou narazí na látku, kterou zná lépe a má hlubší znalosti, než je uvedeno v této knize, pak je to jen dobře a známou látku může přeskočit ☺ a studovat další kapitolu.

Text této knihy je psán s touhou co nejsrozumitelněji a nejzajímavěji vysvětlit prezentovanou látku a také se snahou budovat u čtenáře široký, multidisciplinární a komplexní pohled na biomechaniku a souvislosti s ostatními vědeckými obory. Autoři věří, že se jim to alespoň částečně povedlo.

Kniha je také doplněna referencemi, kontrolními otázkami a řešenými/neřešenými příklady, poznámkami pod čarou a úlohami (vždy ke konci kapitoly). Z tohoto důvodu může být tato kniha použita samozřejmě i jako učebnice.

Kvalitní biomechanik, tedy odborník, nemusí znát úplně vše, co je uvedeno v této knize. Avšak, v praxi biomechaniky je jistě velmi nebezpečným extrémem neznalost. Je třeba pamatovat, že: „**Scientia potentia est!**“⁸

19.2 Přehled autorů této publikace

Na knize se autorsky podílelo 19 autorů. V následující tabulce jsou uvedeni autoři a editoři této knihy v abecedním pořadí podle příjmení.

⁷ **Numerické simulace** nebo také **počítačové simulace** jsou široce využívané počítačové přístupy při řešení mnoha vědeckých úloh v teorii i běžné praxi. Použití vyžaduje v počítači vytvoření numerického modelu, který popisuje daný problém. V biomechanice může být využití při konstrukci léčebných prostředků a implantátů, zpracování CT snímků organismu v radiologii aj.

Bližší také https://cs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8D%C3%ADta%C4%8Dov%C3%A1_simulace.

⁸ **Vědění je síla (moc)!** Citát, jehož autorem je **Francis Bacon** (1561–1626), známý anglický politik, filosof, spisovatel, vědec, historik a propagátor vědeckého experimentu. Známá je také Baconova induktivní metoda vědeckého zkoumání, viz např. [2].



(zdroj obrázku internet)

Tab. 19.1 Přehled devatenácti autorů podílejících se na tvorbě této knihy.

Jméno	Pracoviště	Autorství/ spoluautorství
Miroslav BUREŠ	MEDIN, a.s., Nové Město na Moravě	kapitola 32
Daniel ČEPICA	Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava & Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita	kapitola 31
Jiří DEMEL	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	kapitola 30
Karel FRYDRÝŠEK	Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava & Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita	editor knihy, kapitoly 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32
Tomáš HALO	Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava & Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita	kapitola 31
Miroslav HAVLÍČEK	MEDIN, a.s., Nové Město na Moravě	kapitola 32
Josef HLINKA	Katedra materiálového inženýrství a recyklace, Fakulta materiálově-technologická, VŠB – Technická univerzita Ostrava	kapitola 24
Leopold HRABOVSKÝ	Katedra konstruování, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava	kapitola 24
Jiří KOHUT	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	kapitola 30
Dagmar LIČKOVÁ	Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava	kapitola 26
Roman MADEJA	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	editor knihy, kapitoly 19 a 30

Jméno	Pracoviště	Autorství/ spoluaautorství
Leopold PLEVA	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	editor knihy, kapitola 30
Jana POMETLOVÁ	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	kapitola 30
Martin POMPACH	Oddělení úrazové chirurgie, Pardubická nemocnice, Nemocnice Pardubického kraje	kapitola 30
Oldřich POSPÍCHAL	MEDIN, a.s., Nové Město na Moravě	kapitola 32
Pavla SEGAROVÁ	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	kapitola 20
František SEJDA	Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava	kapitola 19
Jiří SZELIGA	Ústav medicíny katastrof, Lékařská fakulta, Ostravská univerzita & Klinika úrazové chirurgie, Fakultní nemocnice Ostrava	kapitola 30
Kateřina VLČKOVÁ (ŠIMEČKOVÁ)	Katedra aplikované mechaniky, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava	kapitola 29

19.3 Poděkování

Autoři této knihy by rádi poděkovali svým rodinám, učitelům, přátelům, kolegům ze svých pracovišť a dalším spolupracovníkům a studentům. Bez jejich kooperace si nedokážou rozvoj oboru Biomechanika na svých pracovištích představit.

Autoři této knihy by také rádi poděkovali recenzentům, kterými jsou **prof. Ing. Roland JANČO, PhD., ING-PAED IGIP** (Slovenská technická univerzita v Bratislavě, Bratislava, Slovensko & Széchenyi István Egyetem – University of Győr, Maďarsko), **prof. Ing. Zuzana Murčinková, PhD.** (Technická univerzita Košice, Prešov, Slovakia) a **doc. MUDr. Filip Burget, Ph.D.** (Univerzita Karlova, Praha, Česká republika).

Dílo je vypracováno v rámci těchto projektů:

- **SP2020/100** „Numerické a experimentální modelování jako podpora řešení technických a biomedicínských problémů“.

- **SP2025/048** „Computational and Experimental Modeling in Applied Mechanics and Biomechanics“.
- v rámci Operačních programů Výzkum, vývoj a vzdělávání, výzvy číslo 02_17_049 - Dlouhodobá mezisektorová spolupráce pro ITI (ostravské aglomerace) r.č. CZ.02.1.01/0.0/0.0/17_049/0008441 a CZ.02.1.01/0.0/0.0/17_049/0008407.

19.4 Otázky k pochopení látky

1. Jak byste definovali biomechaniku svými vlastními slovy?
2. Kde se aplikuje biomechanika?

19.5 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Prostudujte si první díl této knihy, viz [1].
2. Dokážete vysvětlit jednoduchý statický výpočet reakční síly R na obrázku 19.2, jestliže znáte hmotnost m a tíhové zrychlení g?

19.6 Reference ke kapitole 19

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Woitsch, J., Experimentální metoda v díle Francise Bacona, *AntropoWebzin*, ISSN: 1801-8807, 2005, no. 3, pp. 17-23.,
http://www.antropoweb.cz/webzin/achive_old/webzin_03_2005/AntropoWEBZIN%203_2005.pdf.
- [3] Lipo, C.P., Hunt, T.L., Haoa, S.R., The ‘walking’ megalithic statues (moai) of Easter Island, *Journal of Archaeological Science*, Volume 40, Issue 6, 2013, pp. 2859-2866.
- [4] Počítačová simulace – Wikipedie (wikipedia.org),
https://cs.wikipedia.org/wiki/Po%C4%8D%C3%ADta%C4%8Dov%C3%A1_simulace.
https://cs.wikipedia.org/wiki/In%C5%BEen%C3%BDrsk%C3%A1_akademie_%C4%8Cesk%C3%A9_republiky.

20. STRUČNĚ O PRÁVU A ETICE V BIOMECHANICE A LÉKAŘSTVÍ

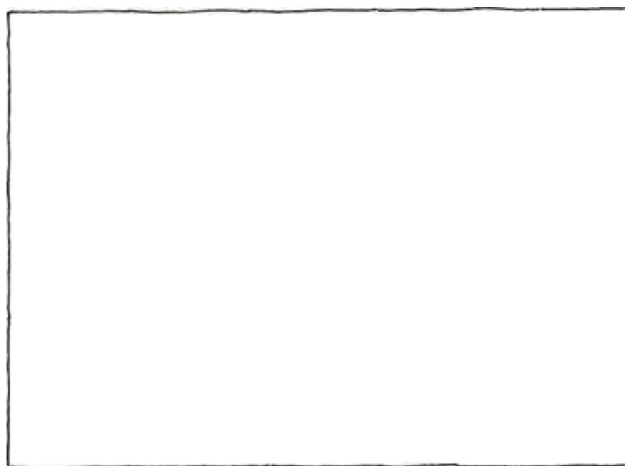
Tato kapitola se zabývá právem a etikou v biomechanice a lékařství. Je jen stručným, avšak nezbytným úvodem do problematiky.

Kapitola svým zaměřením dává cenný humanitní vhled, který vytváří důležité pozadí a hranice, pro teoretické, pracovní a aplikační úkony a normy v oboru biomechanika a lékařství. Nicméně, uvedené principy se dají jistě rozšířit také na další vědní obory a lidské činnosti.

Autory této kapitoly jsou Karel Frydrýšek a Pavla Segarová.

20.1 Definice etiky a práva

Na úvod, je vhodné si uvědomit na následujícím vtipu, že **problematika práva a etiky není jednoduchá**, viz Obr. 20.1 ☺.



Obr. 20.1 Zdá se, že tohle je jediný právně, eticky, politicky, nábožensky, kulturně a společensky akceptovatelný kreslený vtip ☺.

Prázdný papír na Obr. 20.1 zřejmě nikoho neurazí. Pokud by tam však byl vtipný text nebo obrázek, pak je možné, že někdo se zasměje a jiný se zase urazí. To lze vysvětlit např. rozdílným kulturním pozadím či originalitou přemýšlení každého člověka.

Řecké slovo **éthos**, **étos** znamená česky mrav, zvyk nebo obyčej. Ethos nebo etos znamená ideální celek společenských zásad, jimiž se lidé ve společnosti nebo skupině mají řídit ve svém svobodném a odpovědném jednání. Od slova étos se odvozuje pojem etika a **etologie**⁹.

Etika¹⁰ je teorie morálky a disciplína praktické filozofie. Zkoumá morálku nebo morálně relevantní jednání a jeho normy. Hodnotí činnost člověka z hlediska dobra a zla, tj. hledá odpovědi na to, co je dobré, co je spravedlivé a co je správné. **Primum principium**¹¹ celé etiky je „Konat dobro a vyhýbat se zlu“, pokud se tak nečiní, pak etika není mravně obhajitelná. Blíže např. [1] a [2].

⁹ **Etologie** je věda, která se zabývá studiem chování živočichů. Lze ji také definovat jako fyziologii chování. Chování živočichů je vrozené (existuje již od narození) a získané (napodobování, zkušenosti).

¹⁰ **Etika** je starší češtinou nazývána jako **mravověda**.

¹¹ **Primum principium** = Prvopočátek (latinsky).

Právo je soubor pravidel chování daný nebo uznaný autoritou (stát). Právo je regulační systém, vymezující mantinely chování a odstraňující konflikty ve společnosti. Také je to vědní obor „Právní věda“ tzv. „Jurisprudence“. Blíže např. [3].

Právo je vynutitelné, ale morálka je nevynutitelná.

Právo se obecně $\neq$ spravedlnost. Stručně k tomu lze povědět, že i soudce může úmyslně či neúmyslně nespravedlivě rozhodnout soudní spor.

Kvalitu života člověka důležitou měrou podmiňují a ovlivňují vnější okolnosti ekonomické, geografické, kulturní, morální, etické, pedagogické a další atributy kvality života společenství (stát, národ, komunita, rodina), viz [4]

Z laického pohledu autora této kapitoly a praktika, který pro některé biomechanické výzkumy občas potřebuje etická povolení, platí „**etika a právo jsou především velmi složitou problematikou mezilidských vztahů**“ ☺.

20.2 Právo a etika ve vědě

Je dobře, že také věda je ohraničena právem a etikou. Ve vědě si vědec nemůže vždy dělat co chce. Autor zde o tomto tématu píše, protože je pevně přesvědčen, že někteří z čtenářů se mohou stát excelentními vědci, či jako studenti mohou být zapojeni ve vědě.

Asi nejlépe se to vysvětlí na varovném příkladu **Schönova podvodu**, viz [5]. **Jan Hendrik Schön** byl „strmě“ stoupající populární německý polovodičový¹² fyzik. V roce 1998 začal pracovat v prestižních Bell Laboratories ve státě New Jersey v USA a v roce 2001 byl ředitelem Max Planck Institutu ve Stuttgartu. Publikoval extrémně rychle obrovské množství vědeckých článků v těch nejprestižnějších vědeckých časopisech na světě. Nicméně, v roce 2002 se ukázaly první pochybnosti o jeho publikacích a v roce 2003 se stal „králem podvodníků“. Bylo odhaleno, že si data a výsledky své práce vymyslel. Nakonec, shodou okolností v německé Kostnici, (tj. v místě kde uhořel **Jan Hus**¹³), „uhořel“ také Jan Hendrik Schön. Univerzita Kostnice (Universität Konstanz) mu totiž za jeho nepoctivou vědeckou práci odebrala vědecký titul Ph.D.¹⁴ Jestliže se však čtenář podívá na internet, tak zjistí, že případy

¹² **Polovodič** je pevná látka či součást elektronické součástky, jejíž elektrická vodivost je závislá na aktuálních vnějších nebo vnitřních podmínkách. Změna těchto podmínek ovlivňuje elektrickou vodivost.

¹³ **Jan Hus** (narozen asi 1370, Husinec a upálen 6. července 1415 v Kostnici) byl římskokatolický kněz, český středověký náboženský myslitel, vysokoškolský pedagog, rektor Univerzity Karlovy, reformátor, kazatel a mučedník.



Domnělá podoba Jana Husa (zdroj obrázku internet)

¹⁴ **Ph.D., Ph.D** nebo **PhD** (latinsky *philosophiae doctor*) je zkratkou akademického titulu doktor. Uvádí se za příjmením jeho držitele. Je to nejvyšší vědecký titul, kterého je možné dosáhnout studiem.

falšování vědeckých výsledků nejsou ojedinělé. Správné je také na podvody upozorňovat. Necht' je to tedy pro vědce a budoucí vědce mementem¹⁵.

Další formou podvodu je **plagiátorství**, nazývané také **plagiace**. Plagiát může být obecně jakékoliv dílo, které někdo jiný než autor, vydává neprávem za své. Týká se to třeba umění, vědeckých výsledků, vědeckých publikací atp., viz např. [6]. V České republice se k tomu vztahuje **Autorský zákon**, zákon č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů, viz např. [7]. Na pracovišti autora to může být ještě upřesněno nějakou formou směrnice, např. jako etický kodex atp.

I když je problematika podvodů z právního hlediska velmi složitá, tak výše uvedený text této podkapitoly lze jednoduše shrnout do citátu pocházejícího od prvního československého prezidenta **Tomáše Garrigue Masaryka**¹⁶: „**Nebát se, nelhat a nekrást!**“ ☺

Další problematikou je etika vědeckých výzkumů a pokusů na živých organismech. Taková etika může být v každé zemi jiná. Zvíře určitě není věc. Nezbytnost užití zvířat k pokusům je vždy třeba povolit. Některé pokusy mohou být dokonce zakázané zákonem. Obecně platí, že pro pokusy se zvířaty je třeba souhlasu příslušné pravomocné **etické komise**. Pokus musí být stanoven jasnými pravidly a přesně definován. Pro Českou republiku se k tomu vztahuje Zákon č. 246/1992 Sb. a Evropská směrnice Evropského parlamentu a Rady 2010/63/EU, viz [8] a [9].

Nicméně, nutno podotknout, že výzkum na zvířatech nebo práva zvířat, jsou také tématem mnoha aktivistů po celém světě.

20.3 Právo a etika v biomechanice a lékařství

Být lékařem či zdravotníkem by mělo být do určité míry etické poslání. **Jestliže se zdravotnictví slepě zabalí do populárních hesel souvisejících s úspěšnou ekonomikou či pokrouceného chápání lidských práv ustupujících od ochrany života a léčení, pak se vytratí etika.** Asi stojí za to zmínit příběh o milosrdném samaritánovi¹⁷, kde etické prokazování milosrdenství, tj. starost o pacienta, má stále svou primární hodnotu. Více informací k problematice etiky ve zdravotnictví lze nalézt např. v literatuře [2].

Biomechanika i lékařství by měly být humánní a etické.

K lékařskému či biomechanickému výzkumu na lidských tkáních či jen ke sběru potřebných dat je třeba mít příslušný souhlas akreditované **etické komise** a případně také **informovaný souhlas pacienta**.

¹⁵ **Memento** = pamatuj či připomínej si (latinsky).

¹⁶ **Tomáš Garrigue Masaryk** (1850–1937) byl politik, filozof, sociolog, pedagog, spisovatel a první prezident Československé republiky.

¹⁷ Zákoník se však chtěl ospravedlnit, a proto Ježíšovi řekl: „A kdo je můj bližní?“

Ježíš mu odpověděl: „Jeden člověk šel z Jeruzaléma do Jericha a padl do rukou lupičů; ti jej obrali, zbili a nechali tam ležet polomrtvého. Náhodou šel tou cestou jeden kněz, ale když ho uviděl, vyhnul se mu. A stejně se mu vyhnul i levita, když přišel k tomu místu a uviděl ho. Ale když jeden Samařan na své cestě přišel k tomu místu a uviděl ho, byl pohnut soucitem; přistoupil k němu, ošetřil jeho rány olejem a vínem a obvázal mu je, posadil jej na svého mezka, zavezl do hostince a tam se o něj staral. Druhého dne dal hostinskému dva denáry a řekl: ‘Postarej se o něj, a bude-li tě to stát víc, já ti to zaplatím, až se budu vracet.’

„Kdo z těch tří, myslíš, byl bližním tomu, který upadl mezi lupiče?“ Zákoník odpověděl: „Ten, který mu prokázal milosrdenství.“ Ježíš mu řekl: „Jdi a jednej také tak.”

(Bible, Evangelium podle Lukáše 10,29-37 viz

<http://www.bible.net.cz/app/bible/passage?passagePath.path=lukas%2010,29-37>)

Protože tato kniha je psaná s lékaři, a protože biomechanika má silné uplatnění v léčbě člověka, tak je vhodné se alespoň krátce zmínit o právu a etice v lékařství. Vztah lékaře a pacienta je také do jisté míry určován **Etickým kodexem práv pacientů**. Jako příklad takového může být třeba **Etický kodex práv pacientů Fakultní nemocnice Ostrava**, viz [10], který doslovně zní:

- Pacient má právo na ohleduplnou odbornou zdravotnickou péči prováděnou s porozuměním kvalifikovanými pracovníky.
- Pacient má právo znát jméno lékaře a dalších zdravotnických pracovníků, kteří ho ošetřují. Má právo žádat soukromí a služby přiměřené možnostem nemocnice, jakož i možnost denně se stýkat se členy své rodiny či s přáteli. Omezení takového způsobu (tzv. kontinuálních) návštěv může být provedeno pouze ze závažných důvodů.
- Pacient má právo získat od svého lékaře údaje potřebné k tomu, aby mohl před zahájením každého nového diagnostického a terapeutického postupu rozhodnout, zda s ním souhlasí. Vyjma případů akutního ohrožení zdraví má být náležitě informován o případných rizicích, která jsou s dalším postupem spojena. Pokud existuje více alternativních postupů nebo pokud pacient vyžaduje informace o léčebných alternativách, má na seznámení s nimi právo. Má rovněž právo znát jména osob, které se na nich účastní.
- Pacient má v rozsahu, který povoluje zákon, právo odmítnout léčbu, ale musí být současně informován o zdravotních důsledcích svého rozhodnutí.
- V průběhu ambulantního i nemocničního vyšetření, ošetření a léčby má nemocný právo na to, aby byly v souvislosti s programem léčby brány maximální ohledy na jeho soukromí a stud. Rozbory jeho případu, konzultace vyšetření a léčba jsou důvěrnou věcí a musí být prováděny diskrétně. Přítomnost osob, které nejsou na léčbě přímo zúčastněny, musí odsouhlasit nemocný, a to i ve fakultních zařízeních, pokud si tyto osoby nemocný sám nevybral.
- Pacient má právo očekávat, že veškeré zprávy a záznamy týkající se jeho léčby jsou považovány za důvěrné i v případě počítačového zpracování. Práva a povinnosti při zpracování osobních údajů souvisejících se zajišťováním zdravotní péče se řídí zákonem č. 101/2000 Sb., o ochraně osobních údajů, ve znění pozdějších předpisů. Bez souhlasu pacienta mohou do zdravotnické dokumentace nahlížet, a to v rozsahu nezbytně nutném pro splnění konkrétního úkolu v rozsahu své kompetence pouze osoby uvedené v § 67b zákona č. 20/1966 Sb., o péči o zdraví lidu, ve znění pozdějších předpisů. Ostatní osoby mohou do zdravotnické dokumentace nahlížet pouze se souhlasem pacienta, u dítěte je nutný souhlas jeho zákonného zástupce. Informace o zdravotním stavu pacienta může lékař poskytnout pouze osobám, které pacient oznámí a jejichž jména budou uvedena v jeho zdravotnické dokumentaci. Z důvodů dodržení zákona o ochraně osobních údajů a zachování lékařského tajemství nejsou informace o zdravotním stavu pacienta poskytovány telefonicky.
- Pacient má právo očekávat, že nemocnice musí podle svých možností přiměřeným způsobem vyhovět jeho žádostem o poskytnutí péče v míře odpovídající povaze onemocnění. Je-li to nutné, může být pacient předán jinému léčebnému ústavu, případně tam převezen poté, kdy mu bylo poskytnuto plné zdůvodnění a informace o nezbytnosti tohoto předání a ostatních alternativách, které přitom existují.
- Pacient má právo očekávat, že jeho léčba bude vedena s přiměřenou kontinuitou. Má právo vědět předem, jací lékaři, v jakých ordinačních hodinách a na jakém místě jsou mu k dispozici. Po propuštění z nemocnice má právo očekávat, že jej bude lékař informovat o tom, jak o něj bude dále pečováno.
- Pacient má právo na podrobné a srozumitelné vysvětlení v případě, že se lékař rozhodl k nestandardnímu postupu či experimentu. Písemný vědomý souhlas nemocného je podmínkou k zahájení neterapeutického i terapeutického výzkumu. Pacient může kdykoli, a to

i bez uvedení důvodu, od experimentu ustoupit, když byl poučen o případných zdravotních důsledcích takového rozhodnutí.

- Nemocný v závěru života má právo na citlivou péči všech zdravotníků, kteří musejí respektovat jeho přání, pokud tato nejsou v rozporu s platnými zákony.
- Pacient má právo a povinnost znát a řídit se platnými předpisy instituce, kde se léčí (tzv. nemocniční řád). Pacient bude mít právo kontrolovat svůj účet a vyžadovat zdůvodnění jeho položek bez ohledu na to, kým je účet placen.
- V lednu 1991 ratifikovalo Federální shromáždění Československa Listinu lidských práv a svobod; v návaznosti na ni vypracovala a schválila centrální etická komise Ministerstva zdravotnictví České republiky kodex o právech pacientů; tento byl prohlášen za platný 25. února 1992.

20.4 Varovné příklady porušení práva a etiky v biomechanice a lékařství

Dvacáté století je bohužel také příkladem moderní historie, kdy byly snad všechny základní hodnoty lidského života a etiky potlačeny až do takového absurdna a velikosti, které snad neměly v historii obdoby. Hrůzy samotných válečných konfliktů, které jsou samy o sobě devastující, byly ještě přebity hrůzami vyplývajícími z extrémně nesnášenlivých filozofií, do jejíž náplně patřila i cílená a plánovaná genocida, zvrácená etika a potlačení svobod, práva a demokracie (**nacismus**¹⁸, **komunismus**¹⁹, **militantní islámský terorismus**²⁰, **diktatury, genocida**²¹ apod.). Hrůzy a důsledky konfliktů současné války na Ukrajině jsou také známé.

Následujících několik politováníhodných příkladů potlačení etiky a práva v kontextu lékařství a biomechaniky. Ty jsou v textu velmi stručně a krátce uvedeny a měly by sloužit jako varovné memento pro současné i budoucí generace.

Jsou známy smutné případy zneužívání lékařství, kdy „nepohodlní“ lidé s jiným politickým názorem byli soudy, ve spolupráci se soudními lékaři, v lepších případech jen lživě diagnostikováni jako paranoidní²² psychopaté a byli nespravedlivě umístěni do psychiatrické léčebny. Např. v Sovětském svazu to došlo až tak daleko, že pod tlakem mezinárodních organizací, byli sovětsí psychiatři nuceni ukončit svou činnost v těchto organizacích, viz např. [11] a [12]. Podobné smutné situace se samozřejmě nevyhnuly ani naší zemi a byly

¹⁸ **Nacismus**, resp. **Nacionální socialismus**, německy Nationalsozialismus, je extrémní pravicová totalitní fašistická ideologie, forma fašismu a diktatura v Německé Třetí říši v letech 1933 až 1945.

¹⁹ **Komunismus** (z latinského *communis* = společný) je extrémní levicová politická ideologie třídního boje požadující společné vlastnictví a odmítající třídní i myšlenkové rozdíly mezi lidmi. Komunismus také znamená hypotetickou komunistickou společnost.

²⁰ **Militantní islámský terorismus** je terorismus hájící nesmírlivé náboženské, politické a právní myšlení Islámu.

²¹ **Genocida** je (latinsky *genocidium*) je záměrné a systematické zničení celé populace nebo její části z etnických, náboženských, rasových, národnostních a jiných ideologických důvodů. Genocida je zločinem proti lidskosti definovaným mezinárodním trestním právem.

²² **Paranoia** (z řeckého *paranoia* = pošetilost, šílenství) patří mezi duševní poruchy, vyznačující se bludy, chorobnými představami o vlastním ohrožení a stíháním.

a jsou i v současném světě. Cyril Höschl²³, ve svém článku „Může být psychiatrie zneužívána nejrozličnějšími politickými režimy?“, viz [13], píše: „Psychiatrie odjakživa svádí k politickému zneužití, nejvýrazněji v autoritativních režimech. Na rozdíl například od kardiologie či neurochirurgie má téměř každý pocit, že psychiatrii rozumí, a může tedy způsobem „podle sebe soudím tebe“ hodnotit druhé.“

Známé jsou také smutné případy úmyslného neposkytnutí lékařské péče vězňům. Např. v naší zemi v období socialismu, kdy ženy, které nevyhovovaly režimu a které byly ve vězení těhotné a kterým byla odmítnuta lékařská pomoc, rodily děti ve svých celách a tyto děti pak později umíraly a byly dokonce i týrány, viz [14]. Pohřebiště a pomníky těmto dětem jsou na kubistickém Ďáblickém hřbitově, na adrese Ďáblická 564/2a, 182 00 Praha 8. Smutné události tohoto typu byly a jsou i v současném světě.



Obr. 20.2 Dětský hřbitov v Ďáblicích.

²³ Cyril Höschl (nar. 1949) je známý český psychiatr, popularizátor vědy a vysokoškolský pedagog.



(zdroj obrázku https://cs.wikipedia.org/wiki/Cyril_H%C3%B6schl)

V této kapitole nelze jinak než připomenout zvráceného válečného zločince, označovaného „Anděl smrti“ (Todesengel), kterým byl německý příslušník SS **Josef Mengele**²⁴ prováděl hromadně morbidní, sadistické a odsouzeníhodné experimenty na lidech za 2. světové války v polském koncentračním táboře Auschwitz-Birkenau (Oświęcim-Brzezinka). Blíže např. [15] aj.

Podle principu reciprocity²⁵, by se nemělo zapomínat na Zlaté pravidlo: „**Jak chcete, aby lidé jednali s vámi, tak jedněte vy s nimi.**“ (Bible, Lukášovo evangelium 6,31), viz [16] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Reciprocita>, [17] https://cs.wikipedia.org/wiki/Zlat%C3%A9_pravidlo a [18].

Závěrem je třeba říci, **historie nás učí, že správná etika a právo mají své důležité místo ve společnosti a také v oboru biomechanika musí být dodržovány.**

20.5 Otázky k pochopení látky

1. Co je etika?
2. Co je právo?
3. Co je plagiátorství?
4. K čemu je potřebné získat povolení Etické komise?
5. V krátkosti vysvětlete, co je v Etickém kodexu práv pacientů?
6. Uveďte jeden příklad porušení práva a etiky v biomechanice či lékařství.
7. Co je to genocida?
8. Kdo byl Josef Mengele?

20.6 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Vtip o Právnících:
„Víš, co by se stalo, kdyby každý na světě musel mluvit pravdu? Právníci by si museli hledat novou práci. ☺“

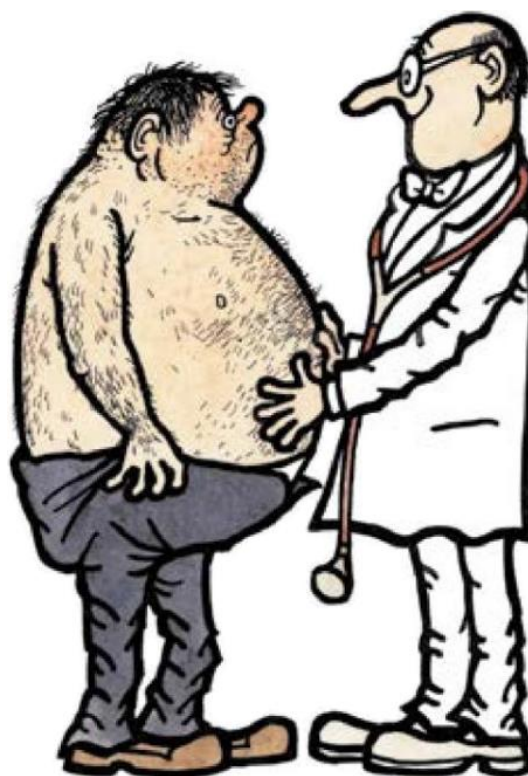
²⁴ **Josef Mengele** (1911–1979) byl lékař, antropolog, důstojník jednotek SS (SS – Schutzstaffel = „Ochranný oddíl“ nacistického Německa) a válečný zločinec provádějící zvrácené experimenty na lidech. Po druhé světové válce uprchl do Jižní Ameriky. Za své zločiny nikdy nebyl souzen.



(zdroj obrázku: Internet)

²⁵ **Reciprocita** (z latinského reciprocus = vzájemný) znamená vzájemnost.

2. Kreslený vtíp:



Pít vám nezakazují.
Pro výzkum potřebují játra
co nejzduřelejší.

Obr. 20.3 Vtíp na téma etický výzkum – Jiří Winter-Neprakta; zdroj obrázku [19].

3. Podívejte se na šokující příběh Petra Zelenky – sériového „heparinového vraha“, který byl odsouzen v České republice na doživotí, viz text [19] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Petr_Zelenka_\(s%C3%A9riov%C3%BD_vrah\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Petr_Zelenka_(s%C3%A9riov%C3%BD_vrah)) nebo video [20] <https://www.ceskatelevize.cz/porady/10993853591-legendy-kriminalistiky/318295350010001/>.
4. Pro další studium lze doporučit skriptum [21] https://projekty.osu.cz/svp/opory/LF_Buzgova_Etika-ve-zdrav.pdf.

20.7 Reference ke kapitole 20

- [1] Etika – Wikipedie (wikipedia.org), <https://cs.wikipedia.org/wiki/Etika>.
- [2] Munzarová, M. *Zdravotnická etika od A do Z*, 2005, Grada Publishing, a.s., ISBN: 80-247-1024-2, pp. 1-156.
- [3] Právo – Wikipedie (wikipedia.org), <https://cs.wikipedia.org/wiki/Pr%C3%A1vo>.
- [4] Segarová, P., *Kvalita života polytraumatizovaných pacientů*, disertační práce v oboru Sociální práce, Fakulta zdravotnictví a sociální práce, Trnavská univerzita v Trnavě, Trnava, Slovensko, 2021
- [5] Schön scandal – Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Sch%C3%B6n_scandal.
- [6] Plagiát – Wikipedie (wikipedia.org), <https://cs.wikipedia.org/wiki/Plagi%C3%A1t>.

- [7] 121/2000 Sb. Autorský zákon (zakonyprolidi.cz)
<https://www.zakonyprolidi.cz/cs/2000-121>.
- [8] Zákon České národní rady č. 246/1992 Sb., na ochranu zvířat proti týrání
- [9] Směrnice Evropského parlamentu a Rady 2010/63/EU ze dne 22. září 2010 o ochraně zvířat používaných pro vědecké účely, <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/PDF/?uri=CELEX:32010L0063>.
- [10] Etický kodex práv pacientů, Fakultní nemocnice Ostrava (fno.cz), <https://www.fno.cz/informace-pro-pacienty/eticky-kodex-prav-pacientu>.
- [11] Odešel ten, jehož nezastrašila sovětská trestní medicína, Téma, Lidovky.cz, https://ceskapozice.lidovky.cz/tema/odesel-ten-jehoz-nezastrasila-sovetska-trestni-medicina.A191112_122314_pozice-tema_lube.
- [12] Janík, A., Kubíčková, N.: Výsledky průzkumu zneužívání psychiatrie v SSSR (Results of an investigation on the abuse of psychiatry in the USSR), *Československá psychiatrie*, ISSN: 0069-2336, 1990, Vol. 86, no. 6, pp. 404-409.
- [13] Psychiatrie svádí k politickému zneužívání, Reflex.cz, <https://www.reflex.cz/clanek/veda/59322/psychiatrie-svadi-k-politickemu-zneuzivani.html>.
- [14] 90 miliónů (900000000.cz), <http://www.900000000.cz/#pribehy-deti>.
- [15] Josef Mengele – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Josef_Mengele.
- [16] Kopecký, J.: *Jiří Winter-Neprakta Velká kniha vtípů*, Grada Publishing, Praha, 2017, ISBN 978-80-271-0447-5.
- [16] Reciprocita – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Reciprocita>.
- [17] Zlaté pravidlo – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Zlat%C3%A9_pravidlo.
- [18] Bible, Lukášovo evangelium 6,31, <https://bible21.cz/online/lukas#6>.
- [19] Petr Zelenka (sériový vrah), [https://cs.wikipedia.org/wiki/Petr_Zelenka_\(s%C3%A9riov%C3%BD_vrah\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Petr_Zelenka_(s%C3%A9riov%C3%BD_vrah)).
- [20] 1/10 Heparinový vrah - Legendy kriminalistiky, Česká televize (ceskatelevize.cz) <https://www.ceskatelevize.cz/porady/10993853591-legendy-kriminalistiky/318295350010001/>.
- [21] Bužgová, R., Etika ve zdravotnictví (osu.cz), https://projekty.osu.cz/svp/opory/LF_Buzgova_Etika-ve-zdrav.pdf.
- [22] Bible, biblenet.cz, Evangelium podle Lukáše 10, 29-37, viz <http://www.biblenet.cz/app/bible/passage?passagePath.path=lukas%2010,29-37>).

21. KONCEPT OBECNÝCH DEFORMACÍ TĚLESA A POSUNUTÍ

V této kapitole jsou stručně vysvětleny základní pojmy týkající se obecného pojmu deformací těles, které navazují na poznatky z předchozího dílu této knihy, viz [1]. Definování pojmu deformace a znalost deformací těles je stěžejní pro vyšetřování materiálových charakteristik, vyšetřování deformačně-napětových a pohybových stavů v mechanice či biomechanice. Důležitým tématem jsou také posunutí a souřadné systémy a jejich transformace. Pro hlubší studium je však nutné studovat knihy týkající se mechaniky ☺.

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek.

21.1 Úvod a obecný pojem deformace těles

V prvním dílu této knihy, v Kapitole 13, 14 a 15, viz [1] nebo [2], jsou vysvětleny pojmy těleso²⁶, vektor, souřadný systém, zatížení a jejich vlastnosti a charakteristiky aj.

V mechanice/biomechanice, pojem **deformace obvykle odkazuje na nějaké změny polohy, tvaru nebo velikosti tělesa (tj. novou konfiguraci objektu v prostoru a čase)**. Deformace těles mohou být způsobeny obecnou kombinací zatížení (statického, dynamického, tepelného atp.), možnými materiálovými změnami (chemické reakce, biologické reakce, zvýšením vlhkosti, zářením, radiací, osteoporózou kostí, atrofií svalů atp.) a okrajovými a počátečními podmínkami v souvislosti s vlastní interakcí jednoho tělesa či interakcemi s více tělesy (vazby, mechanický kontakt, změna polohy těla, fraktury kostí atp.), viz např. Obr. 21.1. Z tohoto pohledu, **deformace jsou určitým typem transformace těles z jejich původní (referenční/počáteční) konfigurace do aktuální konfigurace**.

Těleso 1 (Krajta zelená, *Morelia viridis*)

Těleso 2 (větev stromu)



Obr. 21.1 Příklad poměrně složité interakce mezi tělesy v biomechanice (těleso 1 je ve vzájemné interakci s tělesem 1 a také s tělesem 2).

Pro rozšíření obzoru, je třeba také zmínit, že **v lékařství, pojem deformace nebo deformita značí ztrátu fyziologického tvaru, znetvoření či proces znetvořování vlivem úrazů, nemocí, stáří atp.**, viz např. Obr. 21.2 (a, b) aj. Existují také deformace úmyslné, např. za účelem krásy aj., viz Obr. 21.2 (c).

²⁶ Těleso = **corpus** (latinsky).



Obr. 21.2 Příklady deformací lidského těla (a, b) Bouchardovy uzly - deformace proximálních interfalangeálních kloubů²⁷ ruky, zdroj Wikiskripta viz [3]; (c) „Žirafí žena“ z kmene Padaung na hranicích Thajska a Barmy, zdroj Žena.cz viz [4]

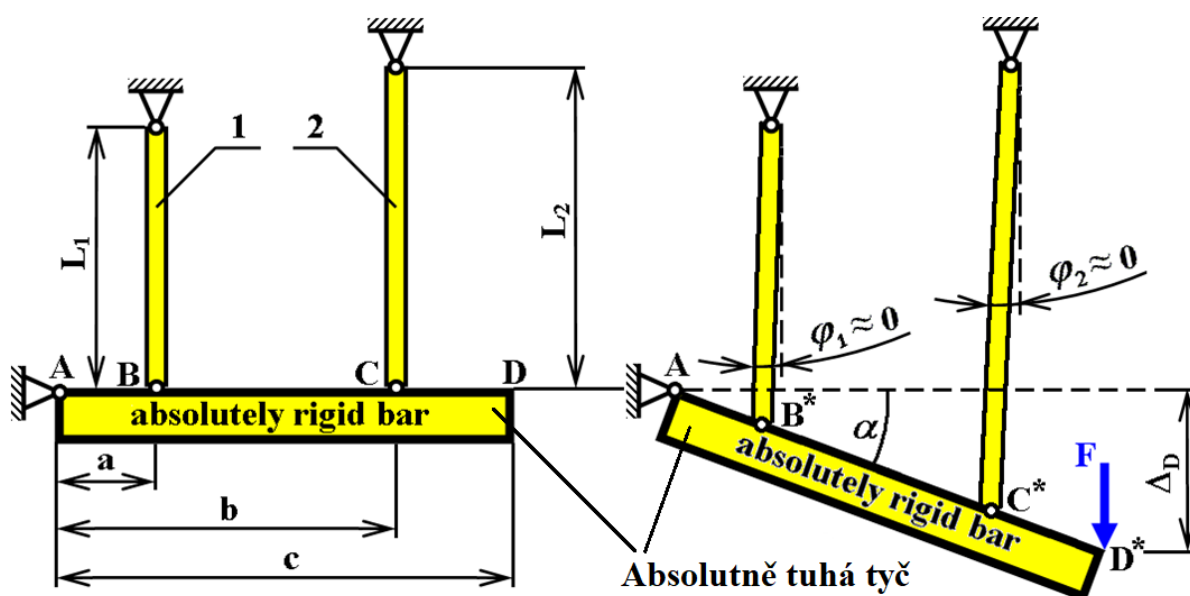
Dále existují také pojmy profesionální deformace, deformace historických faktů atp. ☺, které však nejsou tématem této knihy.

V mechanice/biomechanice jsou deformace spojovány se skutečnými (**deformovatelnými, reálnými**) tělesy nebo ve spojení s deformovatelnými a **nedeformovatelnými (absolutně tuhými, rigidními)**²⁸ tělesy.

²⁷ **Interfalangeální kloub** je kloub prstů mezi jednotlivými prstovými články.

²⁸ **Absolutně respektive dokonale tuhé těleso** se působením zatížení nedeformuje (nemění tvar ani objem), což není reálné. To je ale v mnoha případech praktická idealizace skutečnosti, která výrazně zjednodušuje popis

Například, jestliže se řeší masivní a dostatečně tuhá tyč zavěšená na táhlech, viz Obr. 21.3, pak lze prohlásit, že tyč je absolutně tuhé těleso a táhla jsou deformovatelná tělesa. Za předpokladu teorie malých deformací je řešená úloha jednoduchá a výsledná chyba je minimální. Zde je vhodné doplnit autorovým citátem, který jednoduše vystihuje běžný základní přístup v mechanice a biomechanice **„Jednoduchost většiny úloh mechaniky nebo biomechaniky spočívá v tom, že je to velmi dobře promyšlená složitost.“** ☺



Obr. 21.3 Kombinace deformovatelných a nedeformovatelných těles (absolutně tuhá tyč visí na dvou táhlech a je zatížena silou F), viz [2].

Deformace mohou být malé nebo velké, a v souladu s tím mohou být použity také možná zjednodušení v mechanických/biomechanických modelech či experimentech.

Když v tělese vzniknou deformace, pak v tělese následně také vzniknou vnitřní silové účinky, které jsou antagonické²⁹ vůči vnějším silovým účinkům. Těleso je pak v silové a momentové rovnováze. Blíže [1].

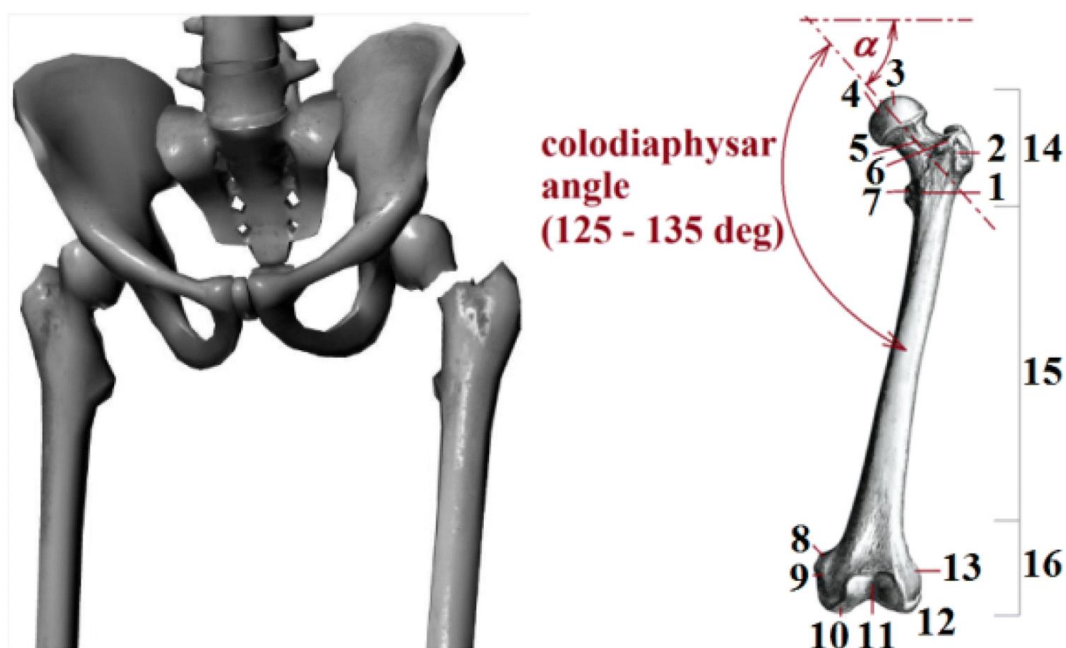
Jestliže se vnější zatížení působící na těleso zvětšují, nebo degradují materiálové vlastnosti tělesa, či nevhodně se mění okrajové podmínky, může docházet k trvalým deformacím a nebezpečným strukturálním poruchám, lomům, zlomeninám nebo kolapsům, viz např. Obr. 21.4 a 21.5.

chování tělesa a zjednodušuje řešení úloh mechaniky/biomechaniky, přičemž chyba může být u vhodných úloh zanedbatelná.

²⁹ Antagonický = protichůdný, opačný, protikladný. Původem z řeckého antagonístés = protivník, soupeř.



Obr. 21.4 Kolaps I-35W Mississippi River bridge; zdroj [5].

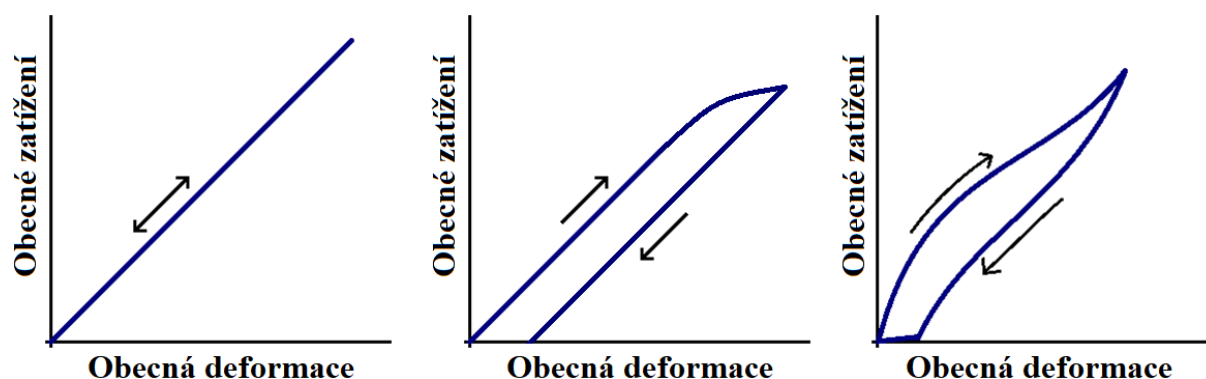


Obr. 21.5 (a) Zlomenina krčku femuru (*collum femoris fractura* nebo *fractura colli femoris*), viz [6],
(b) Základní anatomie femuru, viz [1] a [6]:

- 1 – linia intertrochanterica,
- 2 – trochanter major (velký trochanter),
- 3 – caput femoris (hlavice),
- 4 – fovea capitis femoris,
- 5 – collum femoris (krček),
- 6 – tuberositas glutea,
- 7 – trochanter minor (malý trochanter),
- 8 – tuberculum adductorium,

- 9 – epicondylus medialis,
- 10 – condylus medialis (mediální kondyl),
- 11 – facies patellaris,
- 12 – condylus lateralis (laterální kondyl),
- 13 – epicondylus lateralis,
- 14 – proximální konec,
- 15 – tělo stehenní kosti,
- 16 – distální konec.

Deformace, které zmizí po odstranění zatížení, se nazývají **elastické (vratné) deformace** a těleso se navrátí do své původní konfigurace, viz Obr. 21.6(a).



Obr. 21.6 Zatížení a odlehčení (a) elastický materiál, (b) elasto-plastický materiál, (c) visko-elastický materiál s hysterezní smyčkou. Šipky ukazují směr zatěžování a odlehčování.

Nevratné deformace, např. plastické deformace³⁰ nebo elasto-plastické deformace, viz Obr. 21.6(b), jsou deformace, které zůstávají v tělese i po odstranění zatížení. Složitějším typem deformací jsou **vizkózní³¹ či visko-elastické deformace³²**, viz Obr. 21.6(c).

Obvykle jsou deformace jen obecným termínem a mohou být nejčastěji vyjádřeny jako **posunutí³³ (posuv, průhyb, prodloužení/zkrácení)** nebo jako **poměrná deformace³⁴ (intensita posunutí, relativní posuv, poměrné posunutí)**, viz následující text ve zbytku této kapitoly.

Na závěr této kapitoly je třeba sdělit, že fyzikální termín deformace obecně odkazuje na komplexní situaci tělesa (např. kombinaci řešení zatížení tlakem, ohybem, kroucením, vzpěrem atp.). Všechna tato zatížení generují posunutí, poměrné deformace a mechanická napětí v tělese. **Je třeba vždy vědět, co se slovem deformace myslí, protože může dojít k záměně posunutí a poměrných deformací**, viz Obr. 21.7 ☺.

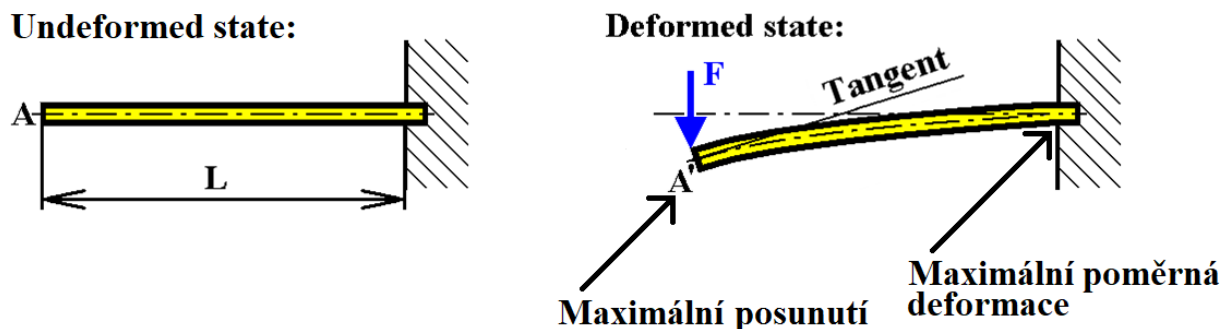
³⁰ **Plastické deformace** jsou nevratné deformace způsobené namáháním nad mezí kluzu materiálu. Typickým příkladem je trvale ohlý kovový hřebík nebo drát. Plastické deformace se projevují skluzovými nebo dislokačními mechanismy mezi atomy materiálu.

³¹ **Viskózní (viskózní) deformace** popisují chování viskózního materiálu, u kterého dochází k disipaci veškeré vložené mechanické energie při harmonickém namáhání.

³² **Visko-elastické deformace**, souvisí s deformacemi visko-elastického materiálu. Visko-elastické resp. viskoelastické materiály jsou přechodovou oblastí mezi elastickými a viskózními materiály. Jedná se především o přírodní a technické materiály (např. polymery, asfalty, těsto a mnoho typů biologických materiálů měkkých tkání atp.).

³³ **Anglicky displacement.**

³⁴ **Anglicky strain.**



Obr. 21.7 Vetknutý nosník zatížený staticky jen osamělou silou F - (a) nezatížený stav (nulové deformace), (b) zatížený stav a nejasná poloha maximálních deformací.

21.2 Koncept posunutí

Definice posunutí (posuvů, přemístění, dráhy, změny délky) je založena na popisu změny polohy a pohybu těles, a může být vyjádřena polohovým vektorem (pozicovým vektorem, průvodičem, rádiusvektorem) $\{\mathbf{r}\}$ /jednotka délky/. Posunutí je jedna z mála veličin, které lze přímo vidět nebo poměrně jednoduše měřit, viz Obr. 21.8.

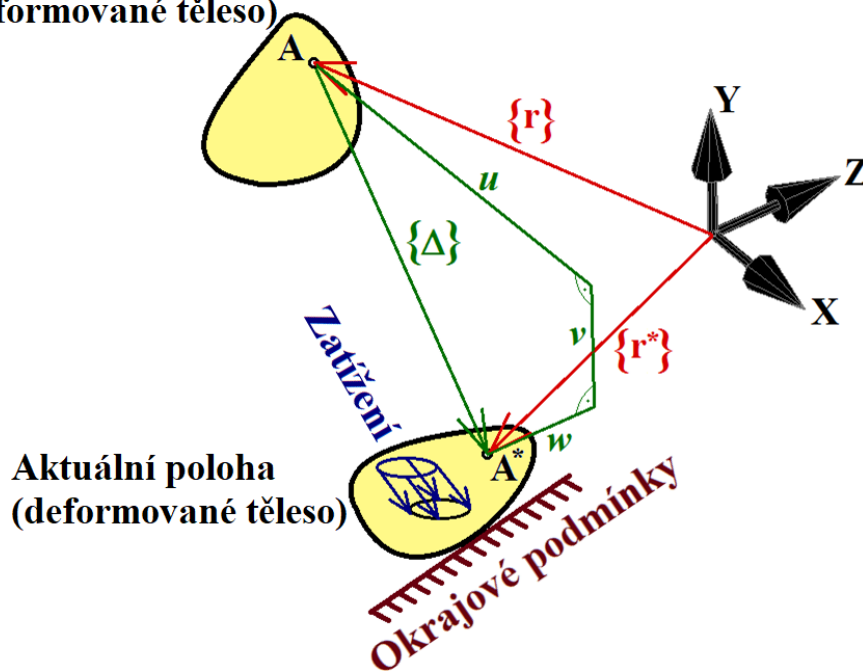


Obr. 21.8 „Star trails“ - Astrofotografie dráh hvězd a planet noční oblohy, jako důsledek otáčení Země a dlouhého expozičního času fotoaparátu, čímž vznikají světelné dráhy (jak se Země otáčí, tak hvězdy nezůstávají na svém místě, ale pomalu se otáčejí okolo severního/jižního pólu) a tedy hvězdy ležící např. blízko severu se pohybují pomalu, zatímco hvězdy blíže k rovníku se pohybují rychleji; zdroj ESO - European Southern Observatory, Atacama, Chile, viz [7].

Obrázek 21.8 jednoduše dokazuje, že naše planeta je v pohybu.

V souladu s prvním dílem této knihy, viz [1], pro stanovení posuvů je nutné zvolit souřadný systém, např. kartézský³⁵ souřadný systém X, Y, Z, viz Obr. 21.9.

**Počáteční konfigurace
(nedeformované těleso)**

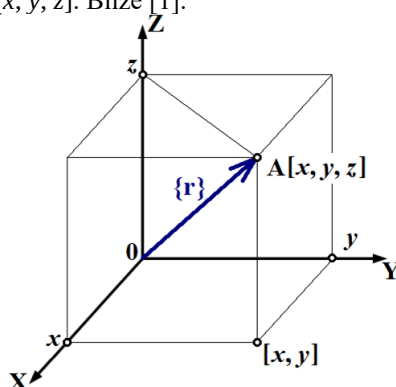


Obr. 21.9 Definice polohových vektorů $\{r\}$, $\{r^*\}$ a vektoru posunutí $\{\Delta\}$ v kartézském souřadném systému.

Vlivem vnějšího působení zatížení aj. okrajových podmínek, se bod „A“ o souřadnicích x, y, z /jednotka délky/, tj. $A[x, y, z]$, přemístil do bodu „A*“, tj. $A^*[x^*, y^*, z^*]$. Horní index „*“ značí souvislost s aktuální polohou (tj. polohou deformovatelného tělesa). Definice polohových změn tělesa tedy musí být definována v souvislosti se změnou souřadnic tělesa.

Dle Obr. 21.9 lze definovat **polohové vektory** $\{r\}$ a $\{r^*\}$

³⁵ **Kartézský (pravoúhlý) souřadný systém** je nejpoužívanější a nejznámější přímočarý souřadný systém. Osy kartézského systému jsou navzájem kolmé přímky, které se protínají v počátku souřadnic a obvykle jsou označovány jako X, Y a Z. Příslušné souřadnice jsou značeny jako x, y, z /délková jednotka/. Obecný bod „A“ je pak jednoznačně daný souřadnicemi $[x, y, z]$. Blíže [1].



$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [x, y, z]^T, \quad \{\mathbf{r}^*\} = \begin{Bmatrix} r_x^* \\ r_y^* \\ r_z^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{Bmatrix} = [x^*, y^*, z^*]^T, \quad (21.1)$$

kde horní index „T“ znamená transpozici³⁶.

a jejich velikosti (délky) $|\mathbf{r}|$ a $|\mathbf{r}^*|$ /jednotka délky/, pro které platí dle Pythagorovy věty

$$|\mathbf{r}| = \sqrt{\{\mathbf{r}\}^T \{\mathbf{r}\}} = \sqrt{[x, y, z] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \text{ resp. } |\mathbf{r}^*| = \sqrt{x^{*2} + y^{*2} + z^{*2}}. \quad (21.2)$$

Ve vztahu (21.2) je použito násobení vektorů³⁷.

Vektor posunutí $\{\Delta\}$ /jednotka délky/ bodu A (tj. popis nejkratší vzdálenosti mezi body „A“ a „A“^{*}, což je úsečka ☺), viz Obr. 21.8, je pak dán rozdílem polohových vektorů

$$\{\Delta\} = \{\mathbf{r}^*\} - \{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} x^* - x \\ y^* - y \\ z^* - z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \Delta_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \quad (21.3)$$

a pro jeho velikost $|\Delta|$ /jednotka délky/ platí

$$|\Delta| = \sqrt{\{\Delta\}^T \{\Delta\}} = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}. \quad (21.4)$$

V některých učebnicích je vektor posunutí značen jako $\{u\}$, $\mathbf{u}$ nebo $\vec{u}$, respektive jeho obecná složka u_i , viz také alternativní značení složek vektoru $\mathbf{v}$ (21.3).

Z pohledu matematiky/mechaniky, posunutí je stupeň volnosti, kterému je těleso vystaveno vlivem pohybu.

Stanovení polohy (tj. např. určení posunutí) je obvykle prvním výsledkem výpočtů či měření v experimentální či výpočtové mechanice/biomechanice. Ze známého rozložení posunutí v tělese pak lze, pomocí matematického aparátu, stanovit poměrné deformace, mechanická napětí a další hledané veličiny, kterými jsou rychlost, zrychlení aj.

Pro úplnost je třeba ještě připomenout definici příslušných jednotkových vektorů $\{\hat{\mathbf{r}}\}$, $\{\hat{\mathbf{r}}^*\}$ a $\{\hat{\Delta}\}$ /1/,

³⁶ **Transpozice** je přehození řádků za sloupce u vektorů nebo matic. Např. $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix}^T = [x, y, z]$, nebo

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & 2.1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 4 \\ 3 & 2.1 \end{bmatrix}.$$

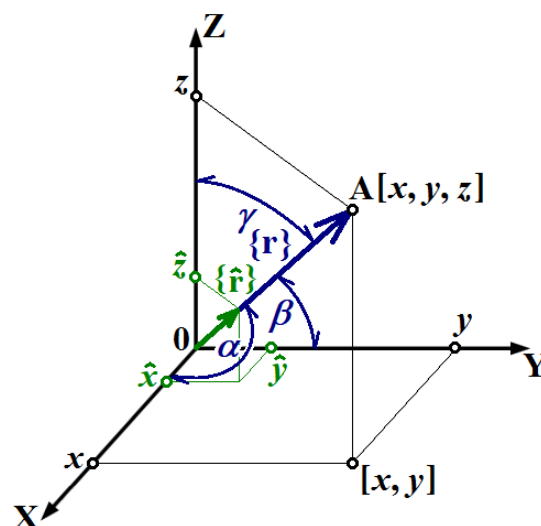
³⁷ **Násobení vektorů** $[x, y, z] \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = x^2 + y^2 + z^2$ je skalární součin dvou stejných vektorů, avšak násobení

stejných vektorů $\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} [x, y, z] = \begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ xz & yz & z^2 \end{bmatrix}$ je symetrická matice, viz [1] nebo učebnice matematiky.

$$\{\hat{r}\} = \frac{1}{|r|} \{r\} = \begin{Bmatrix} \frac{x}{|r|} \\ \frac{y}{|r|} \\ \frac{z}{|r|} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{Bmatrix}, \quad |\hat{r}| = \sqrt{\{\hat{r}\}^T \{\hat{r}\}} = \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2} = 1. \quad (21.5a)$$

$$\{\hat{r}^*\} = \frac{1}{|r^*|} \{r^*\} = \begin{Bmatrix} \frac{x^*}{|r^*|} \\ \frac{y^*}{|r^*|} \\ \frac{z^*}{|r^*|} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{x}^* \\ \hat{y}^* \\ \hat{z}^* \end{Bmatrix}, \quad |\hat{r}^*| = 1, \quad \{\hat{\Delta}\} = \frac{1}{|\Delta|} \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \frac{u}{|\Delta|} \\ \frac{v}{|\Delta|} \\ \frac{w}{|\Delta|} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{w} \end{Bmatrix}, \quad |\hat{\Delta}| = 1, \quad (21.5b)$$

viz např. Obr. 21.10.



Obr. 21.10 Jednotkové vektory a směrové kosiny vektoru $\{r\}$.

Důležité je připomenout také **směrové kosiny**³⁸, tj. **kosiny směrových úhlů** α, β, γ /rad/ nebo /°, viz Obr. 21.10. Pak platí např. pro vektor $\{r\}$

$$\cos \alpha = \frac{x}{|r|} = \hat{x}, \quad \cos \beta = \frac{y}{|r|} = \hat{y}, \quad \cos \gamma = \frac{z}{|r|} = \hat{z}, \quad (21.6)$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 = 1, \quad (21.7)$$

$$\alpha = \arccos(\hat{x}), \quad \beta = \arccos(\hat{y}), \quad \gamma = \arccos(\hat{z}). \quad (21.8)$$

Vztahy (21.6) až (21.8) lze použít také pro vektory $\{r^*\}$ a $\{\Delta\}$, pomocí příslušné záměny složek vektorů.

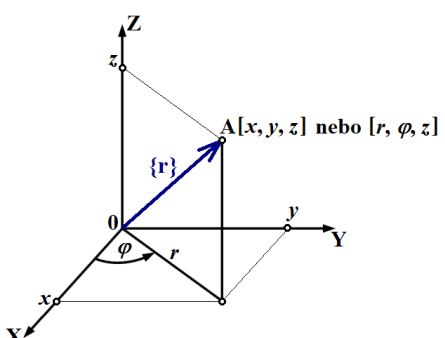
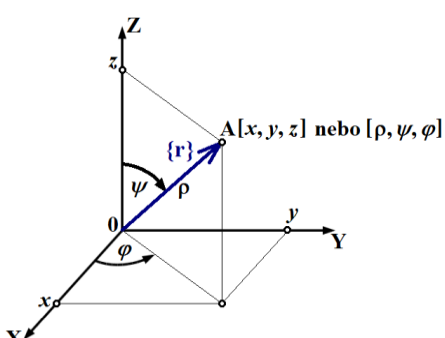
Jednotkové vektory mají vždy totožný směr jako příslušný vektor, pro který se stanovují.

³⁸ tj. kosiny úhlů, které svírá vektor s kladnými směry souřadných os X, Y, Z, viz Obr. 21.10.

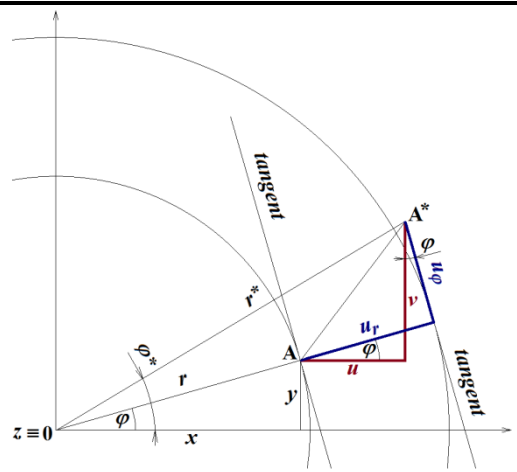
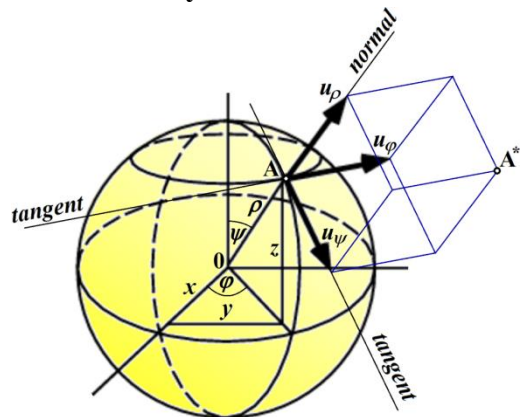
21.3 Transformace souřadných systémů a vektorů

Vektory $\{r\}$ a $\{\Delta\}$ (podobně jako i další vektory), lze vyjádřit také v jiných souřadných systémech, viz Tab. 21.1 a 21.2.

Tab. 21.1 Příklady vyjádření kartézských souřadnic pomocí jiných souřadných systémů.

Kartézský souřadný systém, polohový vektor $\{r\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} =$	$= \begin{Bmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{Bmatrix} \text{ V cylindrickém souřadném systému, kde } r = \sqrt{x^2 + y^2},$ $\varphi = \arctg2\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{pro } x > 0, y \geq 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{pro } x < 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{pro } x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{pro } x = 0, y < 0 \end{cases}$ Blíže https://cs.wikipedia.org/wiki/Arctg2. a také [1]. 
Kartézský souřadný systém, polohový vektor $\{r\} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} =$	$= \begin{Bmatrix} \rho \sin \psi \cos \varphi \\ \rho \sin \psi \sin \varphi \\ \rho \cos \psi \end{Bmatrix} \text{ Ve sférickém souřadném systému, kde } \rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$ $\psi = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right),$ $\varphi = \arctg2\left(\frac{y}{x}\right) = \begin{cases} \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right), & \text{pro } x > 0, y \geq 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{pro } x < 0 \\ \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{pro } x > 0, y < 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{pro } x = 0, y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & \text{pro } x = 0, y < 0 \end{cases}$ Blíže https://cs.wikipedia.org/wiki/Arctg2. a také [1]. Vyjádření pomocí dalších souřadných systémů, viz např. [1]. 

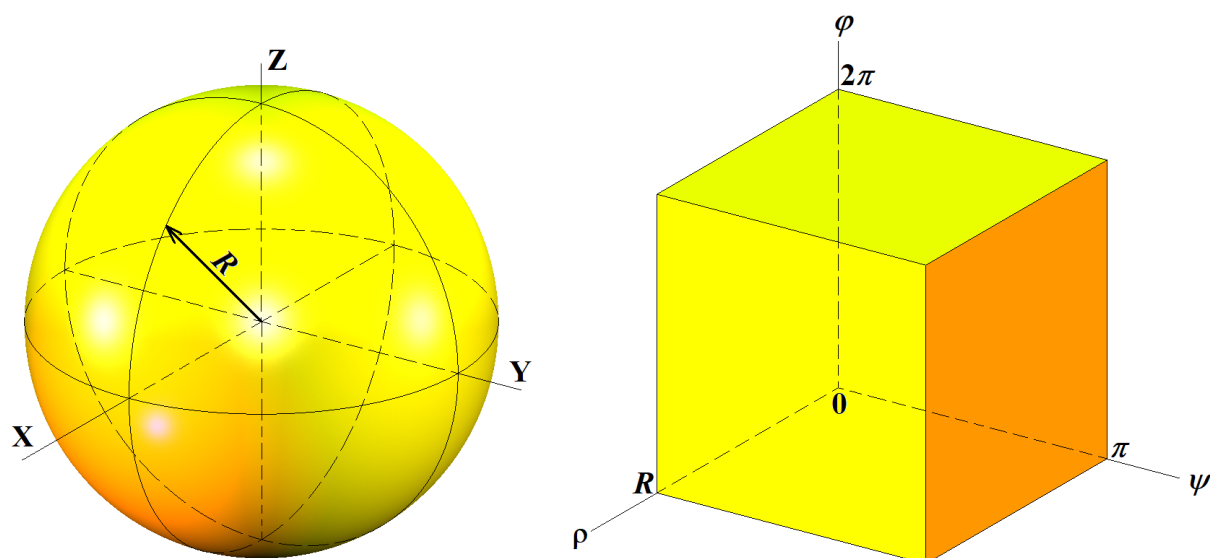
Tab. 21.2 Příklady vyjádření kartézských souřadnic vektoru posunutí pomocí jiných souřadných systémů.

Kartézský souřadný systém, vektor posunutí $\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} =$	$= \begin{Bmatrix} u_r \cos \varphi - u_\varphi \sin \varphi \\ u_r \sin \varphi + u_\varphi \cos \varphi \\ w \end{Bmatrix}$ v cylindrickém souřadném systému. 
	$= \begin{Bmatrix} u_\rho \sin \psi \cos \varphi + u_\varphi \cos \psi \cos \varphi - u_\psi \sin \varphi \\ u_\rho \sin \psi \sin \varphi + u_\varphi \cos \psi \sin \varphi + u_\psi \cos \varphi \\ u_\rho \cos \psi - u_\varphi \sin \psi \end{Bmatrix}$ ve sférickém souřadném systému. 
	Vyjádření pomocí dalších souřadných systémů, viz např. [1].

Funkce $\arctg2\left(\frac{y}{x}\right)$, resp. $\text{atan}\left(\frac{y}{x}\right)$ je dostupná v mnoha programovacích jazycích a jednoznačně definuje převod mezi příslušnými souřadnými systémy.

Kladný směr úhlů φ (otáčení kolem osy Z) je zvolen jako kladný proti směru pohybu hodinových ručiček. Platí také $\rho \geq 0$ a $r \geq 0$, tj. záporný poloměr není fyzikálně možný ☺.

Správná volba souřadného systému při řešení úloh mechaniky/biomechaniky značně zjednodušuje popis nebo řešení úlohy. Například, znázornění objemu ohraničeného rovnicí koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, kde R je poloměr, je vidět na Obr. 21.11(a), přičemž alternativní znázornění může být jako „kvádr“ v souřadnicích $0 \leq \rho \leq R$, $0 \leq \psi \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, viz Obr. 21.11(b).



Obr. 21.11 Znáznornění rovnice koule o poloměru R v různých ortonormálních souřadných systémech.

Jestliže je v cylindrickém souřadném systému souřadnice $z = 0$, pak se jedná o souřadnice v rovině a příslušný souřadný systém se nazývá polární.

Vektor posunutí $\{\Delta\}$ může být tedy vyjádřen v různých souřadných systémech, přičemž jeho velikost $|\Delta|$ bude vždy stejná. Tvrzení lze také rozšířit na to, že **výsledek úlohy mechaniky je nezávislý na volbě typu souřadného systému.**

Mezi souřadnými systémy platí zajímavé skutečnosti. Např. vektor posunutí souřadného systému 1, tj. $\{\Delta_1\}$, lze transformovat do jiného souřadného systému 2 (tj. stanovit $\{\Delta_2\}$) takto

$$\{\Delta_2\} = [T_{2,1}]\{\Delta_1\}, \quad (21.9)$$

kde $[T_{2,1}]$ je **matice transformace**, tj. **matice přechodu z ortonormálních³⁹ souřadnic 1 do ortonormálních souřadnic 2**. Ve vztahu (21.9) je použito násobení matice vektorem⁴⁰.

Matice $[T_{2,1}]$ je **ortogonální**, tj. platí

$$[T_{2,1}]^{-1} = [T_{2,1}]^T = [T_{1,2}], \quad (21.10)$$

³⁹ **Ortonormální** = navzájem kolmé směry souřadnicových os.

⁴⁰ **Násobení matice vektorem**, např. $\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a_{1,1}b_1 + a_{1,2}b_2 \\ a_{2,1}b_1 + a_{2,2}b_2 \end{Bmatrix}$, je v tomto případě vektor, viz [1].

kde horní index „-1“ definuje inverzi matice⁴¹ a horní index „T“ značí transpozici matice, viz učebnice matematiky nebo také první díl této knihy [1].

Determinant ortogonální matice je vždy roven 1.

V souladu s Tab. 21.2 a rovnicí (21.10), pak lze, např. pro vzájemnou transformaci cylindrických a kartézských souřadnic, psát

$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ w \end{Bmatrix} = [T_{\text{kartézské,cylindrické}}] \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ w \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ w \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [T_{\text{cylindrické,kartézské}}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (21.11)$$

kde je zřejmé že platí $[T_{\text{kartézské,cylindrické}}] = [T_{\text{cylindrické,kartézské}}]^T$, viz rovnice (21.10).

Analogicky lze odvodit vztahy také pro vzájemnou transformaci sférických a kartézských souřadnic

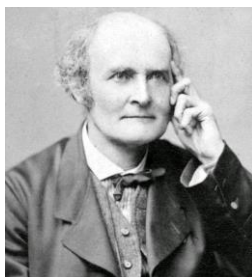
$$\left. \begin{aligned} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix} = [T_{\text{kartézské,sférické}}] \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \varphi & \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \\ \cos \psi \cos \varphi & \cos \psi \sin \varphi & -\sin \psi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [T_{\text{sférické,kartézské}}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (21.12)$$

Nebo vztahy pro vzájemnou transformaci sférických a cylindrických souřadnic, kde např. pro transformaci z cylindrických souřadnic do sférických platí podle rovnic (21.11) a (21.12) vztahy

⁴¹ Jestliže je matice $[A]$ čtvercová a regulární, pak platí $[A] \times [A]^{-1} = [A]^{-1} \times [A] = [I]$, kde $[I]$ je **jednotková matice**. Jednotková matice má samé jedničky na hlavní diagonále a ostatní prvky matice jsou nulové, tj. např.

$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Pojem jednotkové matice zavedl poprvé **Arthur Cayley** (1821–1895), který byl anglický

pedagog a právník, ale především významný matematik, viz [9].



(zdroj fotografie internet)

$$\left. \begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_w \end{Bmatrix} &= [T_{\text{cylindrické,kartézské}}] \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [T_{\text{cylindrické,kartézské}}] [T_{\text{kartézské,sférické}}] \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin \psi \cos \varphi & \cos \psi \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \psi \sin \varphi & \cos \psi \sin \varphi & \cos \varphi \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \psi & \sin \psi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix} = [T_{\text{cylindrické,sférické}}] \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} u_\rho \\ u_\varphi \\ u_\psi \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_w \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi & 0 & \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_w \end{Bmatrix} = \\
 &= [T_{\text{sférické,cylindrické}}] \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_w \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \right\} (21.13)$$

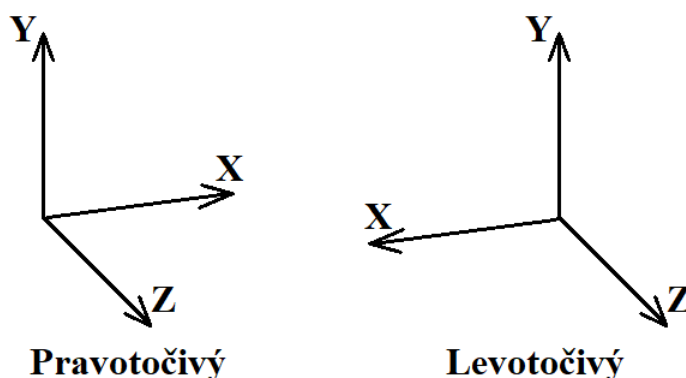
Pro správnou aplikaci transformací souřadných systémů a vektorů posunutí, je vždy nutné zohlednit, zda se vztahují ke stejnému počátku souřadnic a jakým směrem se volí osy souřadných systémů.

Souřadný systém, či vektor posunutí, lze obecně definovat nekonečně mnoha způsoby ☺. Nicméně, jak již bylo řečeno dříve, výsledek řešení je nezávislý na volbě souřadného systému či způsobu vyjádření vektoru posunutí. Souřadný systém a definice vektoru posunutí, by měly být voleny tak, aby byly praktické a zjednodušovaly řešení obecných úloh matematiky, mechaniky, biomechaniky či dalších věd a techniky.

Existují tedy také další způsoby definice a vyjádření souřadných systémů, viz např. uvedené v prvním dílu této knihy [1], které již nejsou uvedeny v tomto druhém dílu.

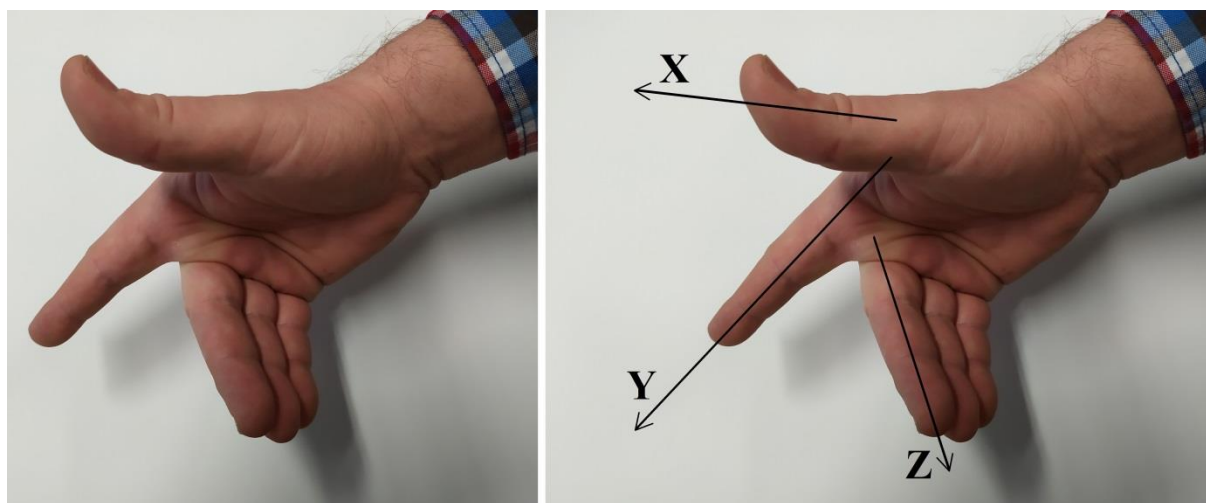
Teoreticky lze souřadné systémy a s nimi související vektory posunutí definovat i pro prostory libovolných dimenzí, což často využívá teoretická fyzika a matematika. Naopak, je možné a mnohdy i praktické snížení dimenze z 3D úloh na 2D (např. rovinná deformace, tj. $\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$, resp. $\{\Delta\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{Bmatrix}$) či 1D (jednoosá deformace, tj. $\{\Delta\} = u$), jak je patrné také v řešení některých úloh této knihy.

Souřadné systémy lze dělit také na **pravotočivé** a **levotočivé**, viz Obr. 21.12.



Obr. 21.12 Pravotočivý a levotočivý souřadný systém.

Kladné směry os X, Y a Z pravotočivého systému jsou definovány pravou rukou a jejími prsty⁴², viz pravidlo pravé ruky⁴³ na Obr. 21.13.

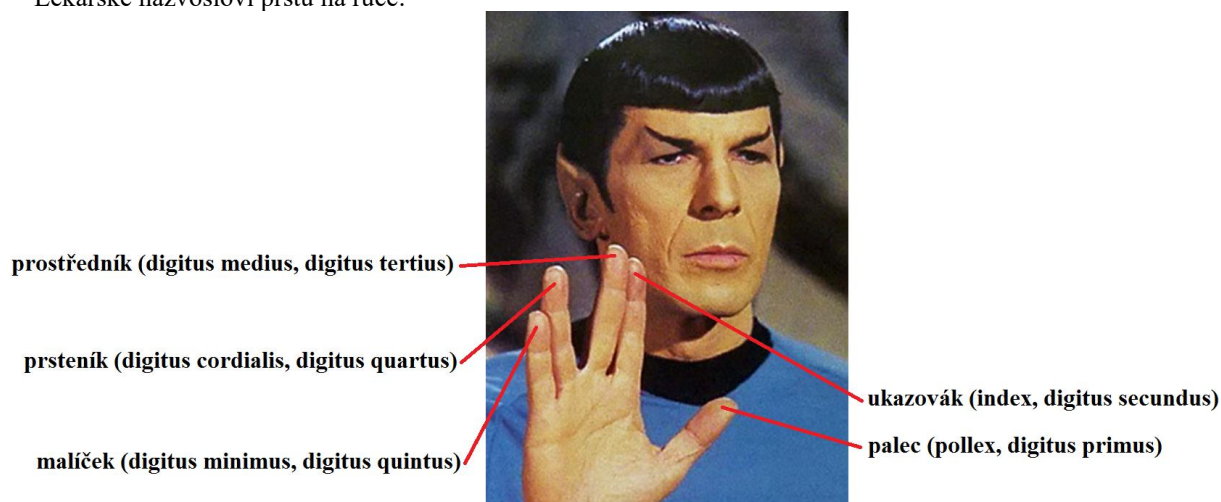


Obr. 21.13 Pravidlo pravé ruky a definice pravotočivého souřadného systému (tj. příslušné prsty jsou ve shodě s kladným směrem)

Jestliže je kladná osa X ve směru palce (v anatomické terminologii pollex, digitus primus, phalanx 1), kladná osa Y ve směru ukazováčku (v anatomické terminologii index, digitus secundus, phalanx 2) a kladná osa Z ve směru zbývajících prstů (v anatomické terminologii digitus tertius až digitus quintus, phalanx 3 až 5), pak je souřadný systém pravotočivý. V opačném případě (tj. pokud „ruka není ve shodě“ s kladnými směry), pak je souřadný systém levotočivý.

Na závěr této kapitoly je třeba vysvětlit a zobecnit transformaci souřadných systémů. Existuje **translace**⁴⁴ (posunutí) a **rotace**⁴⁵ (natočení) souřadného systému (souřadnic), viz Obr. 21.14.

⁴² Lékařské názvosloví prstů na ruce:

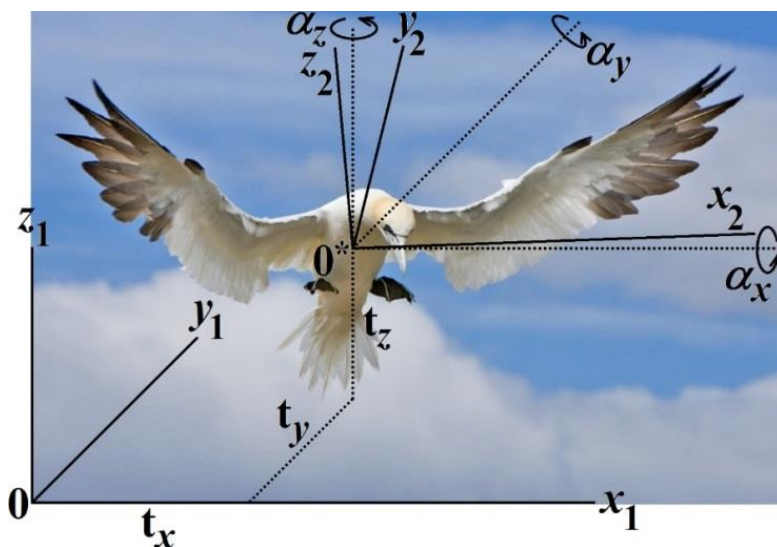


Spock ze seriálů a filmů Star Trek a jeho vulkánský pozdrav, který je použitý pro definici anatomických názvů prstů © (zdroj internet a autorem upraveno).

⁴³ Anglicky **Right-hand rule**, které se často používá jako mnemotechnická pomůcka v mnoha případech, viz např. [10].

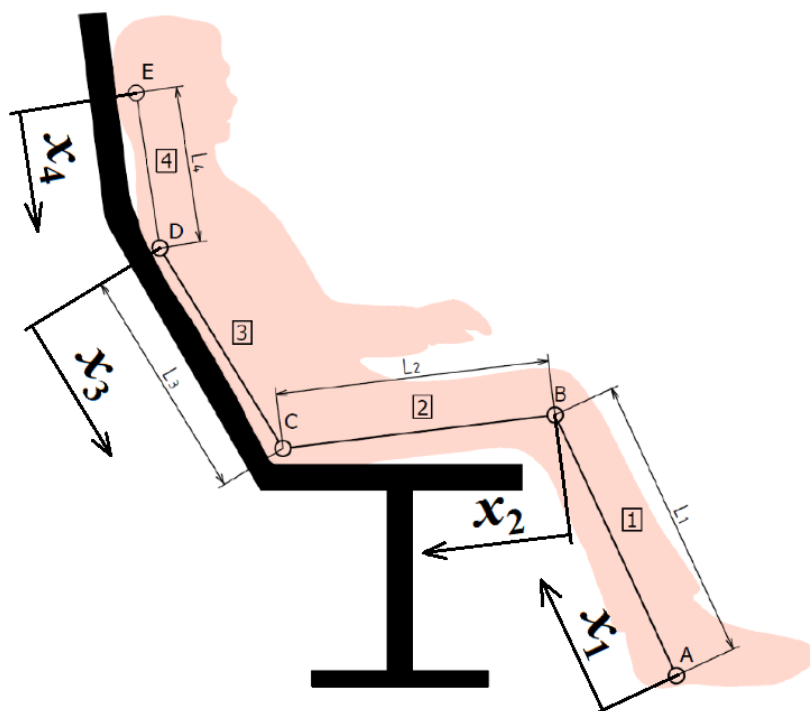
⁴⁴ Z latinského translatio = přenesení/převedení.

⁴⁵ Z latinského rota = kolo, kruh a z latinského rotatio = otáčení.



Obr. 21.14 Vysvětlení translace a rotace souřadného systému souřadnic (pták terej bílý *Morus bassanus* v letu).

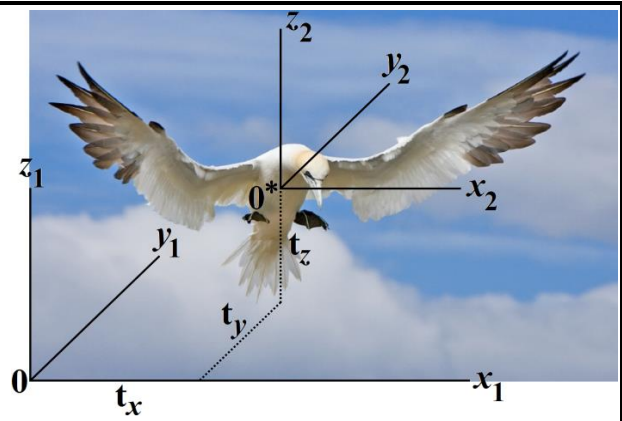
V souvislosti s tím, se také někdy používá termínů **lokální souřadný systém (lokální souřadnice)** a **globální souřadný systém (globální souřadnice)**, viz Obr. 21.14 a 21.15, či fiktivní **souřadný systém (fiktivní souřadnice)** a **pracovní souřadný systém (pracovní souřadnice)**. Takovéto souřadné systémy obvykle nemají společný počátek souřadnic.



Obr. 21.15 Sedící člověk jako mechanismus a možné definování lokálních souřadných systémů x_1 až x_4 , viz [11].

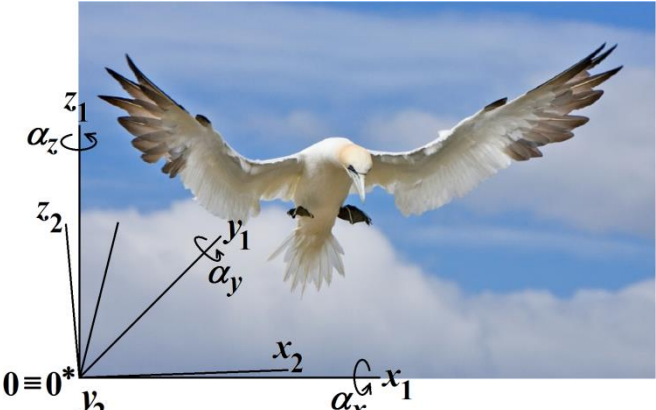
Translace (posunutí) souřadného systému je poměrně jednoduchá, velmi často používaná a je vysvětlena v Tab. 21.3.

Tab. 21.3 Translace souřadného systému.

Translace v prostoru	$\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}, \text{ kde}$ $\begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix} \text{ /jednotka délky/ je}$ vektor translace počátku	
	$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{Bmatrix}$	

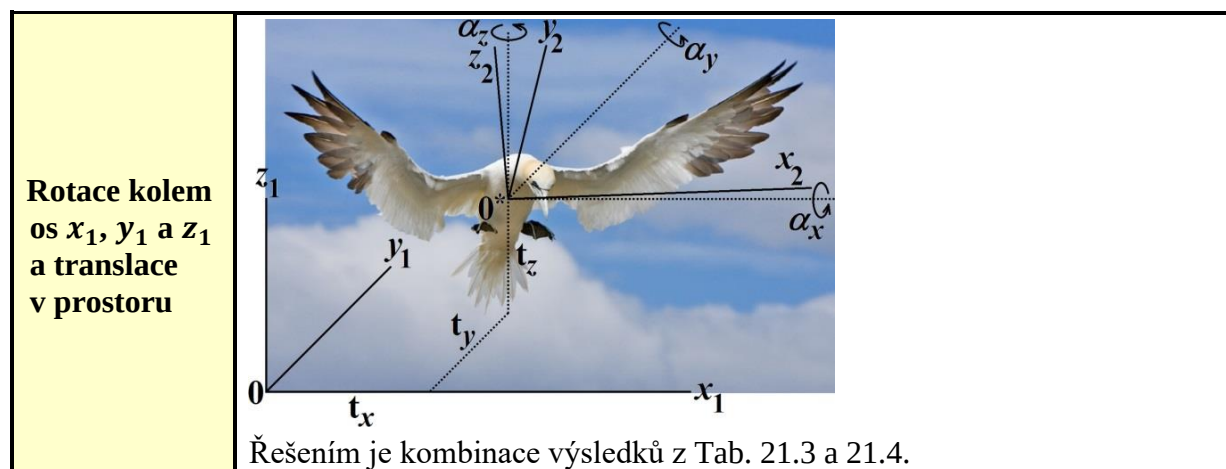
Rotace souřadného systému je vysvětlena v Tab. 21.4.

Tab. 21.4 Rotace souřadného systému.

Rotace kolem osy souřadnice x_1	$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_x}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad [T_{2,1\alpha_x}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha_x & -\sin \alpha_x \\ 0 & \sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix},$ v případě změny definice směru orientace kladného úhlu α_x stačí jen změnit znaménko u funkcí $\sin \alpha_x$. $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_x}]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$
Rotace kolem osy souřadnice y_1	$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_y}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad [T_{2,1\alpha_y}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_y & 0 & \sin \alpha_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha_y & 0 & \cos \alpha_y \end{bmatrix},$ v případě změny definice směru orientace kladného úhlu α_y stačí jen změnit znaménko u funkcí $\sin \alpha_y$. $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_y}]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$
Rotace kolem osy souřadnice z_1	$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_z}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}, \quad [T_{2,1\alpha_z}] = \begin{bmatrix} \cos \alpha_z & -\sin \alpha_z & 0 \\ \sin \alpha_z & \cos \alpha_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$ v případě změny definice směru orientace kladného úhlu α_z stačí jen změnit znaménko u funkcí $\sin \alpha_z$. $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_z}]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$
Rotace kolem os souřadnic x_1, y_1 a z_1	$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_x}] \times [T_{2,1\alpha_y}] \times [T_{2,1\alpha_z}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix},$ v případě změny definice směru orientace kladných úhlů $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ stačí jen změnit znaménko u funkcí $\sin \alpha_x, \sin \alpha_y, \sin \alpha_z$ $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \left[[T_{2,1\alpha_x}] \times [T_{2,1\alpha_y}] \times [T_{2,1\alpha_z}] \right]^T \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ /úhlové jednotky/ jsou úhly rotace kolem příslušných os souřadných systémů.

Translace a rotace souřadného systému (tj. kombinace výsledků z Tab. 21.3 a 21.4) je vysvětlena v Tab. 21.5.

Tab. 21.5 Translace a rotace souřadného systému.



Nicméně, v praktických úlohách je vždy nutné brát zřetel na polohu kladných směrů souřadných os a definici kladných směrů úhlů $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$.

21.4 Doplnující informace

Kromě otočení a posunutí se někdy používá **změna měřítka**, tj. těleso se zvětšuje či zmenšuje. Pro matici transformace pak platí

$$[T_{2,1scale}] = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 \\ 0 & 0 & s_z \end{bmatrix}, \quad (21.14)$$

kde s_x, s_y a s_z /1/ jsou změny měřítka ve směru souřadných os.

Jestliže se $s_x = s_y = s_z$, pak je změna měřítka proporcionální (tj. např. krychle se zobrazuje jako krychle). V opačném případě je změna měřítka neproporcionální (tj. např. krychle se zobrazuje jako kvádr).

Matice $[T_{2,1scale}]$ již není ortogonální, tj. $[T_{2,1scale}]^T \neq [T_{2,1scale}]^{-1}$.

Pro doplnění je třeba také zmínit ještě **zkosení**, Změna měřítka či zkosení má význam hlavně pro zpracování obrazu (např. mapy, či počítačové vizualizace) než pro praktické výpočty.

Všechny výše uvedené transformace souřadných systémů lze souhrnně označit jako **afinní⁴⁶ transformace** (tj. z rovnoběžek jsou po transformaci opět rovnoběžky).

Samozřejmě lze transformace využívat jednoduše také v různých software, při natáčení obrázků, textů atp., což v dnešní době počítačů je známé ☺.

Problematika měření vzdálenosti/posunutí, je tedy buď nepřímá pomocí využití jiného fyzikálního jevu (například v astronomii či kvantové mechanice) nebo přímá (např. skládací

⁴⁶ **Afinní transformace** jsou jedněmi z nejčastěji používaných operací v počítačovém zpracování obrazu a počítačové grafice. Zachovává kolinearitu a dělicí poměr obrazu.

metr či posuvné měřítko). Práce s posuvným měřítkem, která patří mezi „základní“ praktické dovednosti techniků a která je vhodná i pro biomechaniku, je předvedena v Příkladu 21.8.

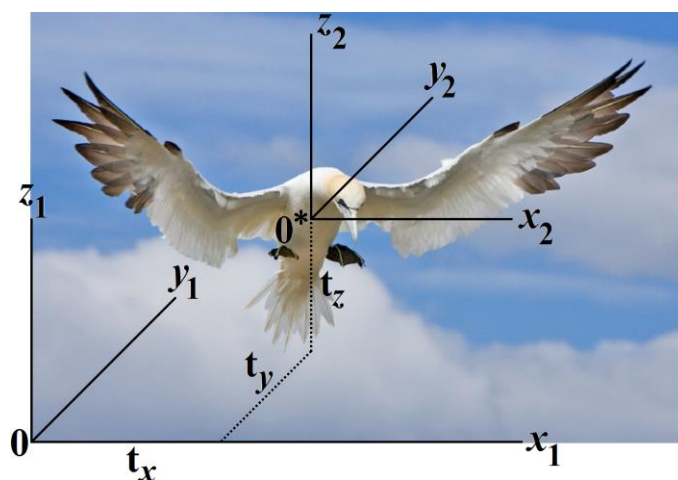
Důležité je také zmínit moderní a dostupný globální polohový systém **GPS (Global Positioning System)**, který je často v běžných lidských činnostech používán. Je to družicový polohový systém, provozovaný např. Ministerstvem obrany USA, který umožňuje pomocí elektronického přijímače určit dostatečně „přesnou“ polohu na povrchu země. A nahrazuje tak starší metody určování polohy odvozené z pozorování hvězd, Slunce, sextantu nebo triangulace. Uživatel služby GPS používá elektronické rádiové přijímače, které na základě odeslaných signálů z družic umožňují vypočítat polohu s přesností na milimetry až desítky metrů. Pomocí GPS lze sledovat také pohyb zvířat aj.

Je třeba si pamatovat, že **každé měření, a to nejen délky, je obvykle zatížené chybou měření**, která je buď zanedbatelná anebo vyhodnocena statisticky z opakovaných měření či odhadnuta ☺.

21.5 Příklady

Příklad 21.1: Vyjadřete souřadnice počátků souřadných systémů 0 a 0* v souřadnicích x_1, y_1, z_1 a x_2, y_2, z_2 , viz Obr. 21.16. Oba souřadné systémy jsou vzájemně posunuté.

Dáno: t_x, t_y a t_z /jednotky délky/.



Obr. 21.16 Vzájemně posunuté souřadné systémy.

Počátek 0 je možno vyjádřit takto $0 [x_1, y_1, z_1] = [0, 0, 0]$ nebo $0 [x_2, y_2, z_2] = [-t_x, -t_y, -t_z]$, viz Obr. 21.16.

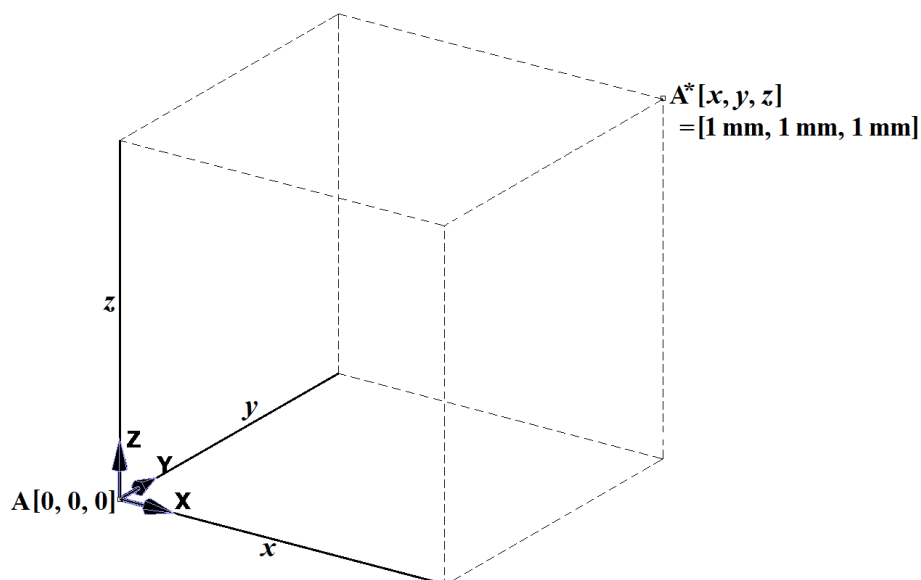
Opačným postupem, počátek 0* je možno vyjádřit takto $0^* [x_1, y_1, z_1] = [t_x, t_y, t_z]$ nebo $0^* [x_2, y_2, z_2] = [0, 0, 0]$.

Bod 0 by mohl být považován za počátek globálního souřadného systému a bod 0* by mohl být považován za počátek lokálního souřadného systému.

Příklad 21.2: V kartézském souřadném systému je dána počáteční poloha bodu „A“ tělesa (v počátku souřadného systému) a také je známá poloha bodu „A*“ deformovaného tělesa,

viz Obr. 21.17. Určete souřadnice bodů A , A^* , v cylindrickém a sférickém souřadném systému, určete polohové vektory $\{r\}$ a $\{r^*\}$ v kartézském, cylindrickém a sférickém systému a také jejich velikost a jednotkové vektory. Počátek všech souřadných systémů je umístěn do bodu A .

Dáno: souřadnice ve směru os X , Y a Z , tj. $A [0, 0, 0]$ mm a $A^* [x, y, z] = [1, 1, 1]$ mm.

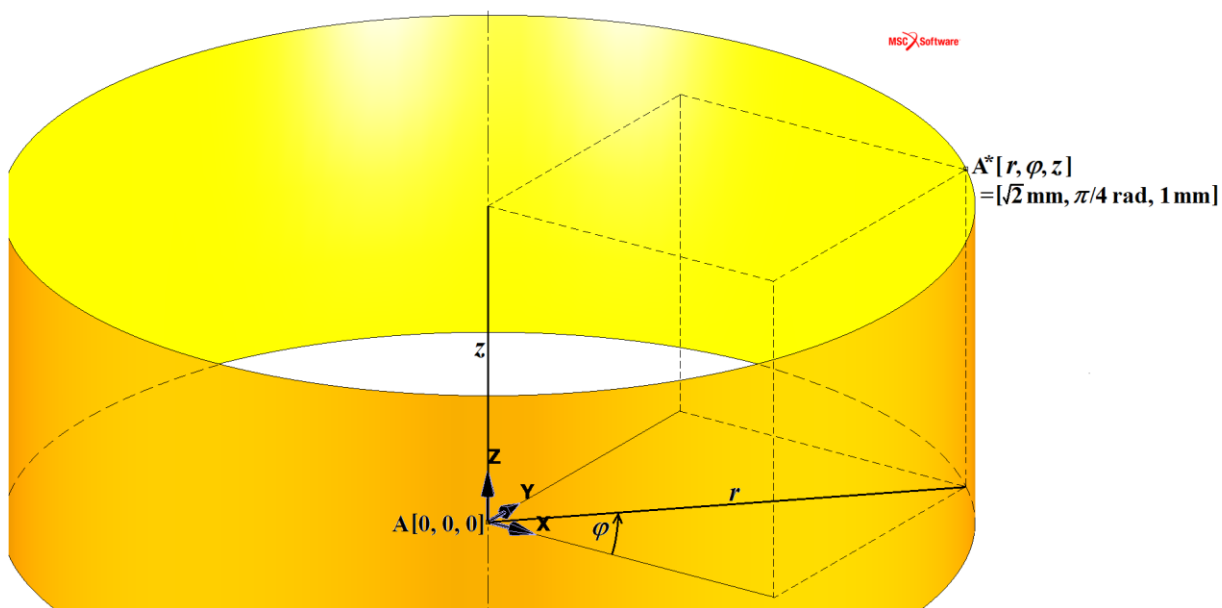


Obr. 21.17 Poloha bodu A (počáteční, nedeformovaný stav tělesa), A^* (konečný, deformovaný stav tělesa) v kartézském souřadném systému.

Souřadnice bodu A , který je v počátku souřadného systému, jsou známy ze zadání, viz také Obr. 21.17. Zároveň také platí v cylindrickém souřadném systému, pro bod počátku souřadného systému $A [r, \varphi, z] = [0 \text{ mm}, 0 \text{ rad}, 0 \text{ mm}]$. Podobně, také ve sférických souřadnicích $A [\rho, \varphi, \psi] = [0 \text{ mm}, 0 \text{ rad}, 0 \text{ rad}]$.

Bod A^* , který v této úloze popisuje deformovaný stav tělesa, tj. změnu souřadnice bodu A po přemístění vlivem zatížení, má známé souřadnice ze zadání, tj. $A^* [x, y, z] = [1, 1, 1]$ mm, viz Obr. 21.17.

Pro stanovení polohy bodu A^* , vyjádřenou v cylindrických souřadnicích s počátkem souřadného systému v bodu A , platí dle Tab. 21.1, $A^* [r, \varphi, z] = [\sqrt{x^2 + y^2}, \text{atan}\left(\frac{y}{x}\right), z]$, tj. $A^* [\sqrt{1^2 + 1^2}, \text{atan}\left(\frac{1}{1}\right), 1] = [\sqrt{2} \text{ mm}, \frac{\pi}{4} \text{ rad}, 1 \text{ mm}]$, viz Obr. 21.18.

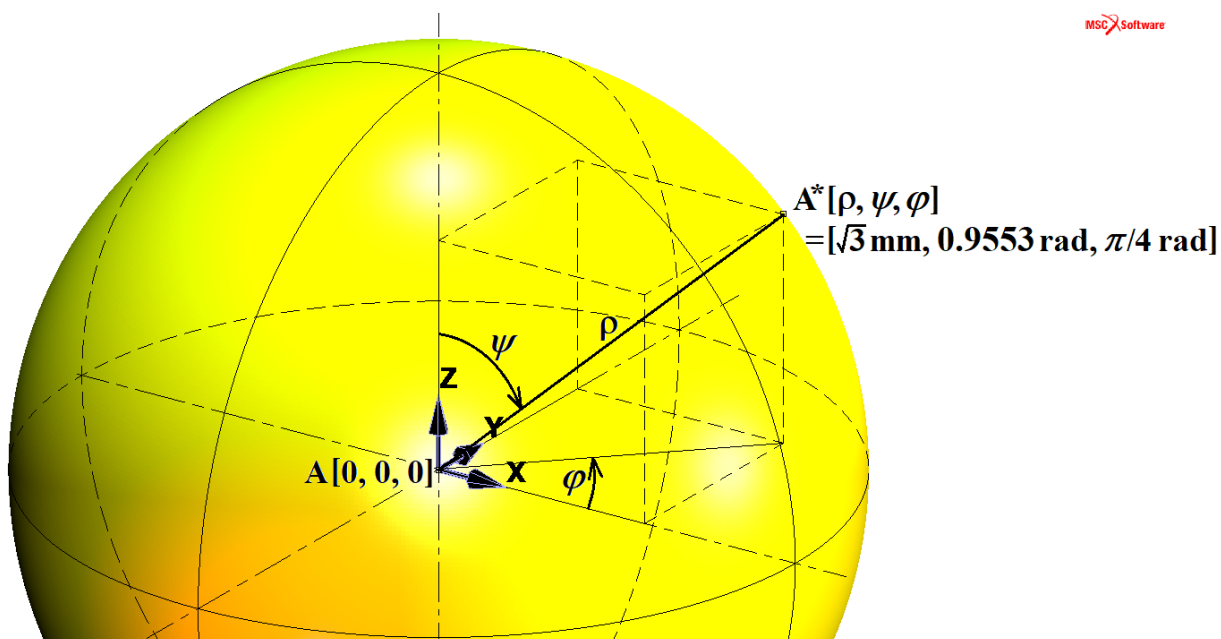


Obr. 21.18 Poloha bodu A (počáteční, nedeformovaný stav tělesa), A^* (konečný, deformovaný stav tělesa) v cylindrickém souřadném systému.

Pro stanovení polohy bodu A^* , vyjádřenou ve sférických souřadnicích s počátkem souřadného systému v bodu A , platí dle Tab. 21.1,

$$A^* [\rho, \psi, \varphi] = [\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \operatorname{atan}\left(\frac{r}{z}\right), \operatorname{atan}\left(\frac{y}{x}\right)], \text{ tj.}$$

$$A^* [\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}, \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{2}}{1}\right), \frac{\pi}{4}] = [\sqrt{3} \text{ mm}, \approx 0.9553 \text{ rad}, \frac{\pi}{4} \text{ rad}], \text{ viz Obr. 21.19.}$$



Obr. 21.19 Poloha bodu A (počáteční, nedeformovaný stav tělesa), A^* (konečný, deformovaný stav tělesa) ve sférickém souřadném systému.

Polohový vektor $\{r\}$, tj. vektor popisující polohu bodu A je nulovým vektorem v kartézském, cylindrickém i sférickém souřadném systému. Platí tedy $\{r\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm a jeho velikost je $|r| = 0$ mm.

Polohový vektor $\{r^*\}$, který popisuje polohu bodu A^* , viz Obr. 21.17 až 21.19, je pro kartézský, cylindrický i sférický systém zapsán v Tab. 21.6, kde je také uvedena jeho velikost a jednotkový vektor.

Tab. 21.6 Řešení Příkladu 21.2.

Polohový vektor	Složky polohového vektoru v příslušném souřadném systému	Velikost $ r^* $	Jednotkový vektor příslušného souř. Systému $\{\hat{r}^*\} = \frac{1}{ r^* } \{r^*\}$
$\{r^*\}$	Kartézský $\begin{Bmatrix} r_x^* \\ r_y^* \\ r_z^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ mm.	$\sqrt{3}$ mm	$\begin{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$ mm
	Cylindrický $\begin{Bmatrix} r_r^* \\ r_\varphi^* \\ r_z^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r \\ 0 \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$ mm, r_r^* , r_φ^* a r_z^* jsou souřadnice ve směru poloměru válce r (tj. ve směru normály válce), ve směru tečny ke kružnici válce o poloměru r a ve směru osy válce souřadnice z . Viz také Tab. 21.2.		$\begin{Bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{Bmatrix}$ mm
	Sférický $\begin{Bmatrix} r_\rho^* \\ r_\psi^* \\ r_\varphi^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \rho \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm, kde r_ρ^* , r_ψ^* a r_φ^* jsou souřadnice ve směru poloměru ρ koule (tj. ve směru normály koule), souřadnice ve směru první tečny ke kouli o poloměru ρ a souřadnice ve směru druhé tečny ke kouli o poloměru ρ . Viz také Tab. 21.2.		$\begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm

Za zmínku stojí připomenutí, že velikost obecného vektoru, je nezávislá na volbě souřadného systému.

Příklad 21.3: Dokažte jednoduchým způsobem, že matice $[T_{\text{cylindrické,sférické}}]$ je inverzní k matici $[T_{\text{sférické,cylindrické}}]$, viz rovnice (21.13).

Dáno:

$$[T_{\text{sférické,cylindrické}}] = \begin{bmatrix} \sin \psi & 0 & \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [T_{\text{cylindrické,sférické}}] = \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix}.$$

Pokud je matice $[T_{\text{cylindrické,sférické}}]$ inverzní k matici $[T_{\text{sférické,cylindrické}}]$, pak musí platit, že

$$[T_{\text{cylindrické,sférické}}] \times [T_{\text{sférické,cylindrické}}] = [T_{\text{sférické,cylindrické}}] \times [T_{\text{cylindrické,sférické}}] = [I].$$

Tedy

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos \psi & -\sin \psi & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sin \psi & 0 & \cos \psi \\ \cos \psi & 0 & -\sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \cos^2 \psi + \sin^2 \psi + 0 \times 0 & 0 \sin \psi + 0 \cos \psi + 0 \times 1 & \sin \psi \cos \psi - \sin \psi \cos \psi - 0 \times 0 \\ 0 \sin \psi + 0 \cos \psi + 1 \times 0 & 0 \times 0 + 0 \times 0 + 1 \times 1 & 0 \cos \psi - 0 \sin \psi + 1 \times 0 \\ \cos \psi \sin \psi - \sin \psi \cos \psi + 0 \times 0 & 0 \cos \psi - 0 \sin \psi + 0 \times 1 & \cos^2 \psi + \sin^2 \psi + 0 \times 0 \end{bmatrix} \\ & = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Při řešení bylo použito známého vztahu $\cos^2 \psi + \sin^2 \psi = 1$.⁴⁷

Protože součin výše uvedených matic je jednotková matice $[I]$, tak výše uvedené matice jsou vzájemně inverzní.

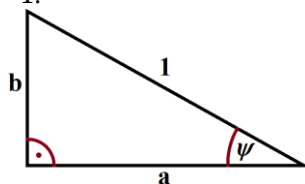
Příklad 21.4: V software MSC.MARC/MENTAT, viz [12] až [15], se seznámte se základy tvorby pomocné mřížky pro zadávání souřadnic entit počítačovou myší. Konkrétně se zaměřte na kartézský a sférický souřadný systém.

Dáno: instalace sw MSC.MARC/MENTAT.

Příklad je řešen v sw MSC.MARC/MENTAT 2019, nicméně, pro starší/novější verze je řešení stejné nebo podobné.

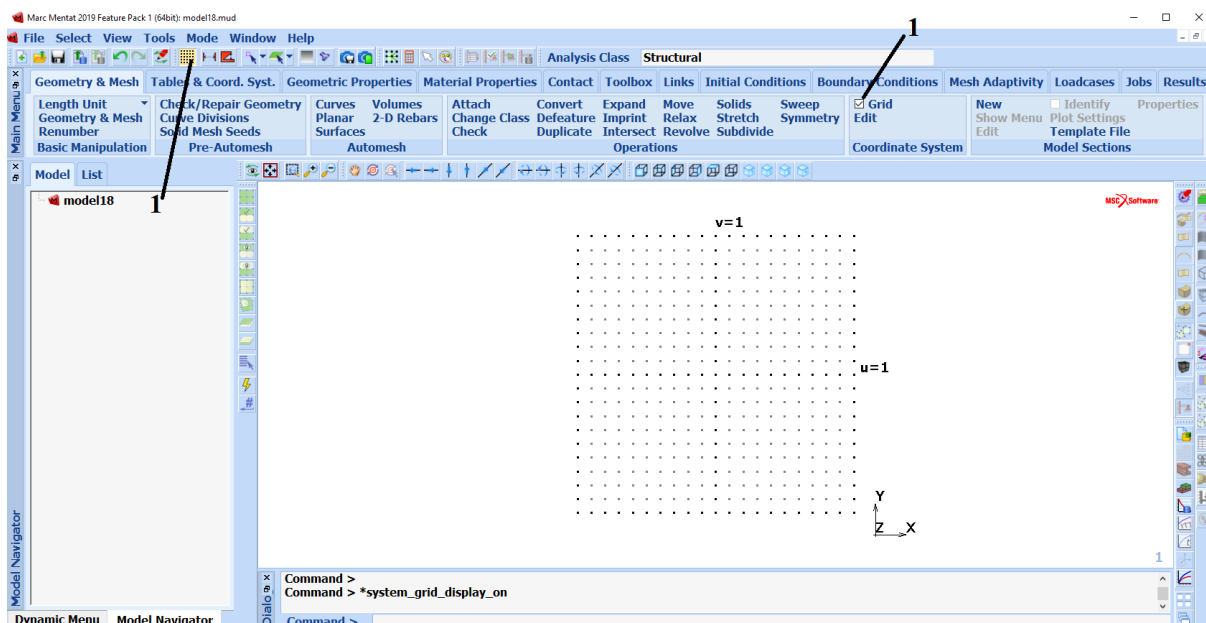
Po spuštění sw MCS.MENTAT, je často vhodné zapnutí nebo vypnutí zobrazení pomocné mřížky v kartézském souřadném systému. To lze provést pomocí ikon, tj. existují dvě možnosti zviditelnění, viz Obr. 21.20. Pomocné body slouží pro zadávání entit (CAD⁴⁸, MKP⁴⁹) kliknutím pomocí myši (zjednodušení práce uživateli).

⁴⁷ Důkaz lze odvodit z Pythagorovy věty s přeponou jednotkové délky, viz obrázek, kde platí $\cos \psi = a/1 = a$, $\sin \psi = b/1 = b$ a samozřejmě $a^2 + b^2 = 1$.



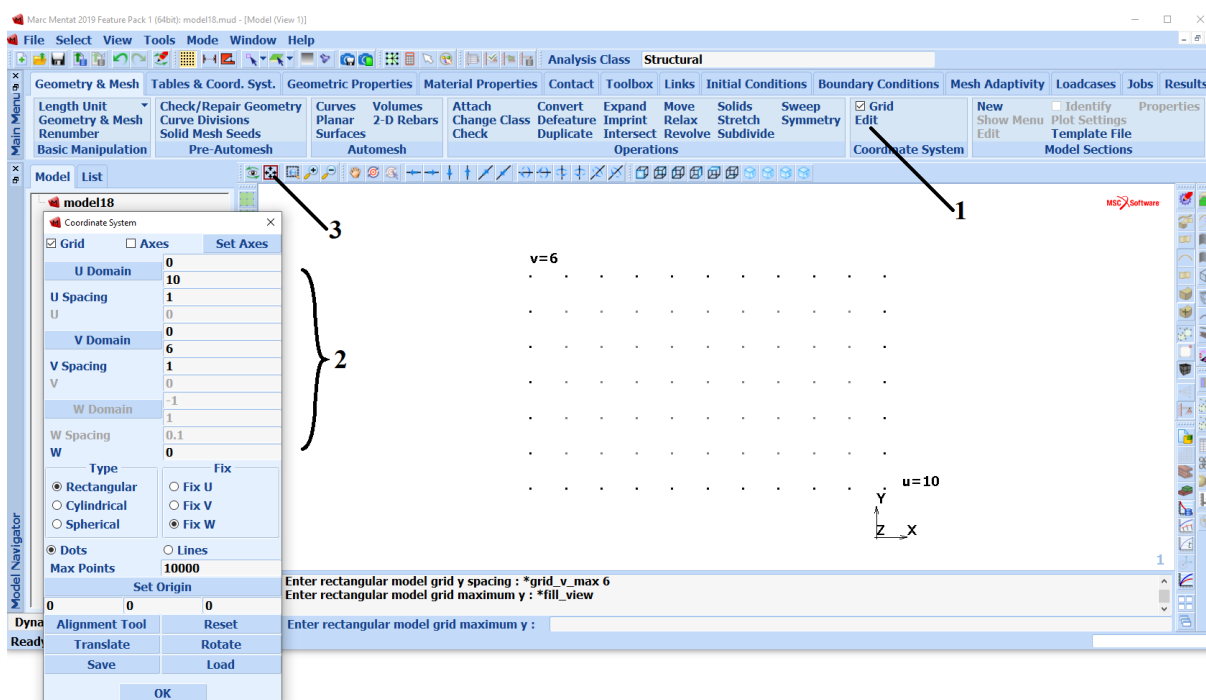
⁴⁸ CAD, tj. **Computer-Aided Design** – 2D/3D počítačové projektování (kreslení a vizualizace částí a konstrukcí pomocí pokročilých grafických programů).

⁴⁹ MKP, tj. **metoda konečných prvků** – je numerická metoda sloužící k virtuální simulaci/výpočtům širokého spektra úloh matematiky a fyziky či techniky. Její princip spočívá v diskretizaci kontinua do konečného počtu prvků.



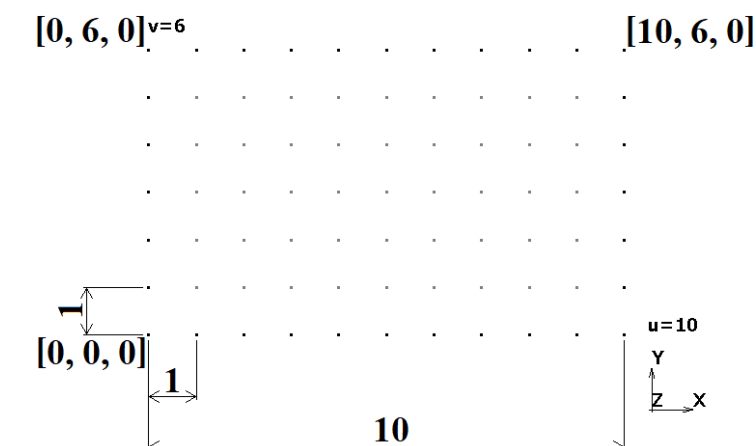
Obr. 21.20 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Pomocné body lze nastavit dle potřeby uživatele, viz postup uvedený na Obr. 21.21.



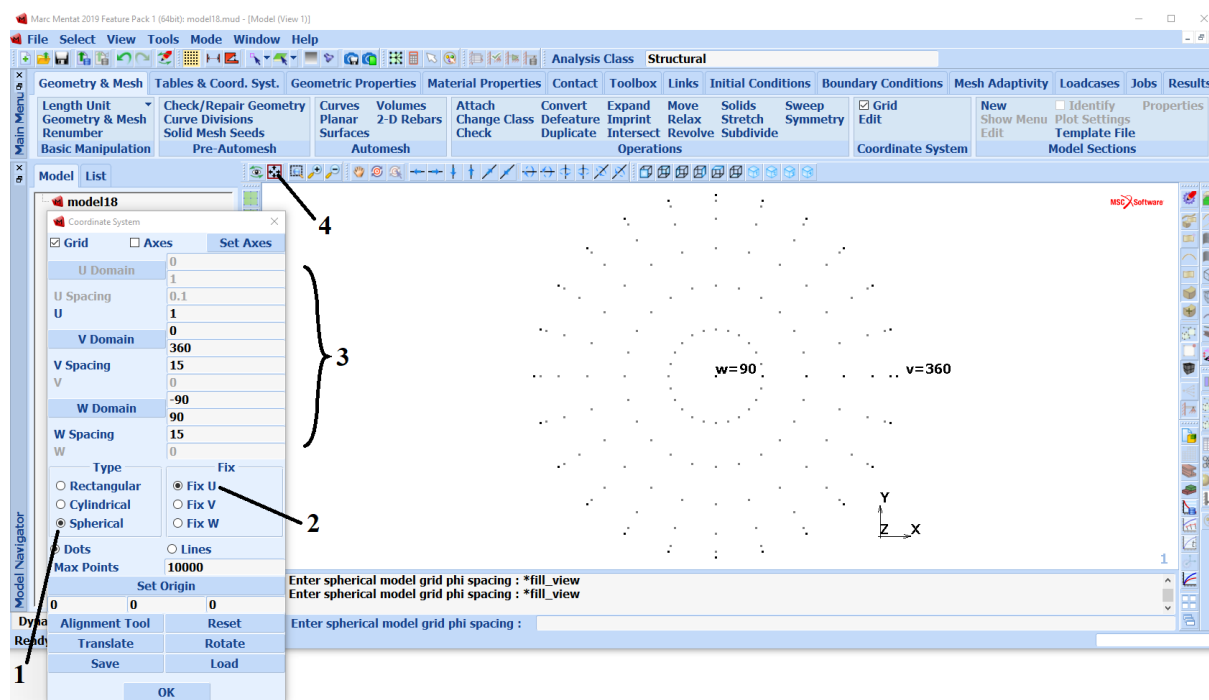
Obr. 21.21 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Vznikla tedy pomocná mřížka bodů s rozměry a parametry uvedenými na Obr. 21.22.



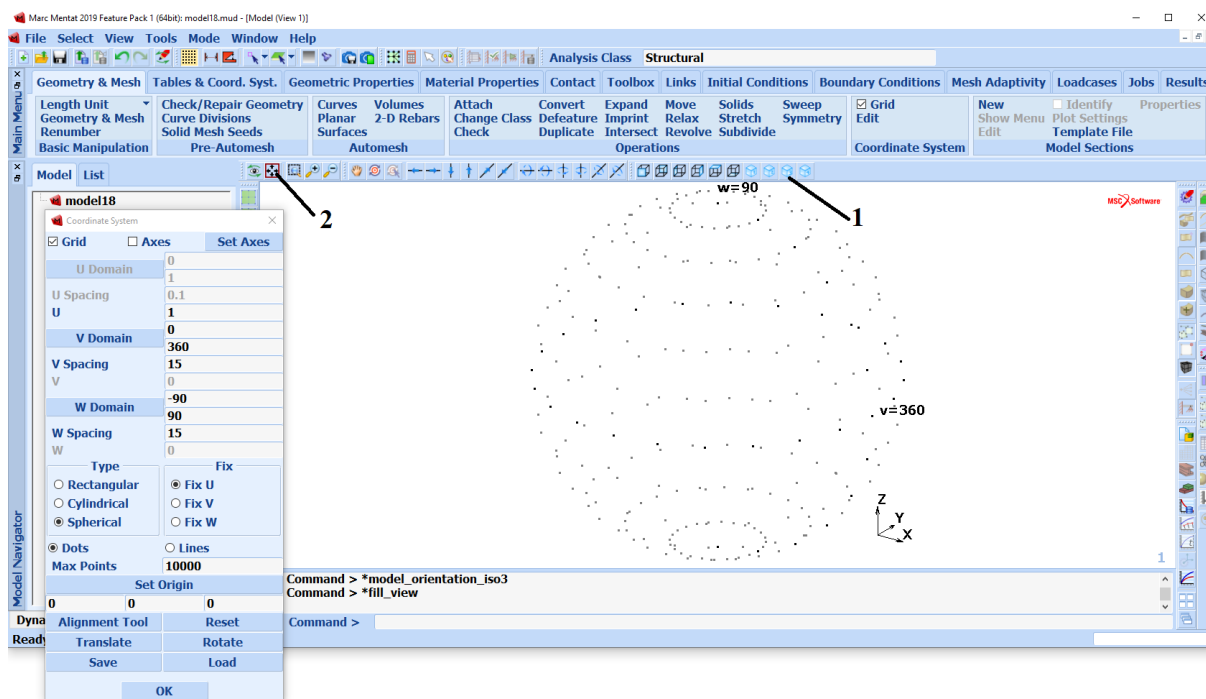
Obr. 21.22 Postup řešení a vysvětlení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Aktivně lze pracovat také i v dalších souřadných systémech. Například, na Obr. 21.23 je uvedena tvorba pomocné mřížky ve sférickém souřadném systému.

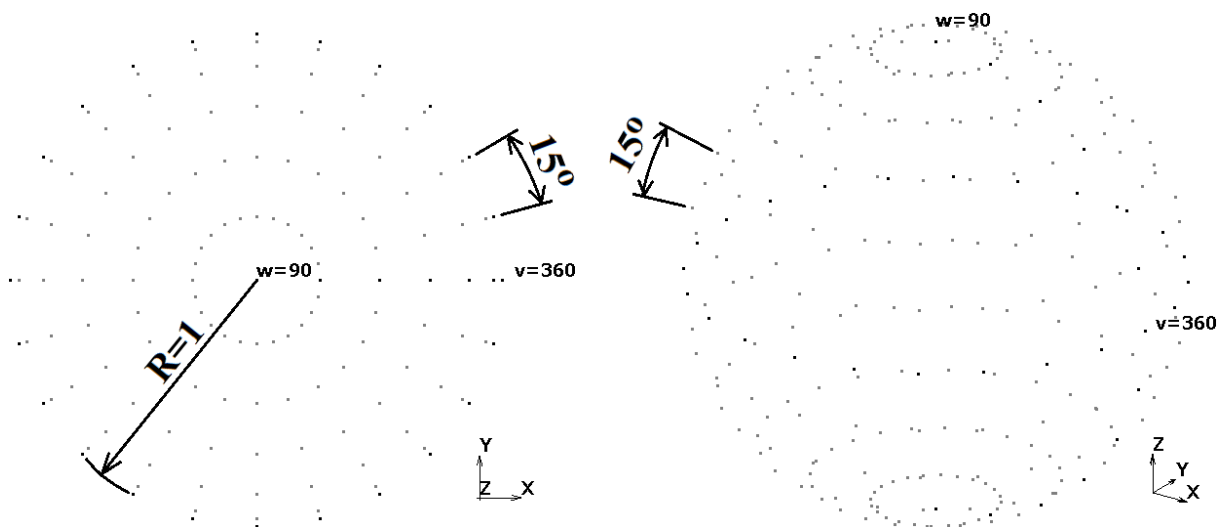


Obr. 21.23 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Vznikla tak sférická pomocná mřížka, jejíž prostorové znázornění je předvedeno na Obr. 21.24 a to s parametry uvedenými na Obr. 21.25.

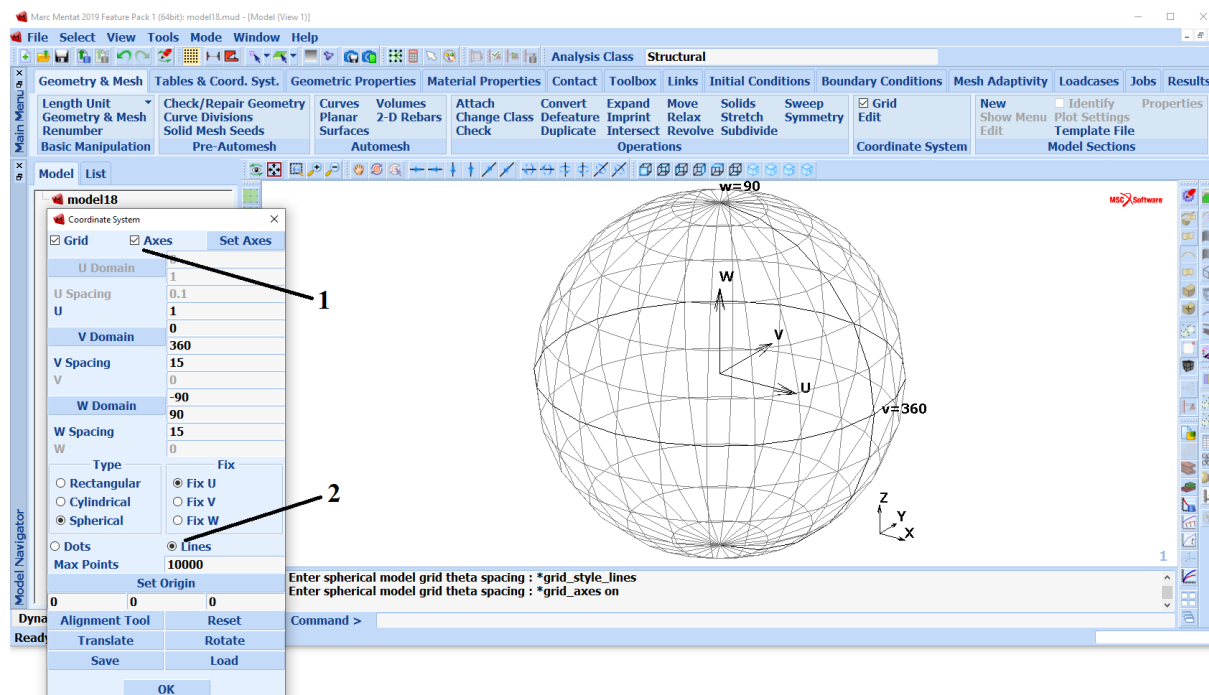


Obr. 21.24 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).



Obr. 21.25 Postup řešení a vysvětlení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Také je možné zobrazit střed souřadného systému a pomocnou mřížku vizualizovat také pomocí křivek, viz postup uvedený na Obr. 21.26.



Obr. 21.26 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

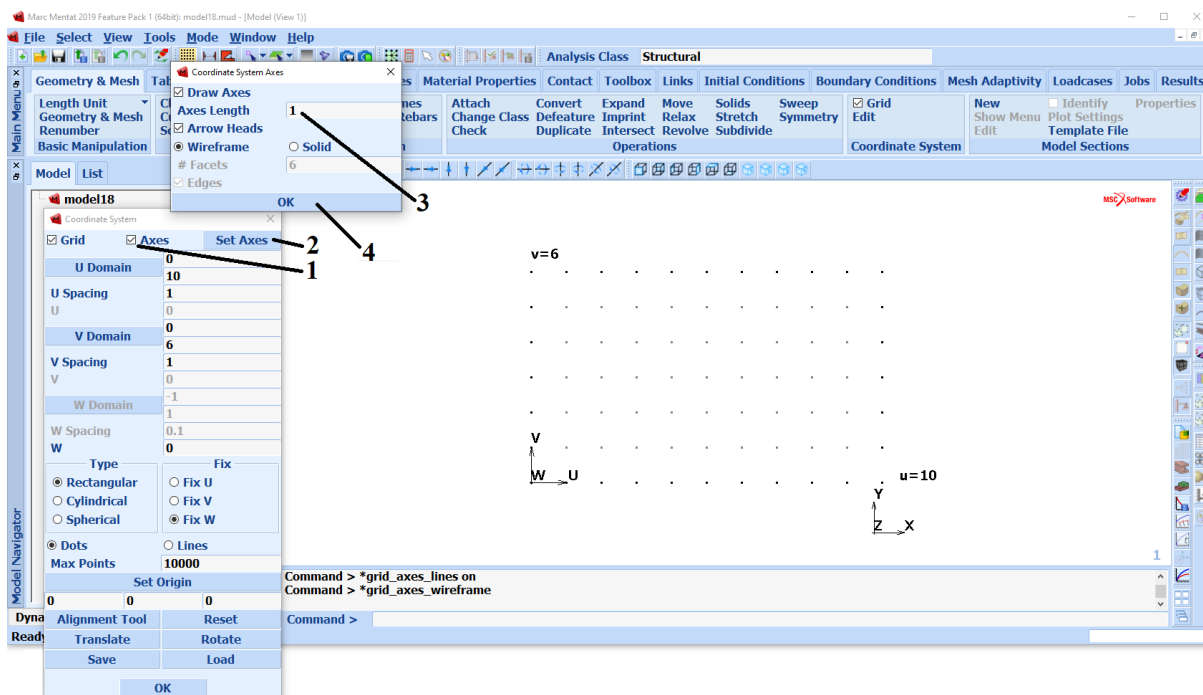
Zadávaní souřadnic pro tvorbu entit (tj. body křivek či souřadnice uzlů konečných prvků), lze pak provést přímo kliknutím namísto zadávání souřadnic pomocí klávesnice.

Příklad 21.5: V software MSC.MARC/MENTAT, viz [12] až [15], se pokuste natočit pomocnou mřížku a souřadný systém, pro zadávání souřadnic entit počítačovou myší či z klávesnice, o 45° kolem osy Z.

Dáno: instalace sw MSC.MARC/MENTAT.

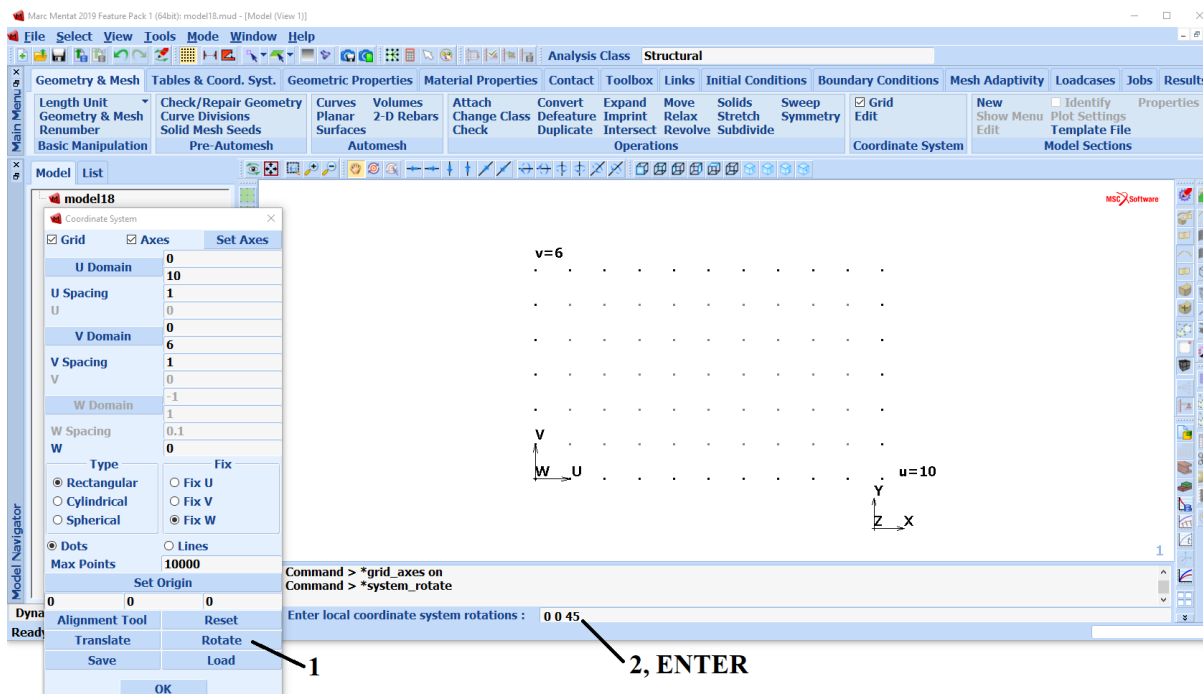
Tento příklad navazuje na řešení předchozího příkladu a vychází z Obr. 21.21 (tj. je již nadefinovaná pomocná mřížka pro zadávání entit pomocí myši).

Pro lepší pochopení úkolu, je vhodné aktivovat zviditelnění pracovního souřadného systému U, V, W, viz Obr. 21.27.

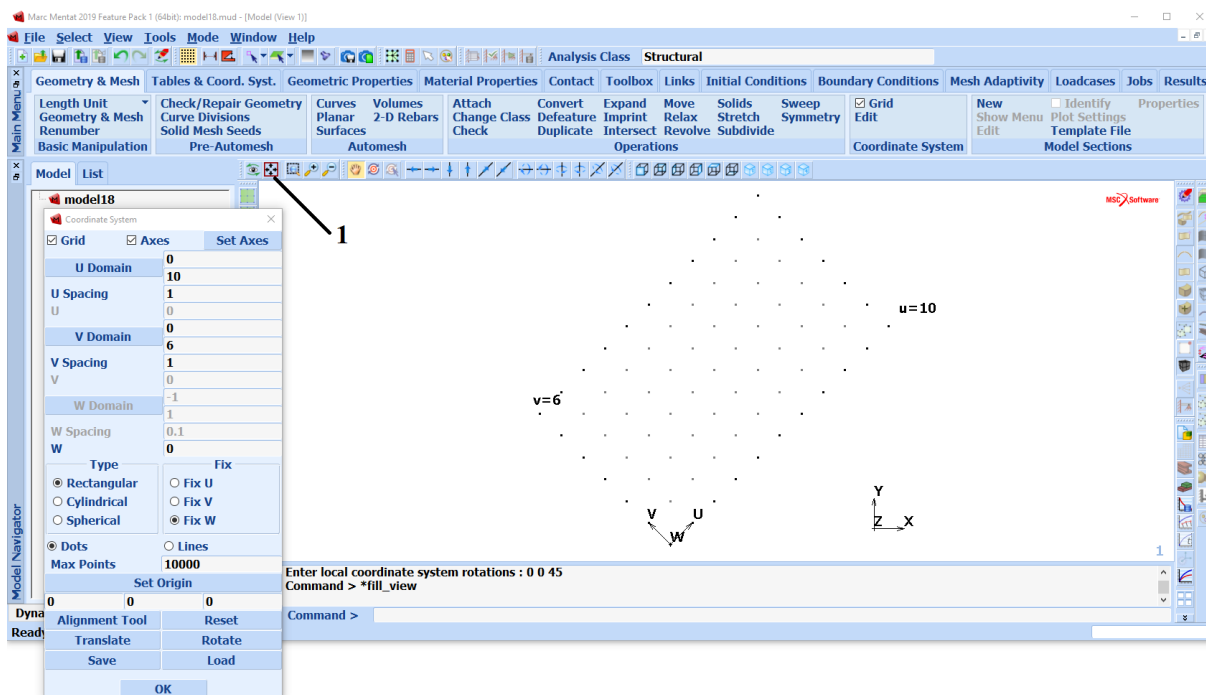


Obr. 21.27 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Ze zadání je zřejmé, že je třeba provést natočení pracovního souřadného systému o 45° kolem osy W (tj. zadání z klávesnice 0 0 45), viz Obr. 21.28 a 21.29.



Obr. 21.28 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).



Obr. 21.29 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Příklad 21.6: Transformujte vektor $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$ rotací každé osy X, Y a Z souřadného systému o úhel α . Proveďte také kontrolu správnosti řešení.

Dáno: $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$ mm, $\alpha = 45^\circ$.

Řešení je dané Tab. 21.4, kde $\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1\alpha_x}] \times [T_{2,1\alpha_y}] \times [T_{2,1\alpha_z}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$,
tj. $\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$. Ze zadání je také zřejmé, že $\alpha = \alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 45^\circ$.

Potom pro matici transformace $[T_{2,1}]$ platí

$$\begin{aligned} [T_{2,1}] &= [T_{2,1\alpha_x}] \times [T_{2,1\alpha_y}] \times [T_{2,1\alpha_z}] = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 & -0.146447 & 0.853553 \\ 0.5 & 0.853553 & -0.146447 \\ -0.707107 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

Transformovaná souřadnice

$$\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = [T_{2,1}] \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.146447 & 0.853553 \\ 0.5 & 0.853553 & -0.146447 \\ -0.707107 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.207107 \\ 1.207107 \\ 0.292893 \end{Bmatrix} \text{ mm.}$$

Protože oba souřadné systémy mají stejný počátek, tj. došlo jen k pootočení os souřadného systému o úhel α , pak by měly mít vektory $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}$ a $\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix}$ stejnou délku. Pro ověření správnosti získaných výsledků tedy platí dle rovnice (21.2), $\left| \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} \right| = \left| \begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} \right| = \sqrt{3} \text{ mm.}$

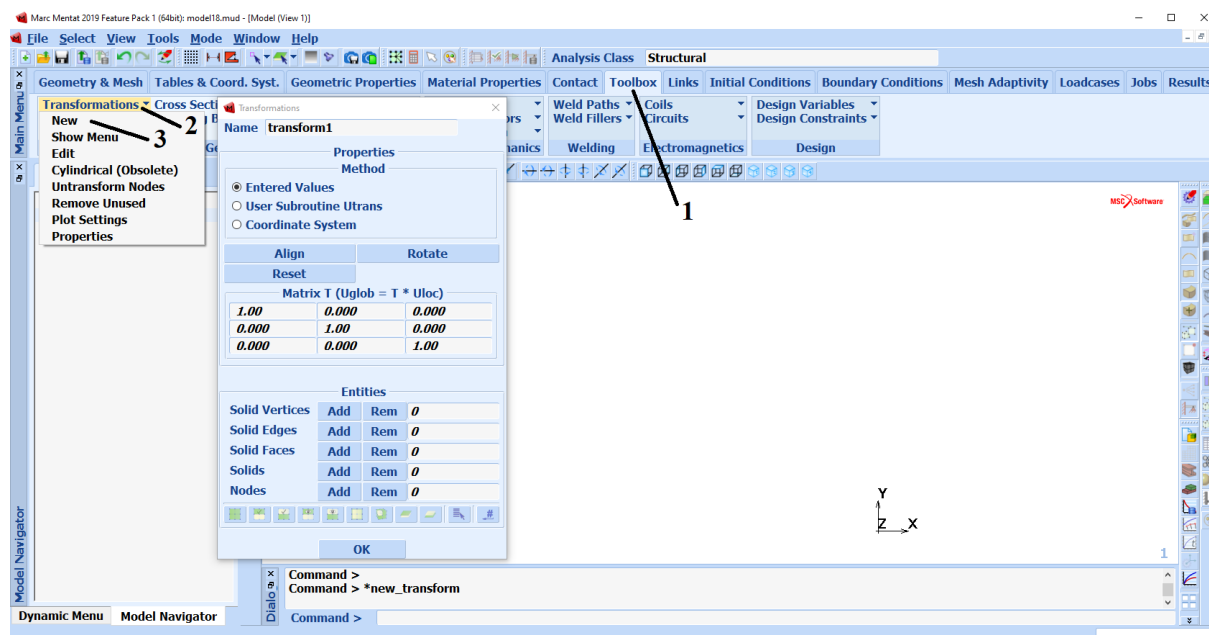
Další kontrolu správnosti lze provést testem na splnění podmínky ortogonality, tj. např. $[T_{2,1}] \times [T_{2,1}]^T = [I]$, respektive determinant matice $[T_{2,1}]$ musí být nulový.

Stejnou velikost má také vektor z Příkladu 21.2. Matice $[T_{2,1}]$ je vytvořena také v následujícím Příkladu 21.7.

Příklad 21.7: V software MSC.MARC/MENTAT, viz [12] až [15], definujte transformaci souřadného systému, a to rotací souřadného systému o 45° kolem osy X, Y a Z.

Dáno: instalace sw MSC.MARC/MENTAT.

Pro praktické používání sw MSC.MARC/MENTAT a také pro ilustraci transformování souřadných systémů, je vhodné definovat vlastní uživatelskou transformaci (název „transform1“), viz Obr. 21.30. Takovou transformaci lze s výhodou používat při tvorbě entit potřebných pro řešení pomocí metody konečných prvků či zadávání okrajových a počátečních podmínek.

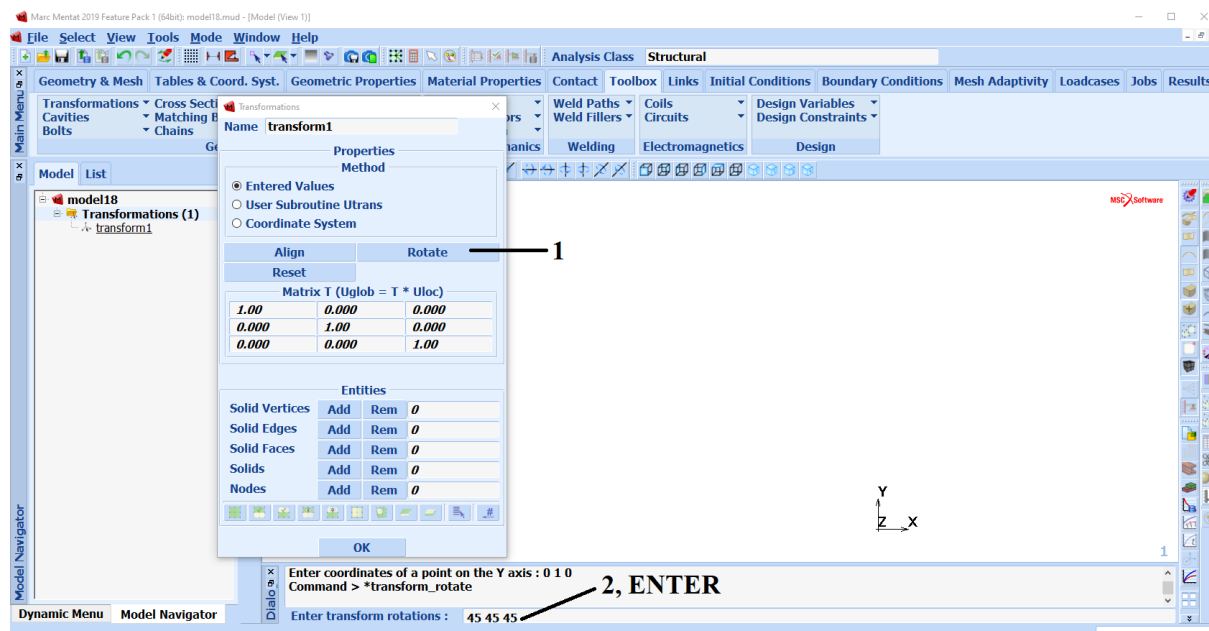


Obr. 21.30 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

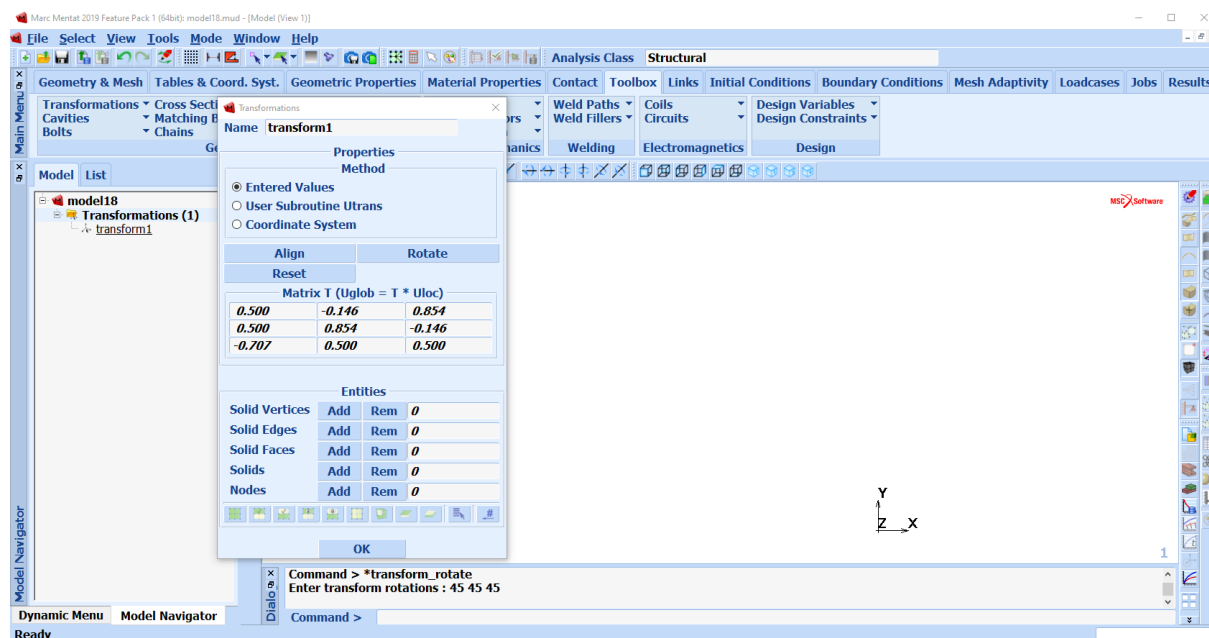
Na Obr. 21.30 je také vidět základní (default) definovaná matice transformace

$$\begin{bmatrix} 1.00 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 1.00 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 1.00 \end{bmatrix}.$$

Je třeba definovat transformaci natočením každé souřadné osy o 45°, dle Obr. 21.31 a Obr. 21.32, tj. zadáním z klávesnice 45 45 45.



Obr. 21.31 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).



Obr. 21.32 Postup řešení (sw MSC.MARC/MENTAT 2019).

Z výsledků je také jasně patrná změna matice transformace
$$\begin{bmatrix} 0.500 & -0.146 & 0.854 \\ 0.500 & 0.854 & -0.146 \\ -0.707 & 0.500 & 0.500 \end{bmatrix},$$
 viz Obr. 21.32, která je v souladu s výsledky řešení Příkladu 21.6.

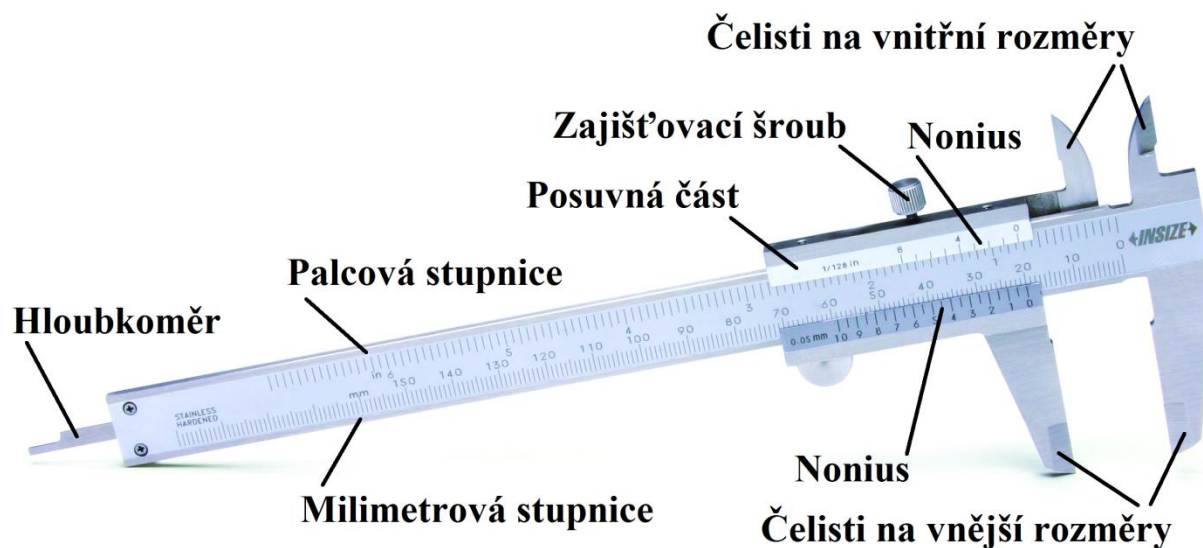
Příklad 21.8: Naučte se pracovat s posuvným měřítkem⁵⁰,

Dáno: posuvné měřítko a součást nebo tkáň vhodná k měření.

Posuvné měřítko se používá pro měření délkových rozměrů. Záznam měření může být digitalizován (dražší verze), viz Obr. 21.33, nebo být analogový (tj. je nutné jej odečíst, levnější verze), viz Obr. 21.34.



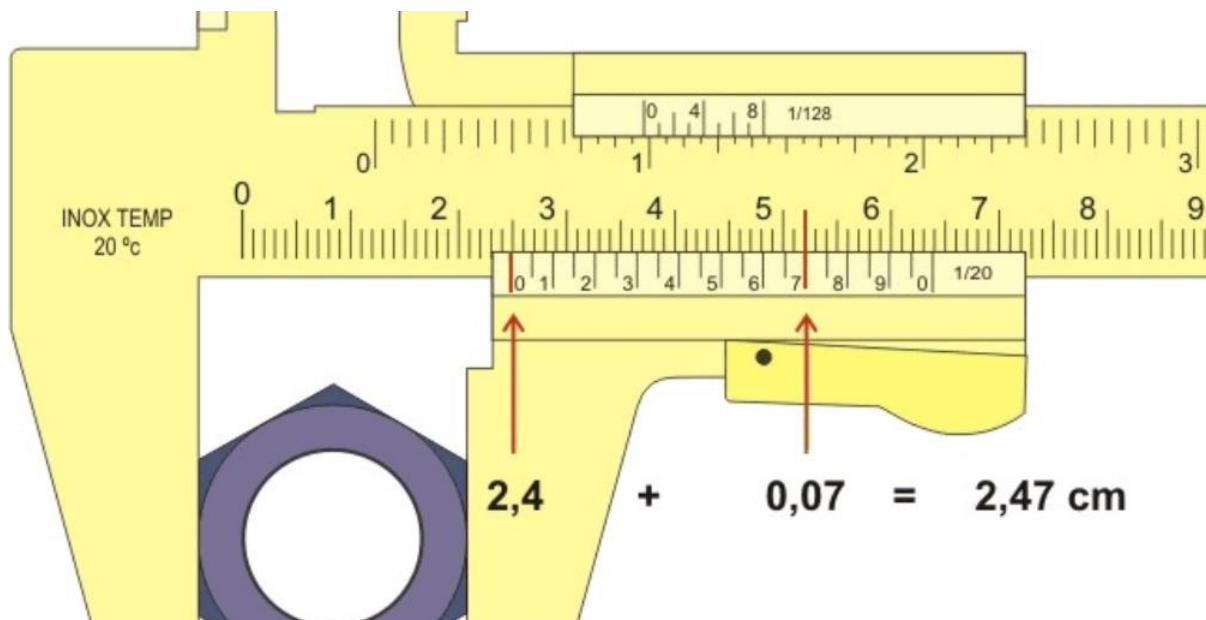
Obr. 21.33 Digitální posuvné měřítko; zdroj <https://www.tm-technik.cz/digitalni-posuvne-meritko/>.



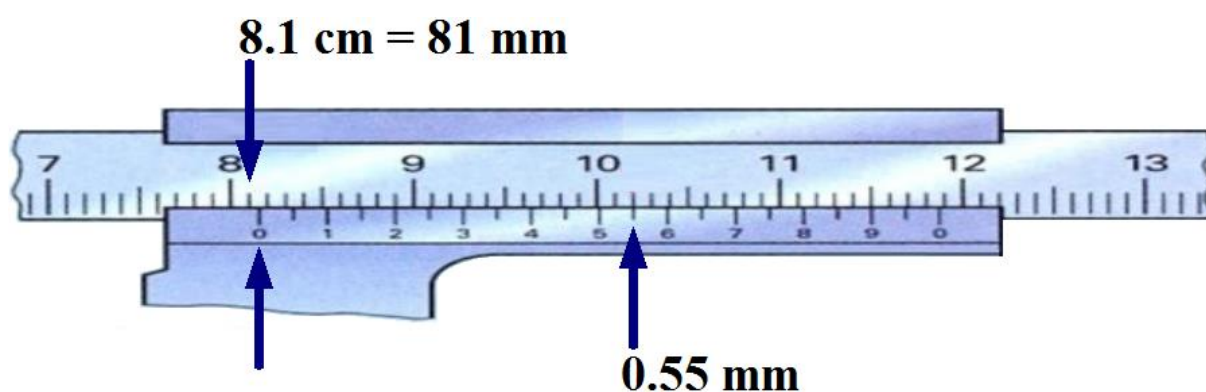
Obr. 21.34 Mechanické posuvné měřítko

⁵⁰ slangově **posuvka** nebo **šuplera** (z německého schublehre nebo schieblehre).

Praktické měření mechanickým posuvným měřítkem (tj. měření porovnáním) je vysvětleno např. <https://www.youtube.com/watch?v=8whptykvsuo> nebo https://cs.wikipedia.org/wiki/Posuvn%C3%A9_m%C4%9B%C5%99%C3%ADtko#/media/Soubor:Using_the_caliper_new.gif či <https://slideplayer.cz/slide/13264010/>, viz [16] až [19], a také na Obr. 21.35 a 21.36.



Obr. 21.35 Příklad odečítání hodnoty z posuvného měřítka; zdroj https://cs.wikipedia.org/wiki/Posuvn%C3%A9_m%C4%9B%C5%99%C3%ADtko#/media/S.

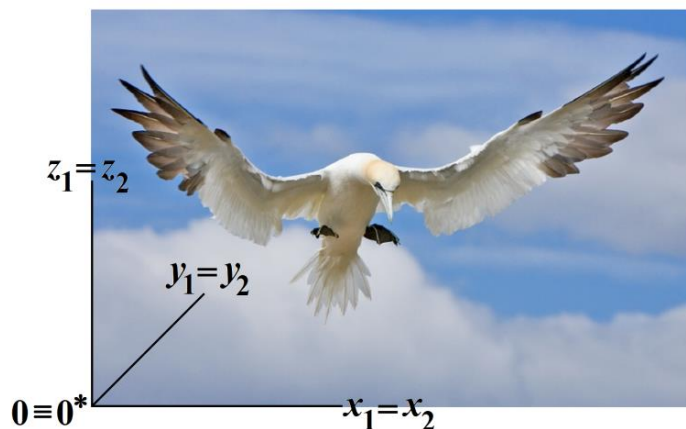


Obr. 21.36 Příklad odečítání hodnoty z posuvného měřítka 81.55 mm.

21.6 Otázky k pochopení látky

1. Jak se počítá velikost vektoru?
2. Jak je definován jednotkový vektor?
3. Platí pro složky jednotkového vektoru $\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2 < 1$?
4. Jak se definuje vektor posunutí?
5. Co jsou směrové kosiny?

6. Jaké znáte souřadné systémy?
7. Jak byste definovali obecný pojem mechanické deformace?
8. Jak je definována ortogonální matice.
9. Je determinant ortogonální matice roven 0?
10. Jaké budou souřadnice v souřadných systémech, které jsou totožné, viz Obr. 21.37.

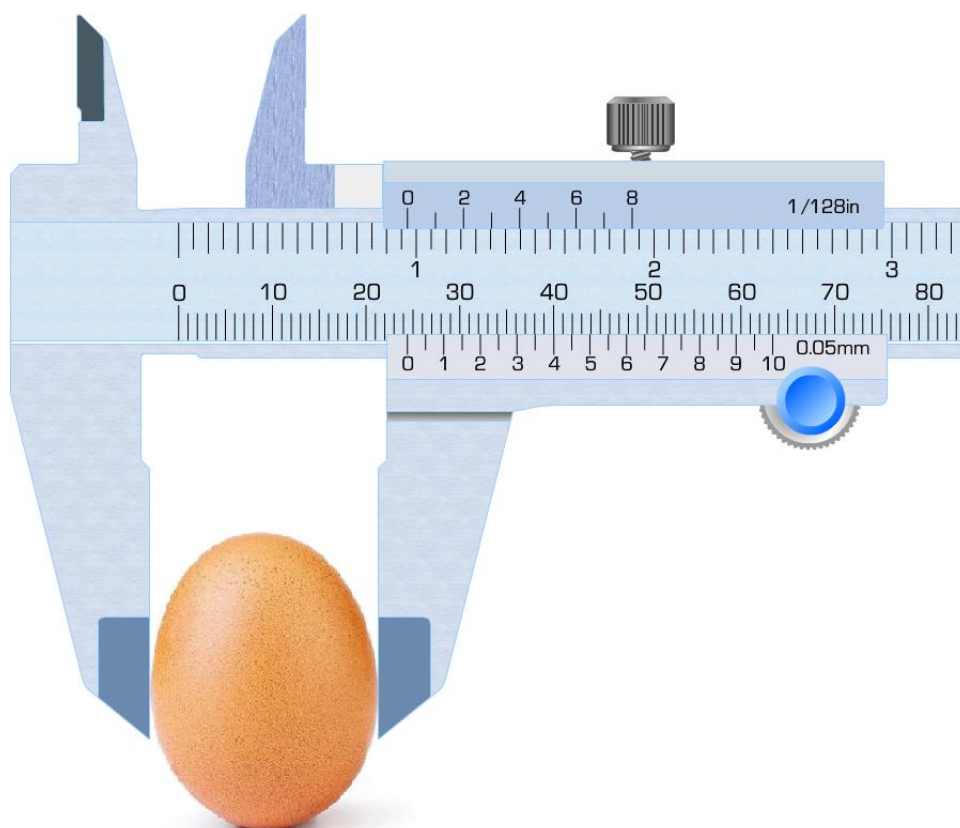


Obr. 21.37 Totožné souřadné systémy.

11. Transformujte vektor $\begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm, pootočením souřadného systému o úhel $\alpha = 90^\circ$ kolem souřadné osy Z.

Řešení: $\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ & 0 \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix}$ mm.

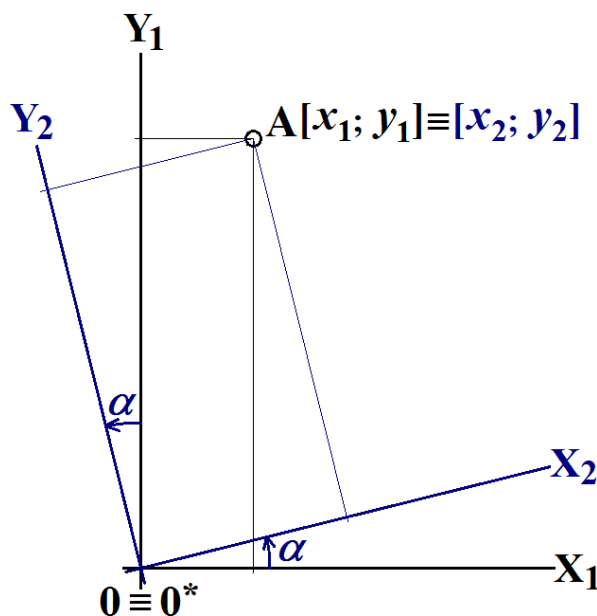
12. Umíte měřit posuvným měřítkem? Jaký je rozměr vajíčka v milimetrech, viz Obr. 21.38?



Obr. 21.38 Měření vajíčka posuvným měřítkem.

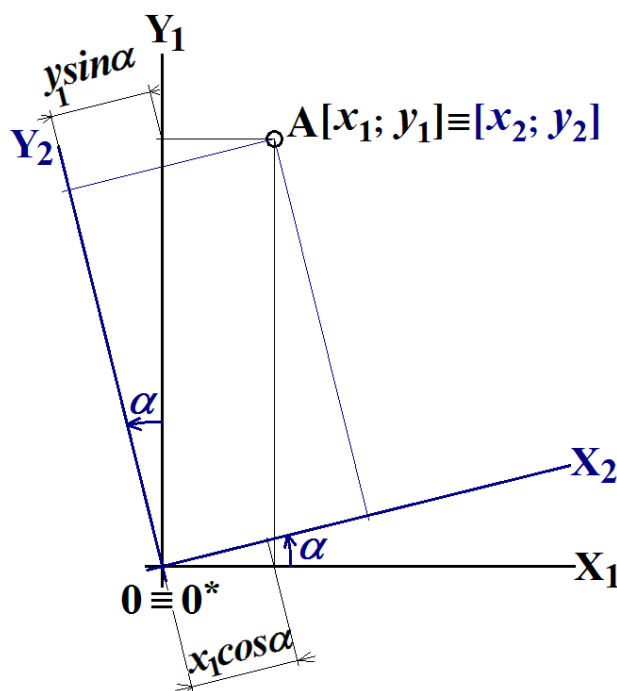
21.7 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Dokážete odvodit rovnice rotace souřadného systému v rovině (natočení o úhel α kolem osy Z, viz Obr. 21.39)?



Obr. 21.39 Rotace souřadného systému v rovině.

Odpověď: Řešení, které je založeno na elementárních znalostech pravoúhlého trojúhelníku (tj. znalosti ze základní školy), je naznačeno pro souřadnici x_2 na Obr. 21.40. Potom platí $x_2 = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha$, $y_2 = y_1 \cos \alpha - x_1 \sin \alpha$.⁵¹ V případě, že to nezvládnete, shlédněte video v otázce číslo 6 (dále v textu).



Obr. 21.40 Rotace souřadného systému v rovině (naznačení odvození).

2. Platí, že polohový vektor bodu „A“ z předchozí úlohy nemá stejnou velikost v souřadných systémech X_1, Y_1 a X_2, Y_2 ?
3. Vtip o určování polohy:
„Víte, co znamená GPS? Gde Proboha Sem?“
4. Shlédněte video týkající se odvození polárního souřadného systému, <https://www.youtube.com/watch?v=ITlHnHUBFqw>, viz [20].
5. Shlédněte video o souřadném systému obráběcího stroje NLX 2500, <https://www.youtube.com/watch?v=DTNOftDDUGE>, viz [21].
6. Můžete shlédnout video o transformaci souřadných systémů v angličtině, <https://www.youtube.com/watch?v=afIUNxcKtPA>, viz [22].
7. Vtip:

⁵¹ Pro kontrolu lze také použít rovnice z Tab. 21.4, kde $\begin{Bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha_z) & -\sin(-\alpha_z) & 0 \\ \sin(-\alpha_z) & \cos(-\alpha_z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} =$
 $= \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{Bmatrix}.$

„Víte, co je to polární medvěd? Kartézský medvěd po transformaci souřadnic.“

21.8 Reference ke kapitole 21

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Frydrýšek, K.: *Basic Strength and Elasticity of Materials*, Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, VSB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, Czech Republic, 2016, pp. 1-264.
- [3] Bouchardovy uzly – WikiSkripta, https://www.wikiskripta.eu/w/Bouchardovy_uzly.
- [4] Když krása bolí: Co vše jsou ženy ochotny udělat pro krásu? - Žena.cz - magazín pro ženy (aktualne.cz), <https://zena.aktualne.cz/volny-cas/kdyz-krasa-boli-aneb-co-vse-jsou-zeny-ochotny-udel/r~i:gallery:31647/r~i:photo:574230/>.
- [5] I-35W Mississippi River bridge – Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/I-35W_Mississippi_River_bridge#/media/File:I35_Bridge_Collapse_4crop.jpg.
- [6] Frydrýšek, K., Šír, M., Pleva, L. Strength Analyses of Screws for Femoral Neck Fractures. *J. Med. Biol. Eng.* 38, 816–834 (2018). <https://doi.org/10.1007/s40846-018-0378-x>.
- [7] All in a spin, ESO, <https://www.eso.org/public/images/potw1631a/>.
- [8] atan2 – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Arctg2>.
- [9] Špírková, I.: *Historie matic*, diplomová práce, Západočeská univerzita v Plzni, Fakulta pedagogická, 2013, pp. 1-66, <https://naos-be.zcu.cz/server/api/core/bitstreams/a9a4e160-e461-40a0-b52a-c72aa5a5cc66/content>.
- [10] Pravidlo pravé ruky – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Pravidlo_pravé_ruky.
- [11] Frydrýšek, K., Čepica, D., Halo, T., Stochastic loading of a sitting human, *Strojnický Časopis*, ISSN: 00392472, Volume 69, Issue 2, 2019, Pages 97-110.
- [12] Frydrýšek, K., *Praktikum software MSC.MARC/MENTAT – Část 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2009, pp. 1-461.
- [13] Frydrýšek, K., Fusek, M., Hrabec, J., *Praktikum software MSC.MARC/MENTAT. část 2*, 2010. ISBN 978-80-248-2211-2, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic 2010.
- [14] <https://www.mscsoftware.com/>.
- [15] <https://hexagon.com/products/marc>.
- [16] Odečítání na posuvném měřítku – created by CTECH s.r.o. (C) – YouTube <https://www.youtube.com/watch?v=8whptykvsuo>.
- [17] Posuvné měřítko – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Posuvn%C3%A9_m%C4%9B%C5%99%C3%ADtko#/media/Soubor:Using_the_caliper_new.gif.

- [18] Měření posuvným měřítkem - ppt (slideplayer.cz)
<https://slideplayer.cz/slide/13264010/>.
- [19] Metodika provozního měření posuvnými měřidly, MPM 1.1.1/01/17, Česká metrologická společnost, z.s. Praha, 2017.
- [20] FYZIKA – MECHANIKA 1-2. LEKCE: Polární souřadný systém – Petr Dvořák
LearnTube.cz – YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=ITlHnHUBFqw>.
- [21] Souřadný systém CNC stroje NLX 2500 - YouTube
<https://www.youtube.com/watch?v=DTNOFtDDUGE>.
- [22] Coordinate Transformation – YouTube
<https://www.youtube.com/watch?v=afIUNxcKtPA>.

22. KONCEPCE POMĚRNÝCH DEFORMACÍ SE ZAMĚŘENÍM NA JEDNOOSÉ NAMÁHÁNÍ

V této kapitole jsou stručně vysvětleny základní pojmy týkající se popisu poměrných deformací těles, které navazují na poznatky z předchozí kapitoly a z předchozího dílu této knihy, viz [1]. Definování pojmu poměrná deformace je stěžejní pro vyšetřování materiálových charakteristik, vyšetřování deformačně-napětových a pohybových stavů v mechanice či biomechanice. Kapitola se zaměřuje na jednoosé namáhání či jednoosou deformaci, které je nejjednodušší a je základem pro rozšíření na prostorové namáhání či prostorové deformace. Pro hlubší studium je však nutné studovat knihy týkající se mechaniky ☺.

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek.

22.1 Úvod a definice pojmu poměrných deformací

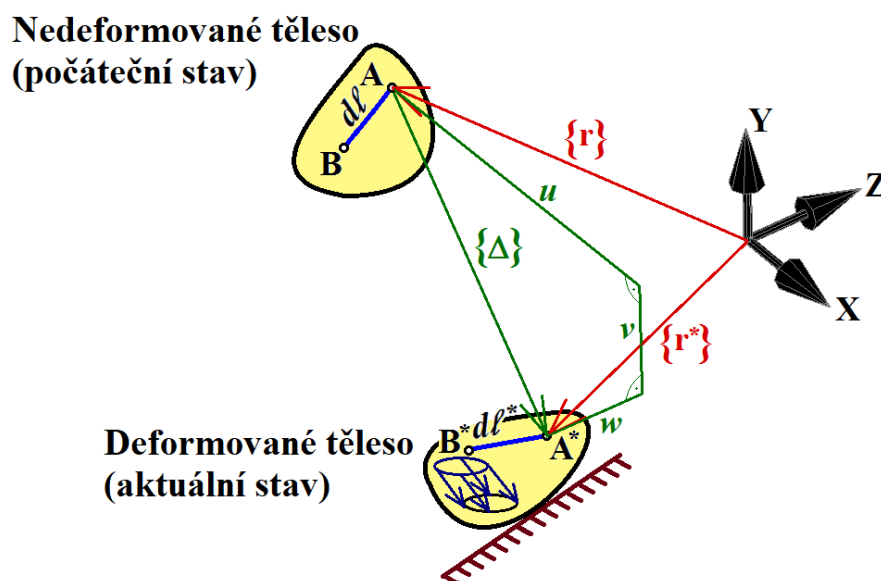
Z předchozí kapitoly knihy je známý obecný pojem deformace a posunutí. k tomu je však ještě nutné vysvětlit také pojem poměrné deformace.

Vlivem různorodých okrajových a počátečních podmínek se reálná tělesa deformují. Nabízí se tedy následující úvaha. Například, je průhyb 10 cm přijatelný nebo ne? Pokud je takový průhyb u dostatečně dlouhého mostu, tak je takový průhyb přijatelný. Ale pokud je takový průhyb u zatíženého hřídele v převodovce automobilu, tak lze s jistotou tvrdit, že převodovka je zničená a automobil nepojízdný ☹. Z uvedeného vyplývá, že pro další pochopení mechaniky/biomechaniky je nutné vztahovat průhyby, či obecně posunutí, na nějakou referenční délku a získat tak **poměrné deformace** $\epsilon^{52}/1$, viz následující text. Poměrné deformace jsou také někdy nazývány jako **relativní posunutí**, **relativní deformace** nebo **intenzita posunutí** či **intenzita deformací**.

V této knize, podobně jako u většiny úloh mechaniky/biomechaniky, se předpokládá, že těleso je spojitě diferencovatelné, tj. existuje jednoznačný vztah mezi nedeformovaným a deformovaným stavem tělesa (tj. nevznikají v tělese v poli posuvů diskontinuity). To je základní předpoklad pro definici poměrných deformací.

Koncept poměrných deformací má fundamentální význam v mechanice deformovatelných těles. Mnozí vědci a s nimi i autor této kapitoly tvrdí, že **definice poměrných deformací je jádrem mechaniky/biomechaniky kontinua**. Existuje mnoho definic poměrných deformací a teoreticky lze poměrné deformace vyjádřit nekonečně mnoha způsoby. Nicméně, v této knize jsou uvedeny jen ty „nejpopulárnější“. **Poměrné deformace lze tedy nejjednodušeji definovat jako podíl posunutí a referenční délky**. Tato definice bude v dalším textu ještě „upřesněna“ a je založena na různorodém způsobu porovnání vzdáleností mezi body A, B a A*, B*, tj. na porovnání délek d_l nedeformovaného tělesa a délek d_l^* deformovaného tělesa, viz Obr. 22.1.

⁵² Anglicky **strain**.



Obr. 22.1 Obecná definice změny rozměrů na tělese (body A, B se přemístily do bodů A^*, B^*).

S výše uvedeným souvisí také dva přístupy popisu poměrných deformací v mechanice/biomechanice.

Existuje tedy **Lagrangeův⁵³ přístup k popisu poměrných deformací** (tj. poměrné deformace a další související veličiny jako např. mechanické napětí) jsou **vztaženy k původním (nedeformovaným, originálním, počátečním) rozměrům tělesa** (tj. vztaženo k dl , viz Obr. 22.1). Lagrangeův přístup se hojně používá v mechanice tuhých těles.

Obdobně, existuje také **Eulerův**⁵⁴ **přístup k popisu poměrných deformací** (tj. poměrné deformace a další související veličiny jako např. mechanické napětí) jsou **vztaženy k novým**

⁵³ **Joseph-Louis Lagrange** známý také jako Giuseppe Lodovico Lagrangia nebo De la Grange Tournier (1736–1813), byl italský matematik a astronom. Patří mezi zakladatele variačního počtu a je také velmi známý v mechanice.



(zdroj obrázku internet)

⁵⁴ **Leonhard Euler** (1707–1783) – švýcarský fyzik a také jeden z největších matematiků. Populární je iracionální a transcendentní Eulerovo číslo $e \approx 2.71828\dots$



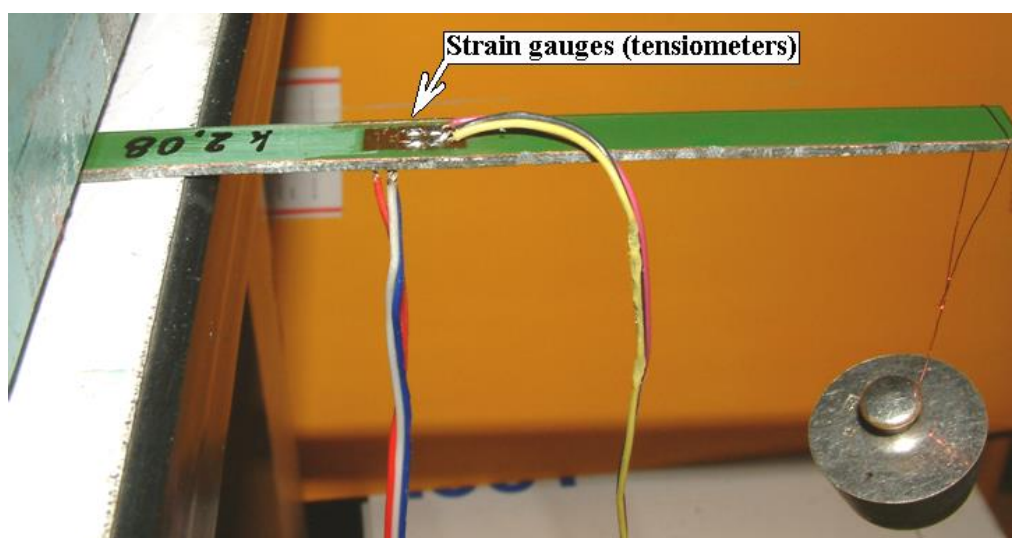
(deformovaným) rozměrům tělesa (tj. vztaženo k dl^* , viz Obr. 22.1). Eulerův přístup se hojně používá v mechanice tekutin⁵⁵.

Ve stručnosti je vhodné upozornit, že v mechanice/biomechanice deformovatelných těles jsou poměrné deformace obvykle popisovány třemi teoriemi.

- **Malé deformace**⁵⁶ (i.e. **teorie nekonečných poměrných deformací**⁵⁷, malá posunutí, lineární teorie poměrných deformací). Nejjednodušší teorie, která vyhovuje lineárnímu elastickému materialu (tj. většina inženýrských aplikací).
- **Malé deformace ale velká posunutí a rotace** (tj. teorie velkých posunutí a velkých rotací, složitější úlohy).
- **Velké deformace**⁵⁸ (tj. **teorie konečných poměrných deformací**⁵⁹, posunutí, natočení a poměrné deformace jsou velké. Obvykle nejčastěji používané v plasticitě, u elastomerů⁶⁰, měkkých biologických tkání aj).

Poměrné deformace mohou být **normálové** (tj. souvislost s délkovými změnami tělesa) nebo **smýkové** (tj. souvislost s úhlovými změnami tělesa).

Existují **průměrné poměrné deformace**⁶¹ (tj. je vyhodnocována charakteristická hodnota na určité ploše či délce), např. měřením pomocí **tenzometrů**⁶², viz Obr. 22.2, či prostým změřením změny délkových rozměrů v nedeformovaném a deformovaném stavu) nebo **bodové poměrné deformace**⁶³ (tj. hodnoty v bodu získané např. výpočtem).



Obr. 22.2 Měření průměrné poměrné deformace tenzometricky při ohybu. (zdroj obrázku internet)

⁵⁵ **Tekutina** je vědecký název pro kapaliny, plyny, plazma a někdy také sypké hmoty.

⁵⁶ Anglicky **small strains**.

⁵⁷ Anglicky **infinitesimal strain theory**.

⁵⁸ Anglicky **large strain**.

⁵⁹ Anglicky **finite strain theory**.

⁶⁰ **Elastomer** je přírodní nebo syntetický polymerní materiál s vysokou elasticitou. Vyznačuje se vysokou schopností vracet se do původního tvaru. Typickým příkladem jsou pryže.

⁶¹ Anglicky **average strains**.

⁶² **Tenzometr** (anglicky **strain gauge** nebo **tensiometer**) je pasivní senzorická elektrotechnická součástka, používaná k přímému měření délkových změn nebo nepřímému měření poměrných deformací a mechanického napětí na povrchu součástí.

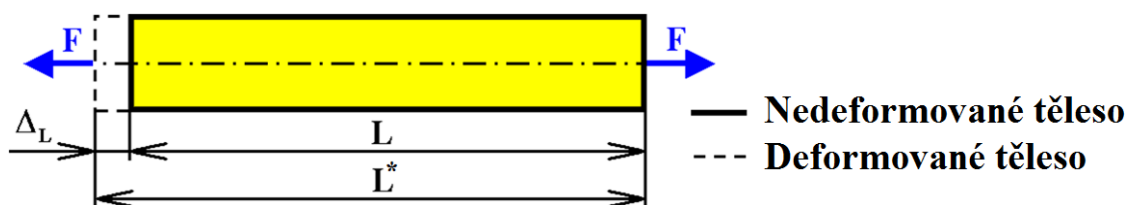
⁶³ Anglicky **point strain**.

Poměrné deformace mohou být **normálové** (tj. souvislost s délkovými změnami tělesa) nebo **smykové** (tj. souvislost s úhlovými změnami tělesa).

22.2 Délkový poměr, inženýrské a logaritmické poměrné deformace a jednoosá napjatost

Obvykle, jednoosý tah (extenze) nebo tlak (komprese) je první a nejjednodušší zátěžný stav, který je vyučován v mechanice/biomechanice a proto bude využit při definici poměrných deformací. Nicméně, v názvech poměrných deformací je značný chaos a v této knize jsou uvedeny ty nejvíce používané ☺.

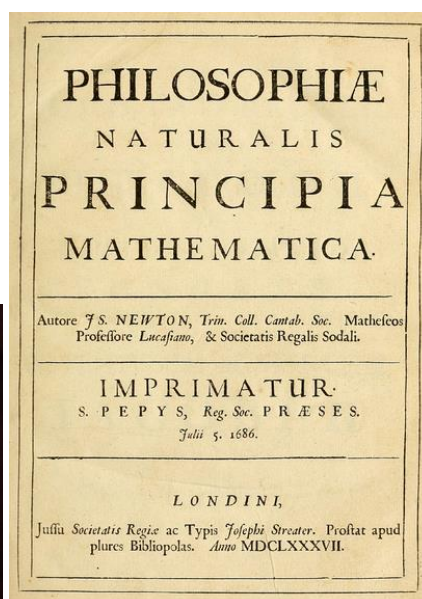
Na Obr. 22.3 je prizmatická tyč s konstantním průřezem, která je zatížena osovou silou F/N a deformována (tj. vznikne **prodloužení** $\Delta L/m$ v osovém směru). Původní konfigurace tyče je popsána délkou L/m a deformovaná konfigurace tyče je popsána délkou L^*/m . Příčné změny rozměrů tyče existují také, ale není nutné se jimi teď zabývat ☺.



Obr. 22.3 Tyč namáhaná tahem a změna délkových rozměrů.

V souladu s Newtonovskou⁶⁴ mechanikou je zřejmé, že $L \geq 0$ a $L^* \geq 0$ m, protože délka nemůže být záporná.

⁶⁴ Sir **Isaac Newton** (1642–1727) byl slavný anglický polyhistor. Jeho kniha „Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica“, vydaná v roce 1687, položila základy klasické mechaniky a je zařazena mezi nejdůležitější knihy v historii vědy.



(zdroj internet)

Pak lze definovat **délkový poměr** (stretch, stretch ratio, extension ratio) λ /1/ a inženýrskou/Cauchyho^{65/} nebo Biotovu smluvní normálovou poměrnou deformaci v tahu/tlaku ε_{ENG} /1/ (engineering strain, proof strain) jako

$$\lambda = \frac{L^*}{L} = \frac{L + \Delta_L}{L} = 1 + \frac{\Delta_L}{L} = 1 + \varepsilon_{\text{ENG}}, \quad \lambda \geq 0, \quad (22.1)$$

$$\varepsilon_{\text{ENG}} = \frac{L^* - L}{L} = \frac{\Delta_L}{L} = \lambda - 1, \quad \varepsilon_{\text{ENG}} \geq -1. \quad (22.2)$$

Ze vztahů (22.1) a (22.2) je také jasné patrné, jakým vztahem délek L a L^* jsou veličiny λ a ε_{ENG} definovány. Inženýrská poměrná deformace je tedy dána poměrem prodloužení a původní délky. Mezi λ , ε_{ENG} a Δ_L je dobře patrná lineární závislost.

Ze vztahů (22.1) a (22.2) lze také odvodit

$$\Delta_L = L^* - L = (\lambda - 1)L = \frac{\lambda - 1}{\lambda} L^* = \varepsilon_{\text{ENG}} L. \quad (22.3)$$

Parametr λ je hojně využíván u elastomerů. Situace když $\lambda > 1$ koresponduje s tahem (tj. extenze) a situace když $0 \leq \lambda < 1$ koresponduje s tlakem (tj. komprese).

Podobně, ε_{ENG} je zřejmě nejpobulárnější typ poměrné deformace, který však není vhodný pro plasticitu a velké deformace. Pro tahové namáhání platí $\varepsilon_{\text{ENG}} \geq 0$ a pro tlakové namáhání platí $0 > \varepsilon_{\text{ENG}} \geq -1$.

Jestliže $\Delta_L > 0$, pak se jedná o tah a jestliže $-L \leq \Delta_L < 0$ pak se jedná o tlak. Situace když $\Delta_L < -L$ nejsou fyzikálně možné.

Nicméně, inženýrské deformace nejsou vždy vhodné, a proto existují také další popisy deformací, z nichž je vhodné se podrobněji zaměřit na **logaritmickou (skutečnou, přirozenou)**⁶⁶, **Henckého**⁶⁷) poměrnou deformaci ε_{LOG} /1/. Pro odvození je vhodné zavést

⁶⁵ Baron **Augustin-Louis Cauchy** (1789–1857) byl francouzský matematik a inženýr.



(zdroj obrázku internet)

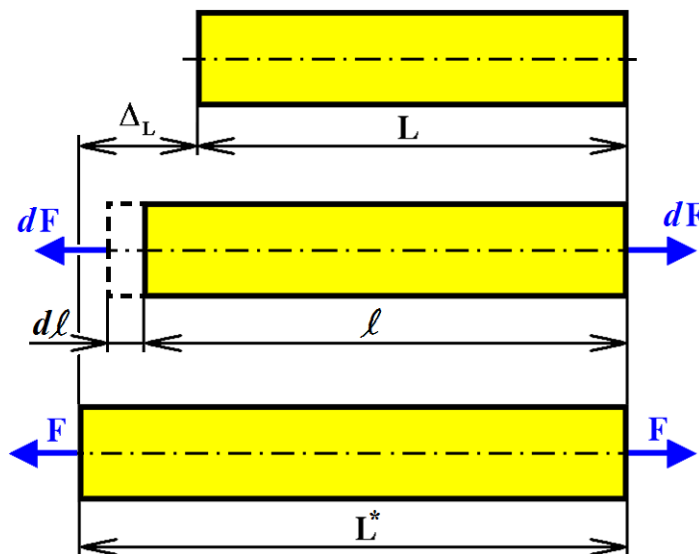
⁶⁶ Anglicky **natural strain**.

⁶⁷ **Heinrich Hencky** (1885–1951) byl německý inženýr, který pracoval v Německu, Rusku, Ukrajině a Holandsku. Zaměřil se hlavně na plasticitu a reologii (tj. zkoumání deformačních vlastností látek v závislosti na čase).



(zdroj fotografie internet)

aktuální proměnlivou délkou součásti ℓ /m/, pro kterou platí $\ell \in \langle L; L^* \rangle$ a která odpovídá aktuálnímu zatížení, viz Obr. 22.4.



Obr. 22.4 k definici logaritmických poměrných deformací.

Pro diferenciál logaritmické poměrné deformace $d\varepsilon_{\text{LOG}}$ platí

$$d\varepsilon_{\text{LOG}} = \frac{d\ell}{\ell}, \quad (22.4)$$

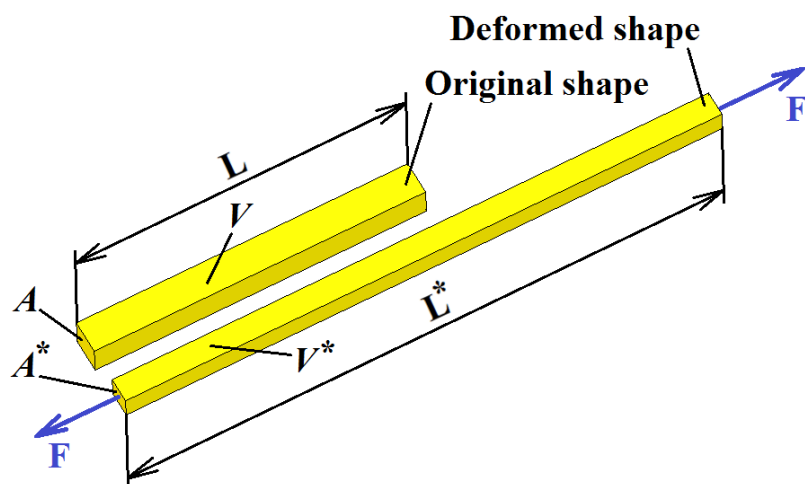
viz Obr. 22.4.

Logaritmická poměrná deformace se pak získá integrací v mezích počáteční a konečné délky součásti. Platí

$$\varepsilon_{\text{LOG}} = \int_L^{L^*} \frac{d\ell}{\ell} = \ln \frac{L^*}{L} = \ln \lambda = \ln \left(\frac{\Delta_L}{L} + 1 \right) = \ln(\varepsilon_{\text{ENG}} + 1). \quad (22.5)$$

Logaritmické poměrné deformace jsou aditivní (tj. lze je sčítat, což u ostatních typů poměrných deformací neplatí), což je významné zvláště pokud se konečná poměrná deformace získává sčítáním inkrementálních přírůstků. Logaritmické poměrné deformace jsou tedy univerzální v elastické nebo plastické oblasti namáhání i pro malé nebo velké deformace. Je to tedy proto, že logaritmické poměrné deformace se ve své definici stanovují součtem nekonečně mnoha infinitezimálních přírůstků (integrál je totiž také sumace ☺). Naopak, ostatní definice poměrných deformací jsou založeny na výpočtu jednoho celkového přírůstku, což je patrné porovnáním vztahů $\varepsilon_{\text{LOG}} = \int_L^{L^*} \frac{d\ell}{\ell}$ a $\varepsilon_{\text{ENG}} = \frac{\Delta_L}{L}$

Jiný způsob odvození ε_{LOG} je založen na zákoně zachování objemu (tj. objem nezatížená součást $V = AL$ je roven objemu zatížené součásti $V^* = A^*L^*$, viz Obr. 22.5, kde A /m/ je plocha průřezu nezatížené součásti a A^* /m/ je plocha zatížené součásti.

Obr. 22.5 Definice ε_{LOG} pomocí zákona zachování objemu.

Pak platí

$$AL = A^*L^* \Rightarrow \frac{L^*}{L} = \frac{A}{A^*} = \lambda, \quad (22.6)$$

tj.

$$\varepsilon_{\text{LOG}} = \ln \lambda = \ln \frac{L^*}{L} = -\ln \frac{L}{L^*} = \ln \frac{A}{A^*} = -\ln \frac{A^*}{A} = \ln\left(\frac{\Delta L}{L} + 1\right) = \ln(\varepsilon_{\text{ENG}} + 1). \quad (22.7)$$

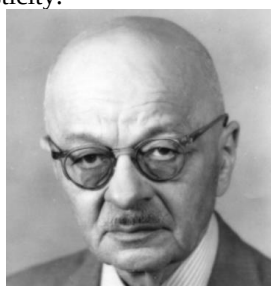
Ze znalostí matematiky vyplývá, že existuje symetrie mezi invertovanými logaritmickými deformacemi, tj. $\ln \frac{L^*}{L} = -\ln \frac{L}{L^*}$.

Ze vztahu (22.7) vyplývá, že

$$\lambda = e^{\varepsilon_{\text{LOG}}}, \quad \varepsilon_{\text{ENG}} = e^{\varepsilon_{\text{LOG}}} - 1. \quad (22.8)$$

Mezi materiálovými vědci je většinou preferovaná veličina ε_{LOG} a právě **A.L. Nadai**⁶⁸, viz [3], navrhl anglický název “natural strain”, který je pro logaritmické poměrné deformace výstižný.

⁶⁸ **Arpad Ludwig Nadai** (1883–1963) byl maďarský imigrant v USA, který měl významný vliv na rozvoj mechaniky. Byl průkopníkem v oblasti plasticity.



(zdroj fotografie internet)

Nicméně, **P. Ludwik**⁶⁹ a **A. Leon**⁷⁰ byli prvními, kteří zavedli ε_{LOG} , viz [4]. Později, **H. Hencky** (viz poznámka pod čarou v předchozích stránkách) rozšířil Ludwиковu práci na obecný případ napjatosti, viz [5]. Obecná napjatost ale není tématem tohoto dílu knihy, avšak bude jí věnována pozornost v dalších pokračováních této knihy.

Nicméně, platí také, že aplikace ε_{LOG} v úlohách mechaniky je vždy spojená se složitostmi nelineární mechaniky (tj. složitější a náročnější úlohy). Naopak, aplikace ε_{ENG} je typická svou jednoduchostí a je spojená ve většině případů s lineárními úlohami mechaniky.

V některých aplikacích může být ε_{LOG} aproximováno několika členy **Maclaurinovy řady**⁷¹ jako

$$\varepsilon_{\text{LOG}} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{i+1}}{i} \varepsilon_{\text{ENG}}^i \right] \approx \varepsilon_{\text{ENG}} - \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}^2}{2} + \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}^3}{3} - \dots \quad (22.9)$$

⁶⁹ **Paul Ludwik** (1878–1934) byl německo-českým inženýrem, známý svými příspěvky týkající se plasticity.



(zdroj fotografie internet)

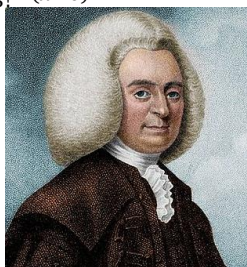
⁷⁰ **Alfons Leon** (1881–1951) je známý svými příspěvky týkající se plasticity a pružnosti a pevnosti kovů.



(zdroj fotografie internet)

⁷¹ **Colin Maclaurin** (1698–1746) byl skotský matematik a fyzik. Mimo jiné, byl geniální dítě a vysokoškolská studia započal v 11 letech. Je známý také Maclaurinovými řadami (zvláštní případ Taylorových řad).

$$f(x) = f_{(x=0)} + x f'_{(x=0)} + \frac{x^2}{2!} f''_{(x=0)} + \frac{x^3}{3!} f'''_{(x=0)} + \dots$$



(zdroj obrázku internet)

22.3 Zobecněná definice poměrných deformací a jednoosá napjatost

Jak již bylo řečeno, tak poměrné deformace lze vyjádřit nekonečně mnoha způsoby ☺. Jejich definici je možno také zobecnit. Indický matematik a mechanik B.R Seth, byl prvním, kdo ukázal, že jednotlivé definice poměrných deformací lze vyjádřit zobecněně jako případy **generalizované míry poměrných deformací** (nazývané také jako **Seth–Hill nebo Doyle-Ericksen nebo Truesdell-Toupin rodina poměrných deformací**)⁷², které jsou v textu značeny jako $\epsilon_{\text{SETH}\kappa}$ /1/, viz [6]. Platí

$$\epsilon_{\text{SETH}\kappa} = \frac{\left(\frac{L^*}{L}\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\lambda^{2\kappa} - 1}{2\kappa}, \quad (22.10)$$

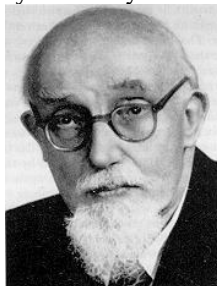
kde parameter κ /1/ závisí na zvoleném typu poměrných deformací.

V Tab. 22.1 jsou uvedeny ty nejpopulárnější příklady Seth-Hill rodiny poměrných deformací.

⁷² V názvech v odborné literatuře je opravdu nepatřičná různorodost.

Tab. 22.1 Základní příklady Seth-Hill rodiny poměrných deformací (jednoosé namáhání).

$\varepsilon_{\text{SETH}_\kappa} = \frac{\left(\frac{L^*}{L}\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\lambda^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\left(\frac{\Delta_L}{L} + 1\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\left(\frac{L^*}{L^* - \Delta_L}\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} =$ $= \frac{(\varepsilon_{\text{ENG}} + 1)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{1 - (1 - \varepsilon_{\text{EUL}})^{2\kappa}}{2\kappa(1 - \varepsilon_{\text{EUL}})^{2\kappa}}$		
$\kappa = -1$	$\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=-1}} = \frac{1 - \lambda^{-2}}{2} = \varepsilon_{\text{ALM}}$	Almansi ⁷³ $\varepsilon_{\text{ALM}} \in \langle -\infty; \frac{1}{2} \rangle$, viz [8]
$\kappa = -\frac{1}{2}$	$\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=-\frac{1}{2}}} = 1 - \lambda^{-1} = \varepsilon_{\text{EUL}}$	Euler nebo Almansi-Hamel ⁷⁴ nebo Schwaiger $\varepsilon_{\text{EUL}} \in \langle -\infty; 1 \rangle$
$\kappa = 0$	$\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=0}} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\lambda^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \ln \lambda = \varepsilon_{\text{LOG}}$	Logaritmické nebo Hencky nebo skutečné $\varepsilon_{\text{LOG}} \in \langle 0; \infty \rangle$
$\kappa = \frac{1}{2}$	$\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=\frac{1}{2}}} = \lambda - 1 = \varepsilon_{\text{ENG}}$	Inženýrské nebo smluvní nebo Cauchy nebo Biot $\varepsilon_{\text{ENG}} \in \langle -1; \infty \rangle$
$\kappa = 1$	$\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=1}} = \frac{\lambda^2 - 1}{2} = \varepsilon_{\text{GRE}}$	Green ⁷⁵ nebo Green-Lagrange $\varepsilon_{\text{GRE}} \in \langle -\frac{1}{2}; \infty \rangle$
$\lambda = \left(2\kappa\varepsilon_{\text{SETH}_\kappa} + 1\right)^{\frac{1}{2\kappa}} = \frac{L^*}{L} = \frac{A}{A^*} = \frac{\Delta_L}{L} + 1 = \frac{L^*}{L^* - \Delta_L} = \varepsilon_{\text{ENG}} + 1 = \frac{1}{1 - \varepsilon_{\text{EUL}}}$		Délkový poměr $\lambda \in \langle 0; \infty \rangle$

⁷³ **Emilio Almansi** (1869–1948) byl italský matematik a fyzik.⁷⁴ **Georg Karl Wilhelm Hamel** (1877–1954) byl německý matematik a mechanik.

(zdroj fotografie internet)

⁷⁵ **George Green** (1793–1841) byl britský matematik a fyzik. Je známý především svým významným přínosem k pochopení elektromagnetismu.

(zdroj fotografie internet)

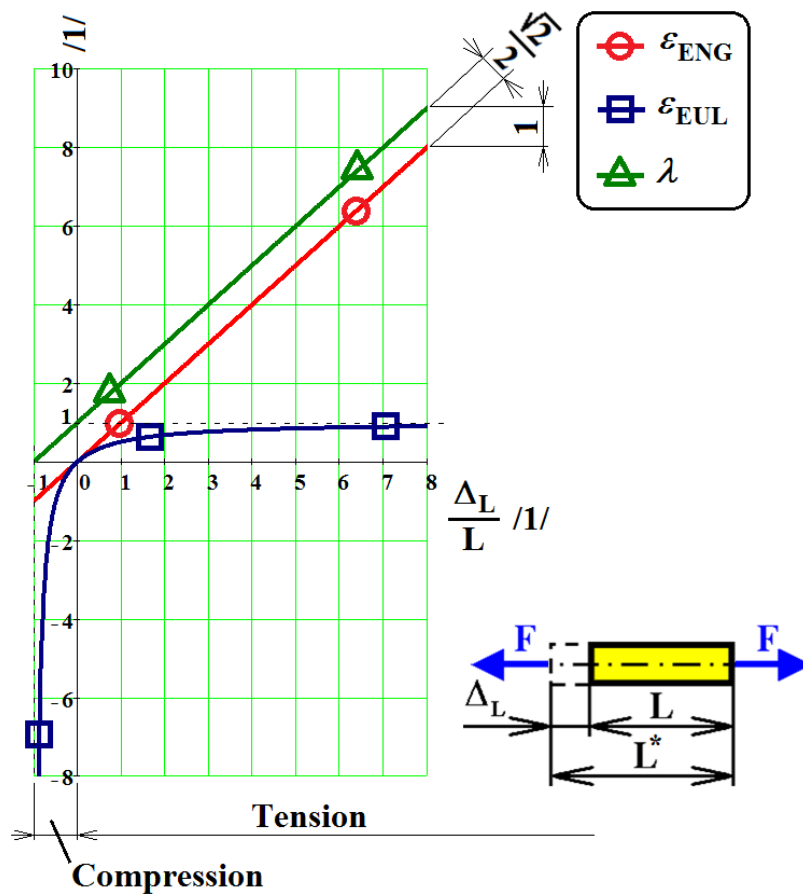
Z uvedeného vyplývá například, že

$$\varepsilon_{\text{EUL}} = \varepsilon_{\text{SETH}} - 1/2 = 1 - \lambda^{-1} = \frac{L^* - L}{L^*} = \frac{\Delta_L}{L^*} = \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}}{\varepsilon_{\text{ENG}} + 1}. \quad (22.11)$$

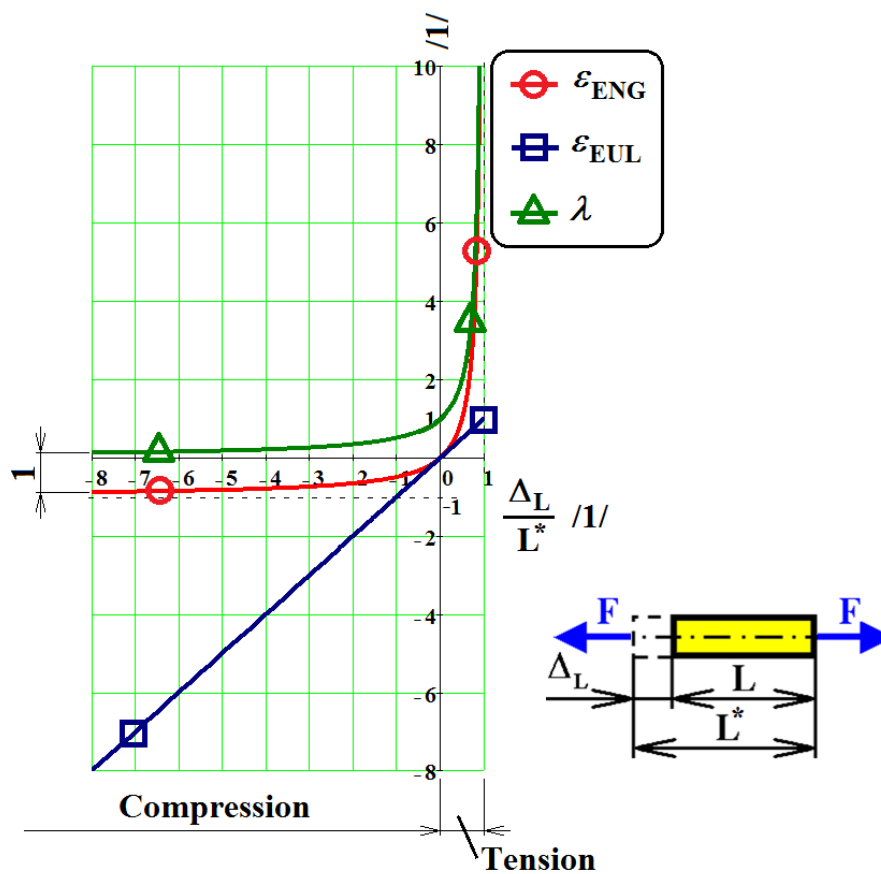
$$\varepsilon_{\text{GRE}} = \frac{L^{*2} - L^2}{2L^2} = \frac{\lambda^2 - 1}{2} = \frac{\Delta_L}{L} + \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_L}{L} \right)^2 = \varepsilon_{\text{ENG}} + \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}^2}{2} = \frac{2\varepsilon_{\text{EUL}} - \varepsilon_{\text{EUL}}^2}{2(1 - \varepsilon_{\text{EUL}})^2}, \quad (22.12)$$

$$\varepsilon_{\text{ALM}} = \frac{L^{*2} - L^2}{2L^{*2}} = \frac{1 - \lambda^{-2}}{2} = \frac{\Delta_L}{L^*} - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta_L}{L^*} \right)^2 = \varepsilon_{\text{EUL}} - \frac{\varepsilon_{\text{EUL}}^2}{2} = \frac{2\varepsilon_{\text{ENG}} + \varepsilon_{\text{ENG}}^2}{2(1 + \varepsilon_{\text{ENG}})^2}. \quad (22.13)$$

Porovnání ε_{ENG} , ε_{EUL} a λ je znázorněno na Obr. 22.6 a 22.7.



Obr. 22.6 Porovnání veličin ε_{ENG} , ε_{EUL} a λ (jednoosé zatížení).



Obr. 22.7 Porovnání veličin ϵ_{ENG} , ϵ_{EUL} a λ (jednoosé zatížení).

Také je možno využít kombinaci definicí z Tab. 22.1, viz např. Tab. 22.2.

Tab. 22.2 Příklady dalších definicí poměrných deformací (jednoosé namáhání).

$\varepsilon_{\text{SETH}_\kappa} = \frac{\left(\frac{L^*}{L}\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\lambda^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\left(\frac{\Delta_L}{L} + 1\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{\left(\frac{L^*}{L^* - \Delta_L}\right)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} =$ $= \frac{(\varepsilon_{\text{ENG}} + 1)^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \frac{1 - (1 - \varepsilon_{\text{EUL}})^{2\kappa}}{2\kappa(1 - \varepsilon_{\text{EUL}})^{2\kappa}}$		
$\kappa = 1/2$ a $\kappa = -1/2$	$\frac{\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=1/2}} + \varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=-1/2}}}{2} = \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2} = \varepsilon_{\text{BAZ}}$	Bažant ⁷⁶ , symetrizace (lineární kombinace Inženýrské a Eulerovy) $\varepsilon_{\text{BAZ}} \in \langle -\infty; \infty \rangle$
$\kappa = -1/2$ a $\kappa = 2$	$\frac{\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=-1/2}} + 2\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=1}}}{3} = \frac{\lambda^2 - \lambda^{-1}}{3} = \varepsilon_{\text{KIN}}$	Kuhn, kinetická teorie pryže, viz [8], (lineární kombinace) $\varepsilon_{\text{KIN}} \in \langle -\infty; \infty \rangle$
$\kappa = 1/4$ a $\kappa = -1/4$	$\frac{\varepsilon_{\text{SETH}_{1/4}} + \varepsilon_{\text{SETH}_{-1/4}}}{2} = \lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2} = \varepsilon_{\text{USER}}$	Frydrýšek, symetrizace (lineární kombinace) $\varepsilon_{\text{USER}} \in \langle -\infty; \infty \rangle$

V Tab. 22.2 je uvedena definice Bažantovy poměrné deformace

$$\varepsilon_{\text{BAZ}} = \frac{\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=1/2}} + \varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=-1/2}}}{2} = \frac{\varepsilon_{\text{ENG}} + \varepsilon_{\text{EUL}}}{2} = \frac{\lambda - \lambda^{-1}}{2} = \frac{L^{*2} - L^2}{2LL^*}, \quad (22.14)$$

které jsou poměrně dobrou aproximací logaritmických poměrných deformací.

Nicméně, ještě lepší aproximace logaritmických poměrných deformací je podle autora této kapitoly Karla Frydrýška, viz Tab. 22.2,

$$\varepsilon_{\text{USER}} = \frac{\varepsilon_{\text{SETH}_{1/4}} + \varepsilon_{\text{SETH}_{-1/4}}}{2} = \lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2} = \frac{L^* - L}{\sqrt{LL^*}}. \quad (22.15)$$

Pravdou však je, že jiné než inženýrské poměrné deformace v jejich jednoduchosti a historických důvodech zavedení nic nepřekoná.

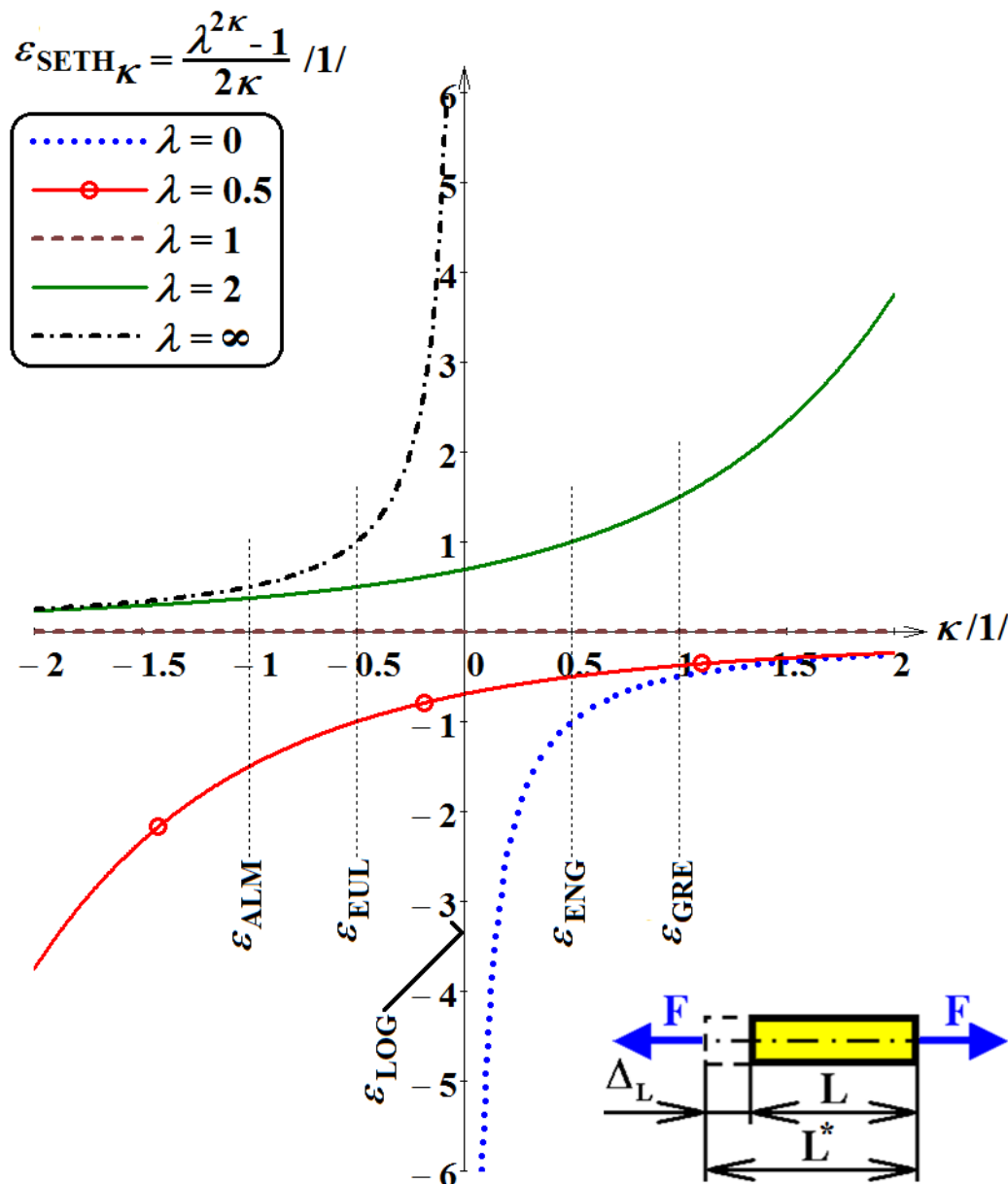
⁷⁶ **Zdeněk Pavel Bažant** (narozen 1937) je český stavební inženýr a fyzik. Je obecně uznáván jako jedna z vůdčích světových osobností v oblasti mechaniky pevných a poddajných těles a prostředí. Převážně se zabývá betonem, creepem, stabilitou konstrukcí, lomovou mechanikou, nelineární mechanikou aj. Blíže např. https://cs.wikipedia.org/wiki/Zden%C4%9Bk_Ba%C5%BEant.



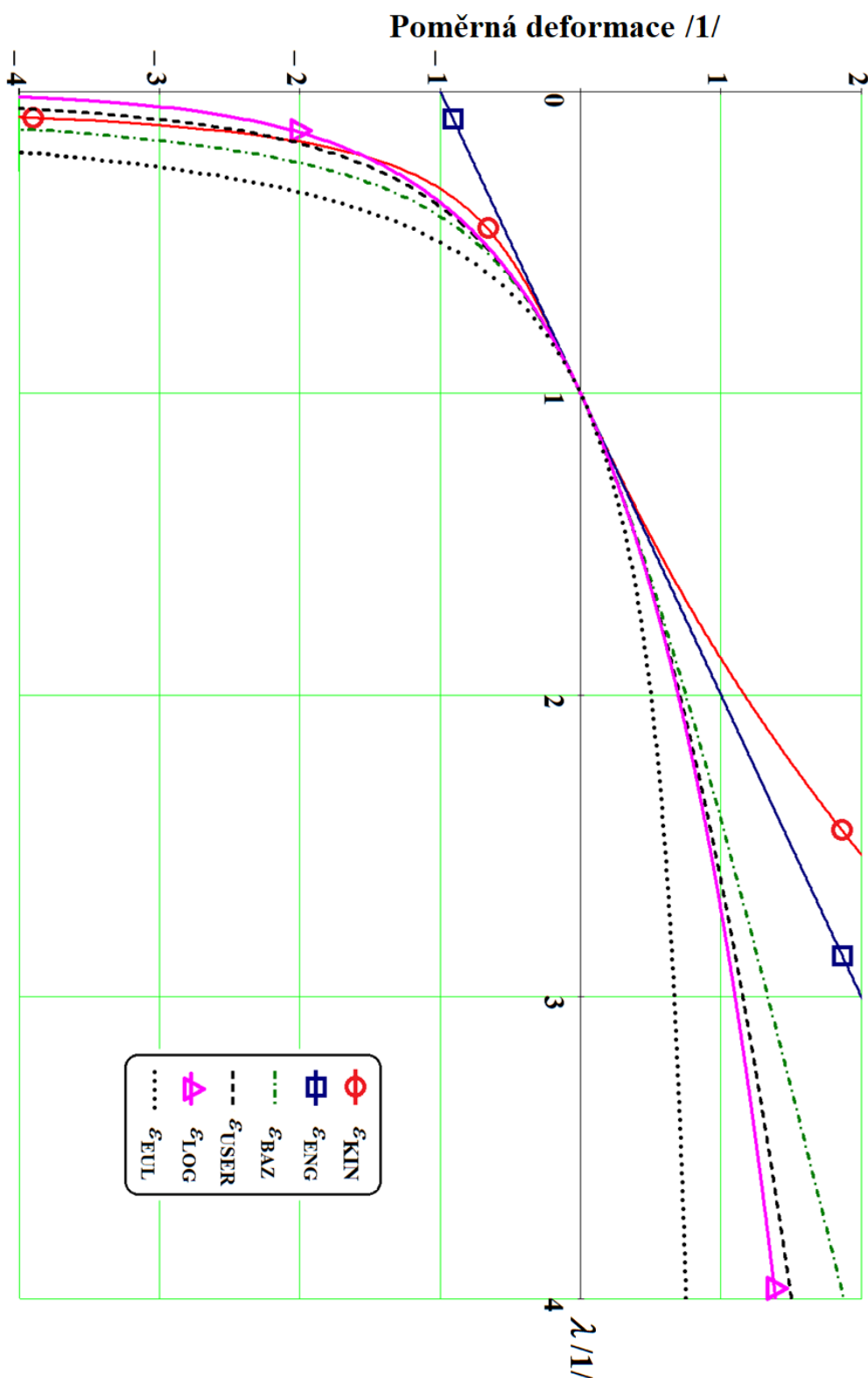
(zdroj fotografie internet)

Při porovnání vztahů z Tab. 22.1 a 22.2 je zřejmé, že poměrné deformace z Tab. 22.2 jsou rozšířeny na interval $(-\infty; \infty)$.

Porovnání některých definicí poměrných deformací je uvedeno na Obr. 22.8 a 22.9, přičemž platí, že všechny definice poměrných deformací splývají pro hodnotu $\lambda = \frac{L^*}{L} = 1$, tj. pro nezatížený stav a tedy když $\Delta_L = 0$ m.



Obr. 22.8 Vyjádření $\varepsilon_{\text{SETH}_K}$ jako funkce parametru κ pro zvolené hodnoty délkového poměru $\lambda = \frac{L^*}{L}$ (jednoosá napjatost).



Obr. 22.9 Závislost vybraných poměrných deformací na délkovém poměru $\lambda = \frac{L^*}{L}$ (jednoosá napjatost).

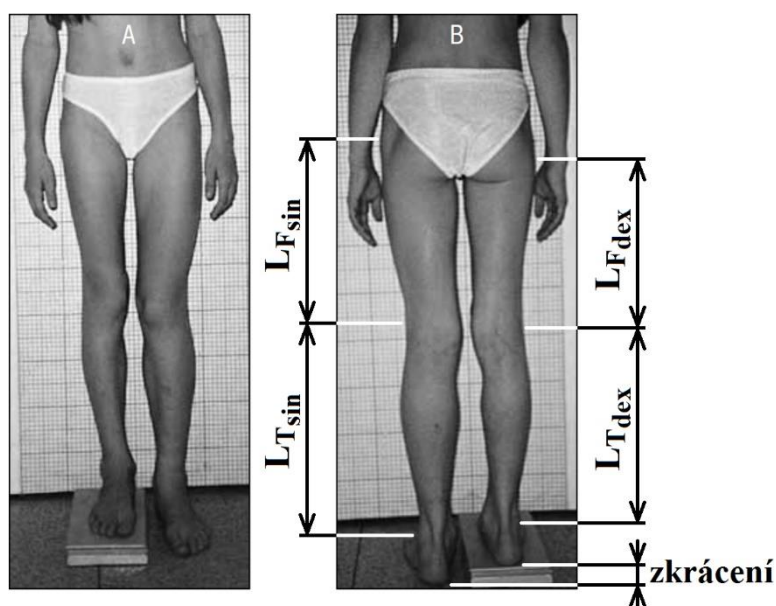
Všechny definice poměrných deformací mají jeden společný rys, pokud jsou poměrné deformace malé (tj. $\lambda \approx 1$, resp. $\Delta_L \approx 0$ m), potom se jejich hodnoty neliší.

Jak již bylo řečeno, poměrné deformace mohou být vyjádřeny nekonečně mnoha způsoby. A proto se přirozeně nabízí otázka, „Která z definic poměrných deformací je

nejlepší?“ Odpověď zní „Ani jedna, žádná z nich není lepší než jiné ☺“. Nicméně, nejvíce používaná a preferovaná jsou ε_{LOG} a ε_{ENG} .

22.4 Biologické a lékařské využití

Kromě stanovování mechanických vlastností organických či neorganických materiálů (např. mechanické napětí, tuhost, pevnost, pružnost, tlumení, plasticita, viskoelastická, návrhy a testování implantátů, lékařských pomůcek, strojů, v zoometrii, antropometrii, viz 1. díl této knihy [1], atd.), se změny rozměrů a poměrné deformace používají jako běžná jednoduchá porovnávací veličina v biologických oborech či lékařství, viz např. Obr. 22.10.

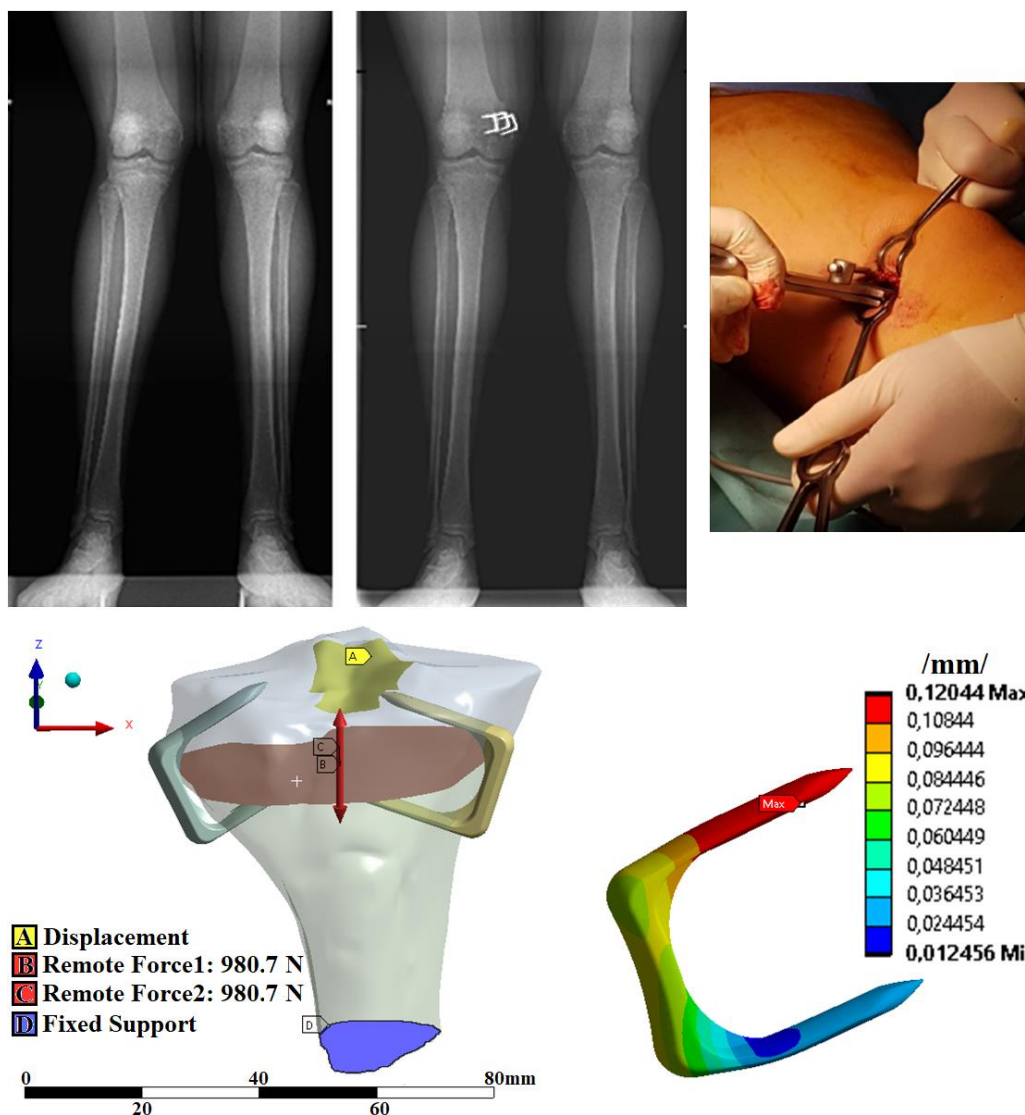


Obr. 22.10 Dívka s hemihyperplazií levé dolní končetiny (Beckwithův-Wiedemannův syndrom resp. EMG syndrom⁷⁷) – vrozená vada, genetický problém; zdroj [11] a autorem upraveno a doplněno. Indexy u délek L: „F“ značí femur, „T“ značí tibii, „sin“ značí levou stranu (sinister) a „dex“ značí pravou stranu (dexter).

Například, v ortopedii či traumatologii se používá podobné veličiny jako inženýrské poměrné deformace ε_{ENG} , která se nazývá **index délky končetin**, jako charakteristiky **diskrepancí**⁷⁸ **rozměrů končetin** aj. defektů, viz např. Obr. 21.2 (a, b) a Obr. 22.10.

⁷⁷ **Beckwithův-Wiedemannův syndrom (EMG syndrom)** je vzácné geneticky podmíněné vrozené onemocnění, které u svých nositelů narušuje růst a způsobuje deformace různých tkání a orgánů. Blíže např. https://www.wikiskripta.eu/w/Beckwith%C5%AFv%E2%80%93Wiedemann%C5%AFv_syndrom.

⁷⁸ **Diskrepance** (z lat. dis-crepare = být ve sporu, neladit dohromady) znamená rozpor či nesoulad mezi výroky, jednáním, očekáváním, výsledky ...



Obr. 22.11 Komplexní biomechanický výzkum epifyzeodezy⁷⁹ ve spolupráci VŠB – Technické univerzity Ostrava, MEDIN a.s. a Fakultní nemocnice v Motole. **Blountovy**⁸⁰ skoby (A), (B) umístění v distálním femuru, (C) chirurgický zákrok, (D) a (E) numerické modelování pro jiné umístění v proximální tibií.

⁷⁹ **Epifyzeodeza** je chirurgický úkon, který slouží ke zpomalení/zastavení růstu končetin. Aplikuje se ke zpomalení růstu, např. když jedna končetina dítěte roste rychleji než ta druhá.

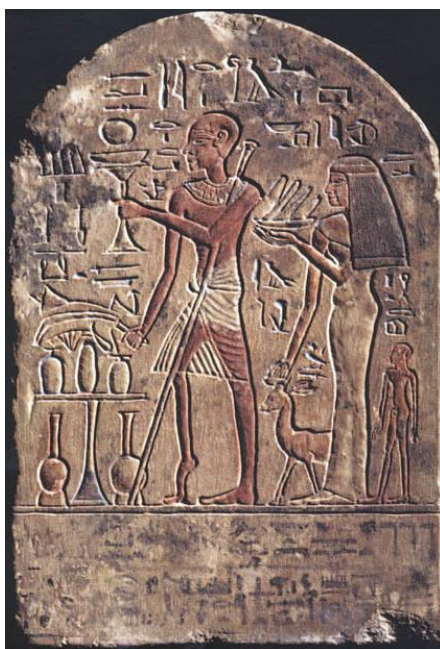
⁸⁰ **Walter Putnam Blount** (1900–1992) byl americký ortopéd. Mimo jiné, jako první přišel s myšlenkou aplikace Blountových skob při léčbě.



(zdroj fotografie internet)

Vzhledem k tomu, že autor této kapitoly provádí/prováděl i v této oblasti seriózní biomechanický výzkum, viz Obr. 22.11, a vzhledem k tomu, že např. diskrepance délky dolních končetin v rozmezí 5 až 20 mm se vyskytuje až u 20 % populace, viz osobní setkání s profesorem Poulem⁸¹ aj., je vhodné se krátce na toto téma zaměřit.

Příčiny diskrepance délky končetin jsou buď **vrozené** (viz Obr. 22.10) nebo **získané** (záněty, nemoci, úrazy, viz např. Obr. 22.12). Indikace k případným operativním úkonům musí být vždy založena na systematickém sledování pacienta, klinickém vyšetření, pečlivém měření délky končetin, rentgenové dokumentaci a ortorentgenografií⁸² či skenografií⁸³.



Obr. 22.12 Egyptská stela znázorňující postiženého poliomyelitidou⁸⁴ s postiženou končetinou a berlí (cca z doby 1380 př. Kr.; zdroj obrázku https://en.wikipedia.org/wiki/Polio#/media/File:Polio_Egyptian_Stele.jpg).

⁸¹ **Jan Poul** (nar. 1948) je známý český dětský ortoped, traumatolog a profesor.



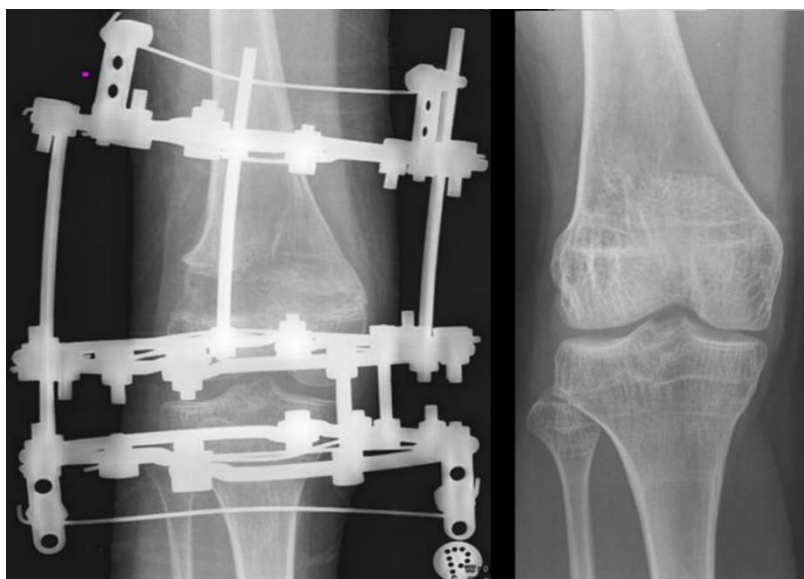
(zdroj fotografie internet)

⁸² **Ortorentgenografie** (z řeckého orthos = rovný a rentgenografie = zobrazování orgánů pomocí rtg.) je rtg. znázornění vnitřních orgánů v jejich stutečné velikosti.

⁸³ **Skenografie** je svými výstupy podobná fotografii, avšak je mnohem vyspělejší, a na rozdíl od fotografie nemá jednobodovou perspektivu, má vysoké rozlišení a výsledek je zaostření na každý bod. Na rozdíl od fotoaparátu/kamery se využívá obvykle plochý skener.

⁸⁴ **Poliomyelitis** přesněji **poliomyelitis anterior acuta** (česky poliomyelitida, dětská obrna nebo zkráceně polio) je virové infekční onemocnění člověka. Způsobuje je Poliovirus (zkráceně PV), což je neobalený RNA virus z rodu enterovirů. Jediným přenašečem dětské obrny je člověk. Díky vakcinaci se ČR/Československo v roce 1960 stalo první zemí na světě, kde byla obrna vymýcena. V Evropě byla obrna, díky „komplikovanému“ úsilí o proočkovanost, vymýcena až v roce 2002.

V některých případech, problematika pak vede k biomechanické patologii⁸⁵, která se např. u dolních končetin projevuje nejčastěji napadáním či kulháním. Operativními postupy řešení jsou pak **zkrácení kostí (contratura)** nebo **prodlužování kostí (prolongace)**, kde se obvykle používá **osteotomie (protěti kostí)** či **epifyzeodeza**, viz Obr. 22.11, **distrakční epifyzeolýza**, viz Obr. 22.13, nebo také **distrakční osteogeneze (callotasis)**, což je prodloužení kosti či nahrazení její části prostřednictvím kontrolované distrakce. Blíže také [13].



Obr. 22.13 Asymetrická distrakční epifyzeolýza (aplikace zevního fixátoru při prodlužování končetiny); zdroj obrázku [12].

Metody predikce zkratu/prodloužení končetin jsou stále statisticky vyhodnocovány a zpřesňovány, protože jsou velmi důležité pro rozhodování o zvoleném operačním postupu a jeho načasování. Metody predikce však vycházejí z poměru postiženého a nepostiženého segmentu, tj **index délky končetiny** /1/.

$$\text{Index femuru} = \frac{L_{F_{\text{dex}}}}{L_{F_{\text{sin}}}}, \quad \text{Index tibie} = \frac{L_{T_{\text{dex}}}}{L_{T_{\text{sin}}}}, \quad (22.16)$$

viz Obr. 22.10.

22.5 Teorie 1. a 2. řádu a jiné doplňující informace

Při řešení úloh mechaniky/biomechaniky se lze setkat s pojmem teorie 1. řádu a teorie 2. řádu, které se běžně využívají v teorii malých deformací.

Teorie 1. řádu⁸⁶ (tj. nejčastější jednoduchá úloha mechaniky těles známá ze základní statiky⁸⁷) je charakteristická tím, že rovnováha sil, momentů je stanovena v nedeformovaném stavu tělesa pomocí rovnic mechaniky. Je-li úloha staticky určitá, pak lze přímo stanovit i reakční účinky ve vazbách. Teorie 1. řádu je obvykle lineární a jednoduše řešitelná. Předpokládá, že deformace tělesa jsou malé a zanedbatelné.

⁸⁵ **Patologie** je poměrně široká lékařská věda zaměřená na studium a diagnostiku nemocí organismů. Název vznikl spojením řeckých slov páthos = zážitek či muka a logia = výčet nebo nauka.

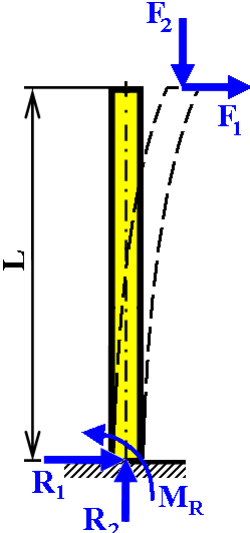
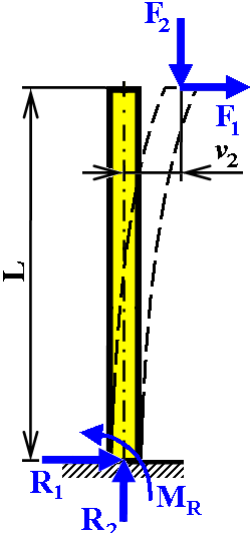
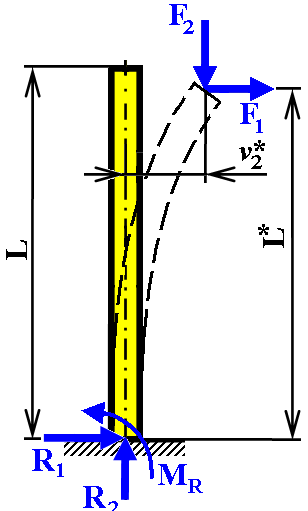
⁸⁶ Anglicky **Theory of 1st order**.

⁸⁷ Úvod do statiky je také v 1. dílu této knihy.

Teorie 2. řádu⁸⁸ (tj. složitější úlohy mechaniky) je charakteristická tím, že rovnováha sil a momentů je stanovena v deformovaném stavu tělesa pomocí rovnic mechaniky. I v případě staticky určité úlohy, nelze přímo stanovit reakce, protože popis deformovaného tělesa je další neznámou (tj. pro vyřešení je třeba sestavit alespoň jednu okrajovou/deformační podmínku). Teorie 2. řádu je vždy nelineární, avšak lze ji v mnoha případech vhodně linearizovat. Řešení je tedy složitější. Typickou úlohou teorie 2. řádu je úloha vzpěru⁸⁹.

V Tab. 22.3 je vysvětlena teorie malých deformací (teorie 1. a 2. řádu) v kontextu teorie velkých deformací (nosník zatížený dvěma silami v původním a deformovaném stavu), blíže [9].

Tab. 22.3 Vysvětlení teorie malých a velkých deformací (vetknutý nosník vystavený kombinovanému zatížení a naznačení výpočtu reakčního momentu ve vetknutí).

Teorie malých deformací		Teorie velkých deformací
Teorie 1. řádu	Teorie 2. řádu	
		
Reakční moment $M_R = F_1 L$	Reakční moment $M_R = F_1 L + F_1 v_2$	Reakční moment $M_R = F_1 L^* + F_1 v_2^*$
Obvykle lineární závislost mezi zatížením a	Nelineární závislost mezi zatížením a deformacemi, malé poměrné deformace	Nelineární závislost mezi zatížením a deformacemi, velké poměrné deformace

⁸⁸ Anglicky **Theory of 2nd order**.

⁸⁹ **Vzpěr** (ztráta stability tvaru, anglicky **buckling**) je náhlá ztráta tvaru tělesa (zhroucení, kolaps). Těleso se poškodilo, nikoli proto, že byla překročena podmínka pevnosti, ale pro svou náhlou labilní polohu.



Poškozující účinky vzpěru (zdroj fotografie <http://publish.ucc.ie/boolean/2010/00/dePaor/11/en>, viz také [14])

deformacemi, malé poměrné deformace		
Jednoduché řešení	Složitější řešení	Obtížné řešení

Jestliže je vliv deformací zatíženého tělesa zanedbatelný vzhledem k rovnováze tělesa, pak teorie 1. řádu lze použít pro řešení úlohy.

Jestliže je vliv deformací zatíženého tělesa významný vzhledem k rovnováze tělesa, pak je nutné využít teorii 2. řádu nebo teorii velkých deformací pro řešení úlohy.

Jak je zmíněno výše, tak fyzikální jednotka poměrných deformací je /1/, avšak alternativně lze použít také %. Pro **procentuální poměrnou deformaci** $\varepsilon_{\%}$ /%/ platí

$$\varepsilon_{\%} = \text{poměrná deformace} \times 100. \quad (22.17)$$

Alternativně se také používá **microstrain** $\mu\varepsilon$

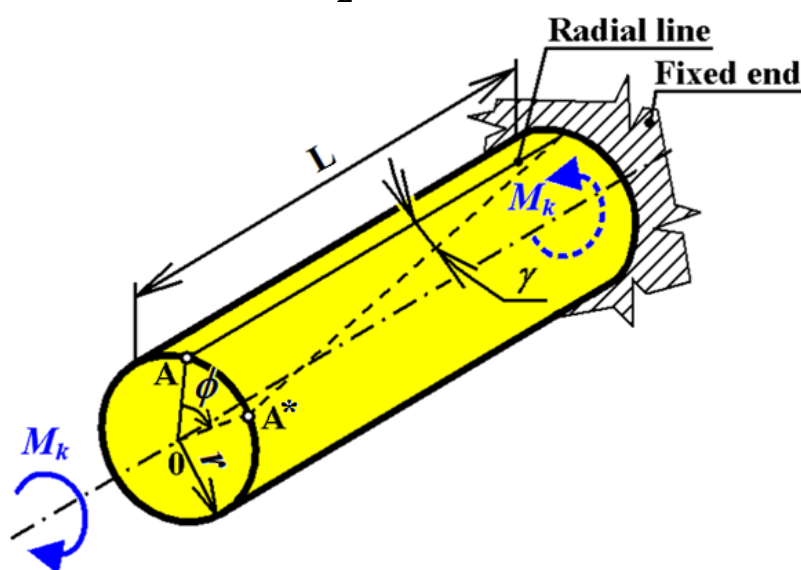
$$\mu\varepsilon = \text{poměrná deformace} \times 10^{-6}. \quad (22.18)$$

Důležité je také zmínit, že pro inženýrské poměrné deformace platí v souvislosti s posunutím

$$\varepsilon_{\text{ENG}} = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{ resp. pokud posunutí } u \text{ je funkcí jen proměnné } x, \text{ pak } \varepsilon_{\text{ENG}} = \frac{du}{dx}. \quad (22.19)$$

Blíže matematická teorie pružnosti.

Deformace mohou popisovat také natáčení, smyk nebo kroucení (krut). Při kroucení⁹⁰, viz Obr. 22.14, působí krouticí moment M_k /Nm/ na těleso, které se zkrutí o **úhel zkrutu/kroucení** ϕ /rad/, tj. bod „A“ se přemístí do bodu „A*“, a vznikne **úhel zkosu/zkos** γ , který se používá při definici **smykové poměrné deformace** $\varepsilon = \frac{\gamma}{2} \approx \frac{\tan(\gamma)}{2}$ /1/. Lze také definovat **poměrný úhel zkroucení** $\vartheta = \frac{\phi}{L}$ /rad m⁻¹/, blíže [2].



Obr. 22.14 Deformace při kroucení (změna povrchové přímky vyvolaná kroutícím momentem M_k).

⁹⁰ Anglicky **torsion**.

Získané výsledky, lze pomocí maticové analýzy zobecnit také na rovinné nebo prostorové úlohy (tenzory poměrných deformací), což je však složitější a bude to tématem dalšího dílu této knihy.

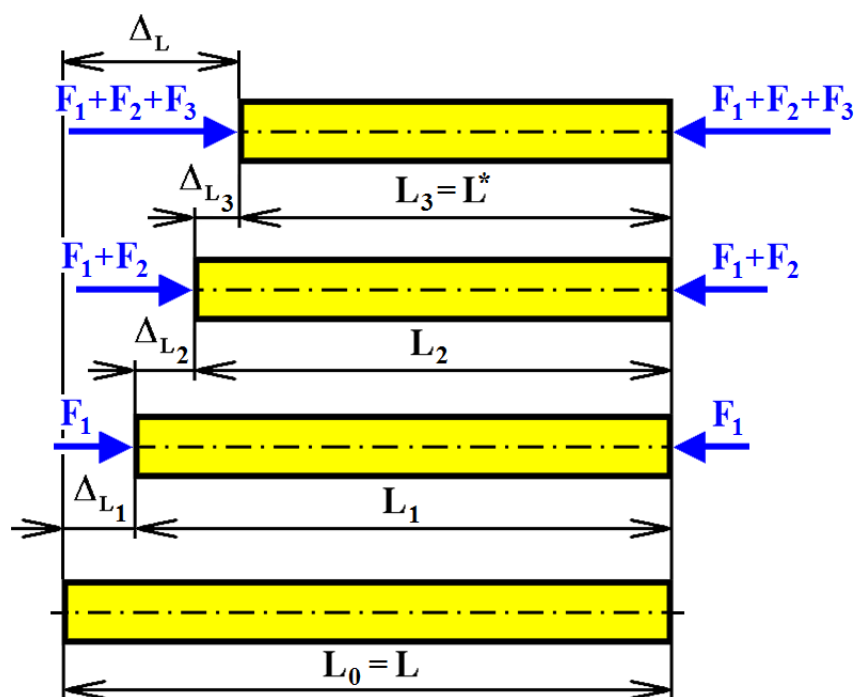
Poměrné deformace mohou vznikat i vlivem vnitřního pnutí uvnitř skutečných těles.

Poměrné deformace ve spojení s příslušným mechanickým napětím slouží k nejběžnějším a nejpoužívanějším popisům chování materiálů, blíže [2] a Kapitola 24.

22.6 Příklady

Příklad 22.1: Prismatická tyč konstantního průřezu je inkrementálně zatěžována zvyšující se tlakovou silou F_1 , $F_1 + F_2$ a $F_1 + F_2 + F_3$, viz Obr. 22.11. Tlakové síly indukují příslušná zkrácení z počáteční hodnoty $L = L_0$ na hodnoty L_1 , L_2 a $L^* = L_3$. Stanovte lokální a celkové (totální) hodnoty zkrácení, ε_{ENG} , ε_{EUL} , ε_{LOG} , ε_{BAZ} , ε_{USER} a λ .

Dáno: délkové rozměry, viz Tab. 22.4 a Obr. 22.15.



Obr. 22.15 Postupné zatěžování prizmatické tyče.

Tab. 22.4 Vstupní hodnoty.

Definice délek, viz Obr.22.11	Hodnota
Původní (nedeformovaná) délka $L = L_0$	116 mm
Délka L_1 (deformovaná součást) způsobená silou F_1	99 mm
Délka L_2 (deformovaná součást) způsobená silou $F_1 + F_2$	91 mm
Délka $L_3 = L^*$ (deformovaná součást) způsobená silou $F_1 + F_2 + F_3$	80 mm

V souladu s předchozím textem knihy, lokální zkrácení ΔL_i , viz Obr. 22.15, lokální inženýrská poměrná deformace ε_{ENG_i} , lokální Eulerova poměrná deformace ε_{EUL_i} , lokální

délkový poměr λ_i , lokální logaritmická poměrná deformace $\varepsilon_{\text{LOG}_i}$, lokální Bažantova poměrná deformace $\varepsilon_{\text{BAZ}_i}$ a lokální “user defined” poměrná deformace $\varepsilon_{\text{USER}_i}$ vyvolaná silami F_i (pro $i = 1, 2$ and 3) jsou dané vztahy

$$\Delta_{L_i} = L_i - L_{i-1}, \quad \varepsilon_{\text{ENG}_i} = \frac{\Delta_{L_i}}{L_0} = \frac{\Delta_{L_i}}{L}, \quad \varepsilon_{\text{EUL}_i} = \frac{\Delta_{L_i}}{L_3} = \frac{\Delta_{L_i}}{L^*}, \quad \lambda_i = \frac{L_i}{L_{i-1}}, \quad (22.20)$$

$$\varepsilon_{\text{LOG}_i} = \ln\left(\frac{L_i}{L_{i-1}}\right) = \ln(\lambda_i), \quad \varepsilon_{\text{BAZ}_i} = \frac{\varepsilon_{\text{ENG}_i} + \varepsilon_{\text{EUL}_i}}{2}, \quad \varepsilon_{\text{USER}_i} = \lambda^{1/2} - \lambda^{-1/2}, \quad (22.21)$$

viz Tab. 22.5.

Tab. 22.5 Výstupní hodnoty.

i	Δ_{L_i} /mm/	$\varepsilon_{\text{ENG}_i}$ /1/	$\varepsilon_{\text{EUL}_i}$ /1/	λ_i /1/	$\varepsilon_{\text{LOG}_i}$ /1/	$\varepsilon_{\text{BAZ}_i}$ /1/	$\varepsilon_{\text{USER}_i}$ /1/
1	-17	-0.146552	-0.2125	0.853448	-0.15847	-0.179526	-0.158636
2	-8	-0.068966	-0.1	0.919192	-0.08426	-0.084483	-0.084285
3	-11	-0.094828	-0.1375	0.879121	-0.128833	-0.116164	-0.128922

Výsledné hodnoty zkrácení Δ_L , viz Obr. 22.15, a výsledné hodnoty $\varepsilon_{\text{ENG}_L}$, $\varepsilon_{\text{EUL}_L}$, $\varepsilon_{\text{BAZ}_L}$ a $\varepsilon_{\text{USER}_L}$ lze získat sumací⁹¹ příslušných dílčích výsledků. Pak

$$\Delta_L = \sum_{i=1}^3 (\Delta_{L_i}) = L_3 - L_0 = L^* - L = -36 \text{ mm}, \quad (22.22)$$

$$\varepsilon_{\text{ENG}_L} = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{\text{ENG}_i}) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^3 (\Delta_{L_i}) = \frac{\Delta_L}{L} = -0.310345, \quad (22.23)$$

$$\varepsilon_{\text{EUL}_L} = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{\text{EUL}_i}) = \frac{1}{L^*} \sum_{i=1}^3 (\Delta_{L_i}) = \frac{\Delta_L}{L^*} = -0.45, \quad (22.24)$$

$$\varepsilon_{\text{BAZ}_L} = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{\text{BAZ}_i}) = \frac{\frac{1}{L} \sum_{i=1}^3 (\Delta_{L_i}) + \frac{1}{L^*} \sum_{i=1}^3 (\Delta_{L_i})}{2} = \frac{\Delta_L}{2} \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L^*} \right) = \left. \begin{aligned} &= \frac{\varepsilon_{\text{ENG}_L} + \varepsilon_{\text{EUL}_L}}{2} = -0.380172. \end{aligned} \right\} \quad (22.25)$$

$$\varepsilon_{\text{USER}_L} = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{\text{USER}_i}) = \sum_{i=1}^3 \left(\lambda_i^{\frac{1}{2}} - \lambda_i^{-\frac{1}{2}} \right) = -0.371843. \quad (22.26)$$

⁹¹ Pro vysvětlení méně zdatným čtenářům, např. $\sum_{i=1}^3 a_i = a_1 + a_2 + a_3$.

Výsledný délkový poměr λ_L je dán multiplikací⁹² dílčích výsledků, tj.

$$\lambda_L = \prod_{i=1}^3 (\lambda_i) = \prod_{i=1}^3 \left(\frac{L_i}{L_{i-1}} \right) = \frac{L_1}{L_0} \frac{L_2}{L_1} \frac{L_3}{L_2} = \frac{L_3}{L_0} = \frac{L^*}{L} = 0.689655. \quad (22.27)$$

Výsledná hodnota $\varepsilon_{\text{LOG}_L}$ je dána sumací dílčích výsledků, tj.

$$\varepsilon_{\text{LOG}_L} = \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{\text{LOG}_i}) = \sum_{i=1}^3 \ln(\lambda_i) = \ln \left[\prod_{i=1}^3 (\lambda_i) \right] = \ln(\lambda_L) = \ln \left(\frac{L^*}{L} \right) = -0.371564. \quad (22.28)$$

Z výsledků vyplývá, že vypočtená hodnota $\varepsilon_{\text{USER}_L}$ je velmi blízká hodnotě $\varepsilon_{\text{LOG}_L}$.

Příklad 22.2: Z obecné definice Seth-Hill poměrné deformace $\varepsilon_{\text{SETH}_\kappa}$, viz Tab. 22.2, odvoďte vztah pro ε_{LOG} .

Dáno: $\kappa = 0$, viz Tab. 22.2.

Pro logaritmické poměrné deformace platí $\kappa = 0$, potom

$$\varepsilon_{\text{SETH}_{\kappa=0}} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\lambda^{2\kappa} - 1}{2\kappa} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial \kappa}(\lambda^{2\kappa} - 1)}{\frac{\partial}{\partial \kappa}(2\kappa)} = \lim_{\kappa \rightarrow 0} \frac{2\lambda^{2\kappa} \ln \lambda}{2} = \lambda^0 \ln \lambda = \ln \lambda = \varepsilon_{\text{LOG}}, \quad (22.29)$$

kde pro odvození bylo použito známé **l'Hospitalovo**⁹³ **pravidlo**.

Příklad 22.3: Určete průměrné poměrné deformace ε_{ENG} a ε_{LOG} obdélníku ABCD, který se vlivem zatížení změnil na kosočtverec $A^*B^*C^*D^*$, viz Obr. 22.16. Průměrné poměrné deformace stanovte jako míru změny každé uhlopříčky.

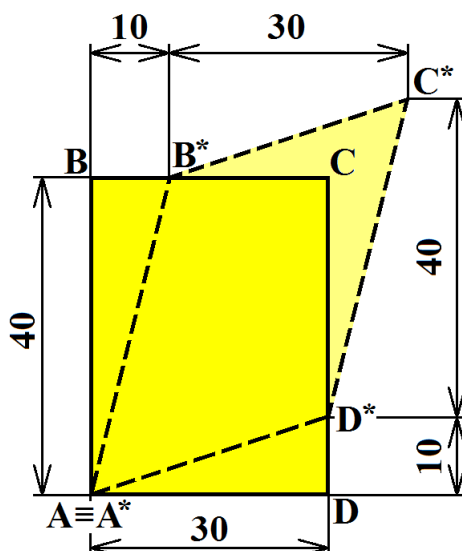
Dáno: Rozměry v mm, viz Obr. 22.16.

⁹² Pro vysvětlení méně zdatným čtenářům, např. $\prod_{i=1}^3 a_i = a_1 a_2 a_3$.

⁹³ **Guillaume François Antoine, Marquis de l'Hôpital** (někdy psán také jako **l'Hospital**) (1661–1704) byl francouzský matematik. Bývá spojován s l'Hospitalovým pravidlem pro výpočet limit v neurčitých případech typu "0/0" a " ∞/∞ ". Zřejmě Bernoulli objevil l'Hospitalovo pravidlo, ale první se objevilo v l'Hôpitalových knihách.

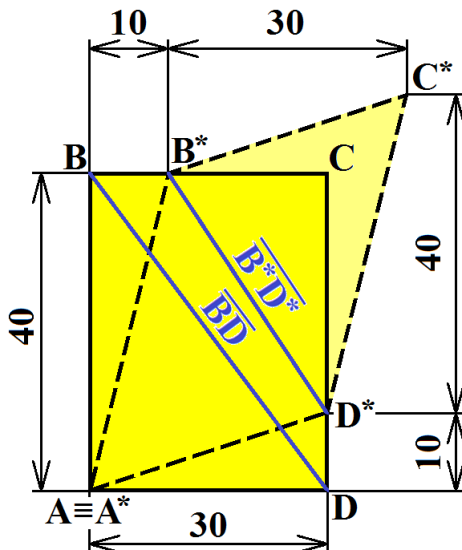


(zdroj obrázku internet)



Obr. 22.16 Nedeformovaný obdélník ABCD a jeho deformace ve tvaru kosočtverce $A^*B^*C^*D^*$.

Pro stanovení průměrných poměrných deformací úhlopříček je nutné nejprve určit délky úhlopříček, viz Obr. 22.16 a 22.17. Podle Pythagorovy věty, pro úhlopříčky v nedeformovaném stavu platí pro délky $\overline{AC} = \overline{BD} = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50$ mm a pro délky úhlopříčky v deformovaném stavu platí $\overline{A^*C^*} = \sqrt{(30 + 10)^2 + (40 + 10)^2} = 64.0312$ mm a $\overline{B^*D^*} = \sqrt{(30 - 10)^2 + (40 - 10)^2} = 36.0555$ mm.



Obr. 22.17 Nedeformovaný obdélník (uhlopříčka $\overline{BD}$) a deformovaný obdélník (uhlopříčka $\overline{B^*D^*}$).

Z definice, pro průměrné inženýrské deformace úhlopříček, platí $\varepsilon_{\text{ENG}AC} = \frac{\overline{A^*C^*} - \overline{AC}}{\overline{AC}} = 0.2806$ a $\varepsilon_{\text{ENG}BD} = \frac{\overline{B^*D^*} - \overline{BD}}{\overline{BD}} = -0.2789$.

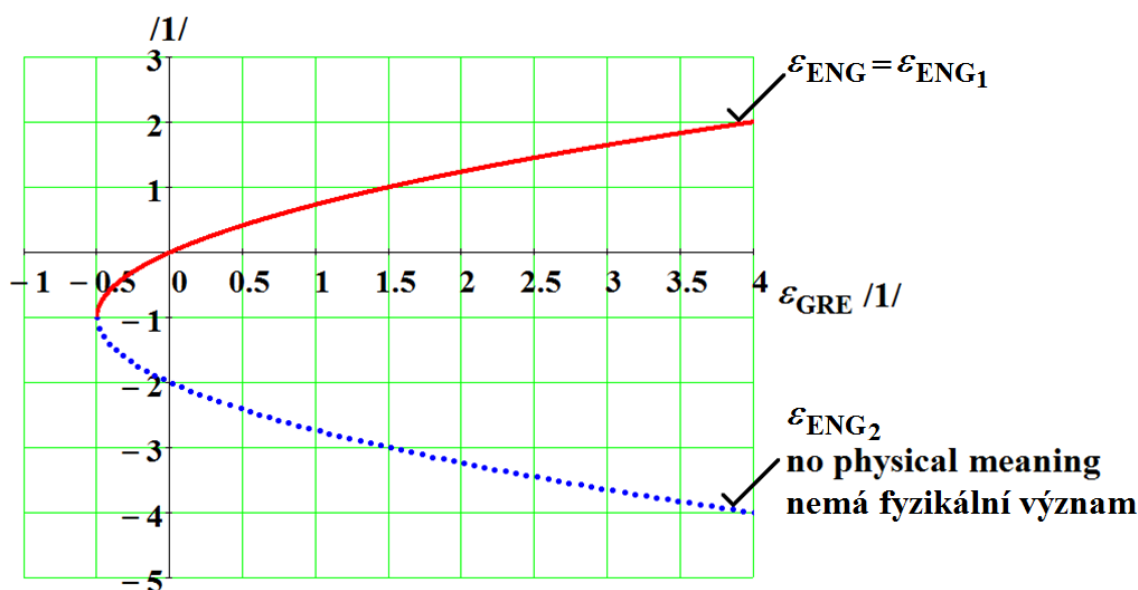
Z definice, pro průměrné logaritmické deformace uhlopříček, platí $\varepsilon_{\text{LOG AC}} = \ln(\varepsilon_{\text{ENG AC}} + 1) = 0.2473$ a $\varepsilon_{\text{LOG BD}} = \ln(\varepsilon_{\text{ENG BD}} + 1) = -0.327$.

Příklad 22.4: Vyjádřete inženýrskou poměrnou deformaci ε_{ENG} jako funkci Greenovy poměrné deformace ε_{GRE} .

Dáno: Definiční vztah pro Greenovu poměrnou deformaci $\varepsilon_{\text{GRE}} = \varepsilon_{\text{ENG}} + \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}^2}{2}$, viz rovnice (22.12).

Vztah pro Greenovu poměrnou deformaci lze upravit, tj.

$\varepsilon_{\text{GRE}} = \varepsilon_{\text{ENG}} + \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}^2}{2} \Rightarrow 2\varepsilon_{\text{GRE}} = 2\varepsilon_{\text{ENG}} + \varepsilon_{\text{ENG}}^2 \Rightarrow \varepsilon_{\text{ENG}}^2 + 2\varepsilon_{\text{ENG}} - 2\varepsilon_{\text{GRE}} = 0$, což je kvadratická rovnice⁹⁴. Řešením se získá $\varepsilon_{\text{ENG}1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\text{GRE}}}$, viz Obr. 22.18.



Obr. 22.18 Závislost ε_{ENG} na ε_{GRE} .

Protože $\varepsilon_{\text{GRE}} \in \langle -\frac{1}{2}; \infty \rangle$ a zároveň $\varepsilon_{\text{ENG}} \in \langle -1; \infty \rangle$, viz Tab. 22.2, pak fyzikální smysl má pouze kořen $\varepsilon_{\text{ENG}1} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\text{GRE}}} - 1$. Řešením je tedy

$$\varepsilon_{\text{ENG}} = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{\text{GRE}}} - 1. \quad (22.30)$$

Příklad 22.5: Prizmatická tyč je namáhána tlakem. Ze známé hodnoty ε_{LOG} a délky L^* deformovaného tělesa, určete délku L v nezatíženém stavu.

Dáno: $\varepsilon_{\text{LOG}} = -0.300105$, $L^* = 100$ mm.

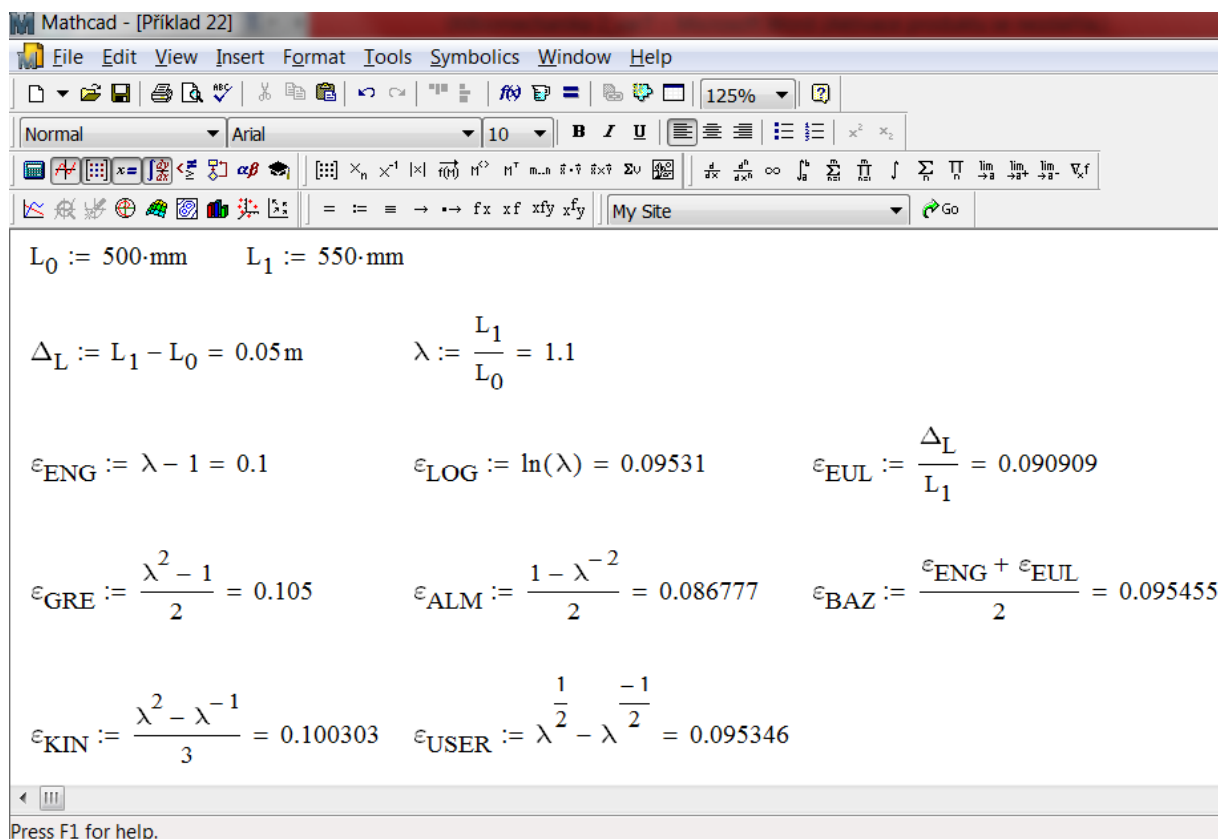
⁹⁴ **Kvadratická rovnice** (tj. algebraická rovnice/polynom 2. stupně, parabola) je obecně definována jako $ax^2 + bx + c = 0$, kde a , b a c jsou koeficienty. Řešení kvadratické rovnice je dané vztahem $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, blíže učebnice matematiky ze základní školy ☺.

Při řešení se vychází z definice $\epsilon_{\text{LOG}} = \ln \frac{L^*}{L}$, viz rovnice (22.5), ze které se musí vyjádřit délka L . Tedy $e^{\epsilon_{\text{LOG}}} = \frac{L^*}{L} \Rightarrow L = \frac{L^*}{e^{\epsilon_{\text{LOG}}}} = \frac{100}{e^{-0.300105}} = 135 \text{ mm}$. Prizmatická tyč měla původní délku $L = 135 \text{ mm}$.

Příklad 22.6: Vytvořte jednoduchý program pro výpočet poměrných deformací a prodloužení vysvětlených v této kapitole. Pro řešení použijte software Mathcad.

Dáno: Nainstalovaný sw Mathcad, viz např [10] (<https://www.mathcad.com/en/>), délky $L = L_0$ a $L^* = L_1$.

Řešení je předvedeno na Obr. 22.19, kde vstupy jsou parametry $L = L_0$ a $L^* = L_1$.



Obr. 22.19 Řešení příkladu 22.6.

22.7 Otázky k pochopení látky

1. Deformace lze vyjádřit jako posunutí nebo poměrné deformace. Víte jaký je rozdíl mezi posunutím a poměrnou deformací?
2. Jaký je rozdíl mezi Eulerovým a Lagrangeovým přístupem popisu poměrných deformací?
3. Jak je definován délkový poměr λ .
4. Jak je definovaná inženýrská poměrná deformace?
5. Jak je definovaná smluvní poměrná deformace?

6. Jak je definovaná logaritmická poměrná deformace?
7. Jak je definovaná skutečná poměrná deformace?
8. Jak je definovaná Eulerova poměrná deformace?
9. Může být délkový poměr λ záporný?
10. Platí, že $\frac{\varepsilon_{\text{ENG}}}{\varepsilon_{\text{EUL}}} = \lambda$?
11. Jaký je rozdíl mezi teorií 1. a 2. řádu?
12. Rozumíte postupu odvození vztahu (22.29)?
13. Jak je definován index délky končetin?
14. Vysvětlete diskrepanci rozměrů končetin.
15. Je prolongace zkrácení končetin?
16. Co znamená slovo contratura?
17. Co je osteotomie?

22.8 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Jaké je prodloužení tyče v Příkladu 22.5?
Odpověď: –35 mm.
2. Vyjádřete inženýrskou poměrnou deformaci jako funkci Bažantovy poměrné deformace.
Odpověď: $\varepsilon_{\text{ENG}} = \varepsilon_{\text{BAZ}} + \sqrt{\varepsilon_{\text{BAZ}}^2 + 1} - 1$.
3. Vyjádřete $\varepsilon_{\text{USER}}$ jako funkci ε_{ENG} .
Odpověď: $\varepsilon_{\text{USER}} = (\varepsilon_{\text{ENG}} + 1)^{\frac{1}{2}} - (\varepsilon_{\text{ENG}} + 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{\varepsilon_{\text{ENG}}}{\sqrt{\varepsilon_{\text{ENG}} + 1}}$.

22.9 Reference ke kapitole 22

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Frydrýšek, K.: *Basic Strength and Elasticity of Materials*, Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, VSB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, Czech Republic, 2016, pp. 1-264.
- [3] Nadai, A.: Plastic Behavior of Metals in the Strain-Hardening Range. Part I. *J. Appl. Phys.*, vol. 8, 1937, pp. 205-213.
- [4] Ludwik, P.: Elemente der Technologischen Mechanik. *Applied Mechanics*, Verlag von J. Springer, Berlin, 1909.
- [5] Hencky, H.: Über die Form des Elastizitätsgesetzes bei ideal elastischen Stoffen. *Zeit. Tech. Phys.*, vol. 9, 1928, pp. 215-220, 457.

- [6] Seth, B. R.: *Generalized strain measure with applications to physical problems*, MRC Technical Summary Report #248, 1961, Mathematics Research Center, United States Army, University of Wisconsin, pp. 1-18.
- [7] Almansi, E.: Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi. *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali*, 20, 1911.
- [8] Menard, K. P.: *Dynamic Mechanical Analysis: A Practical Introduction*, Second Edition, ISBN 9781420053135, CRC Press, 2008, pp. 1-240.
- [9] Frydrýšek, K.: *Some Selected Tasks of Elasticity and Plasticity 4 (Basic Nonlinear Mechanics of Deformable Bodies in Examples)*, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2016. 139 s. ISBN 978-80-248-4152-6.
- [10] New Messages! (mathcad.com) <https://www.mathcad.com/en/>.
- [11] Mařík, I., Zemková, D., Myslivec R., Petrášová Š., Maříková, Š., Hudáková, Š. Hyánková, E.: Nestejná délka dolních končetin v období růstu: diagnostika, monitorování a léčení, *VOX PEDIATRIAE*, vol. 10, no. 8, 2010, pp. 22-29, <http://www.ambul-centrum.cz/pub-ac/nestejna-delka-dk.pdf>.
- [12] Poul, J.: *Prolongace (prodlužování) končetin*, KDCHOT, FN BRNO (prezentace v powerpointu).
- [13] Konvalinka, J.: *Deformačně napěťová analýza femuru s distrakčním intramedulárním hřebem*, diplomová práce, Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky, Fakulta strojního inženýrství, Vysoké učení technické v Brně, 2017, vedoucí diplomové práce Zdeněk Florian.
- [14] de Paor, C.: Buckling of thin-walled cylinders: experimental and numerical investigation, *The Boolean - Snapshots of Doctoral Research at University College Cork*, october, 2010, <http://publish.ucc.ie/boolean/2010/00/dePaor/11/en>.
- [15] Zdeněk Bažant – Wikipedie (Wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Zden%C4%9Bk_Ba%C5%BEant.
- [16] Beckwithův–Wiedemannův syndrom – WikiSkripta, https://www.wikiskripta.eu/w/Beckwith%C5%AFv%E2%80%93Wiedemann%C5%AFv_syndrom.

23. VNITŘNÍ STATICKÉ ÚČINKY

Tato kapitola rozvíjí poznatky z prvního dílu této knihy, viz [1], kde jsou již vysvětleny základní pojmy statiky (tj. základní vazby/podpory v tělesech, zatížení tělesa, axiomy rovnováhy sil a momentů, uvolnění a také výpočty reakčních sil a momentů v tělesech. Opět je uvedeno, že pro hlubší studium problematiky je třeba blíže se seznámit se statikou těles, kde existuje mnoho vhodných učebnic i s řešenými příklady, viz např. [1] až [8]. Tato kniha totiž není učebnicí statiky ☺, ale **statika je nutným základem pro řešení mnoha úloh mechaniky a biomechaniky**.

Vnitřní statické účinky jsou stěžejní pro výpočet mechanického napětí a deformací v úlohách mechaniky/biomechaniky.

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek.

23.1 Definice vnitřních statických účinků a virtuální řez tělesem

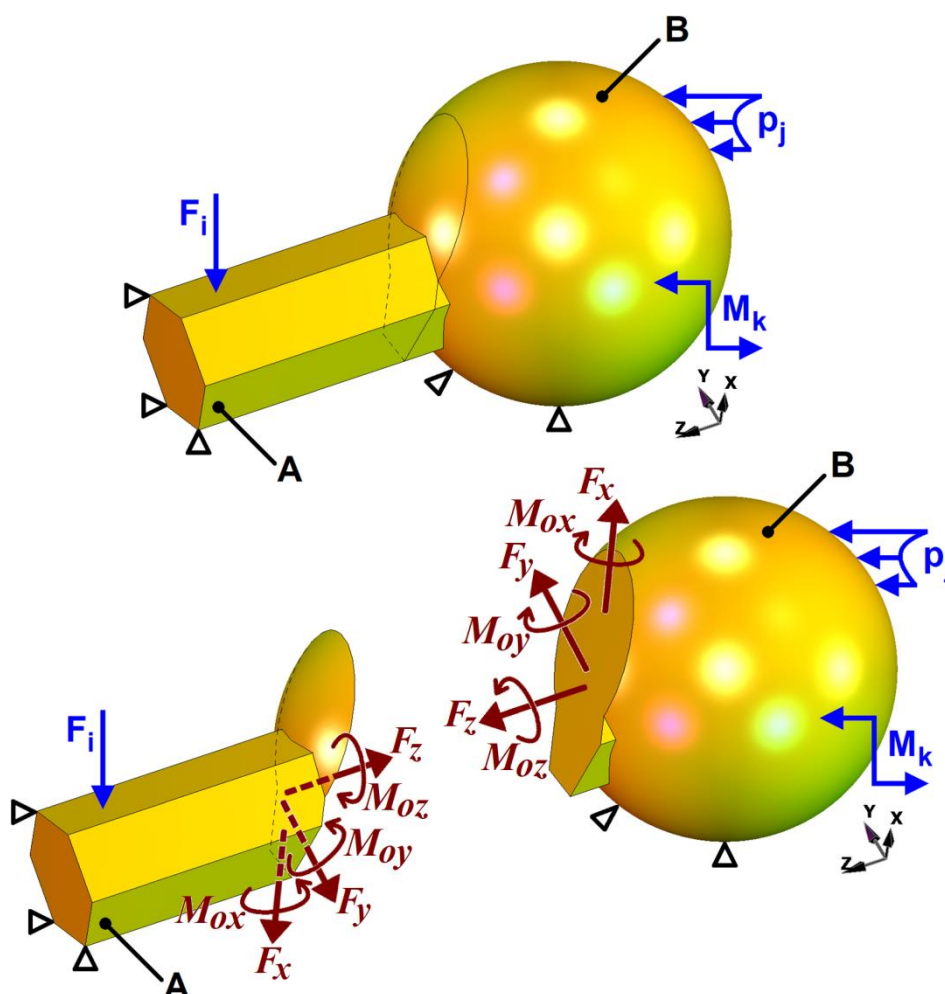
Jak již bylo zmíněno v [1], tak zatížení mohou být rozdělena na **externí/vnější (akce) a interní/vnitřní (odezvy/reakce/účinky)**. Vnitřní zatížení indukují **vnitřní silové účinky** (tj. **vnitřní síly a momenty**), ale také deformace a mechanická napětí v tělesech. **Vnitřní síly a momenty, na rozdíl od vnějších, nemění pohybový stav tělesa.**

Změna vnitřních statických účinků v tělese bývá obvykle spojována se změnou napětí a může vést až k mezním stavům spojenými s destrukcí tělesa, viz např. video [9] https://www.idnes.cz/zpravy/zahranicni/rusko-petrohrad-stadion-demolice-zriceni-nehoda-smrt-delnik-obet.A200201_093133_zahranicni_dtt.

Vnitřní silové účinky (obecně vnitřní síly a momenty) je možno určit **metodou virtuálního (myšleného) řezu**, kterou zavedl Leonard Euler⁹⁵. Zatížené těleso s okrajovými podmínkami, se myšleným řezem rozdělí na dvě části „A“, „B“, viz Obr. 23.1. Odstraní-li se např. část „B“, tak je nutné požadovat, aby část „A“ byla v rovnováze. Protože se jedná o myšlený řez, tak totiž musí platit axiom rovnováhy sil a momentů. Aby tedy byla zachována rovnováha tělesa, tak se účinek uřezané části „B“ nahradí vnitřními silami $F_{x,y,z}$ /N/ a vnitřními momenty $M_{ox,oy,oz}$ /Nm/, které se určují z podmínek rovnováhy sil a momentů.

Obdobně, to bude také s částí „B“, viz Obr. 23.1, kde však budou vnitřní účinky stejné, ale opačného směru.

⁹⁵ **Leonard Euler** je již několikrát zmiňován v předchozím textu této knihy.



Obr. 23.1 k znázornění vnitřních statických účinků v zatíženém tělese (virtuální řez tělesem).

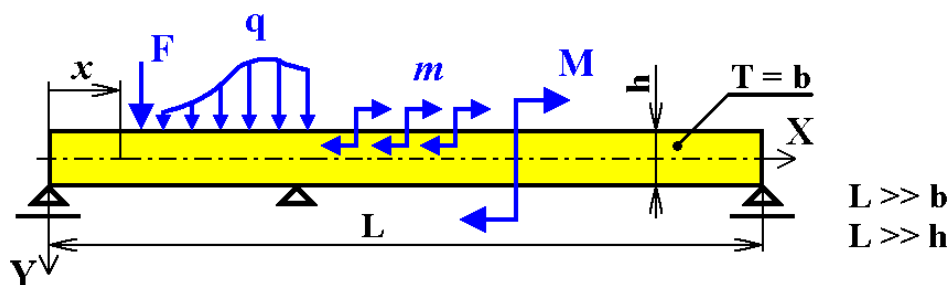
Jestliže, obě části „A“ a „B“ k sobě přiložíme, tak se vnitřní účinky sil a momentů v myšleném řezu „vyruší“, protože mají vzájemně opačný smysl. Neznačená to však, že tyto vnitřní účinky v tělese vymizí.

23.2 Rovinný nosník a vnitřní statické účinky

Rovinné úlohy jsou vždy jednodušší než obecnější prostorové úlohy, a proto jsou vhodnou a praktickou ilustrací pro pochopení problému. Z tohoto důvodu je vhodné ukázat vnitřní statické účinky na rovinném nosníku.

Nosník⁹⁶ je zevšeobecněný inženýrský pojem, jedná se o populární a v mnoha případech přijatelnou idealizaci reálného tělesa. Nosník je těleso, jehož podélný rozměr $L \gg$ než jeho příčné rozměry, viz např. Obr. 23.2. Nosníky jsou dány tvarem (např. přímý nebo křivý nosník) a velikostí a tvarem plochy příčného průřezu, délkou, materiálem a okrajovými podmínkami (např. vazby, pružný podklad, ...). V biomechanice může být za nosník považována také končetina nebo dlouhá kost či větev stromu atp.

⁹⁶ Anglicky **beam**, rusky **балка**



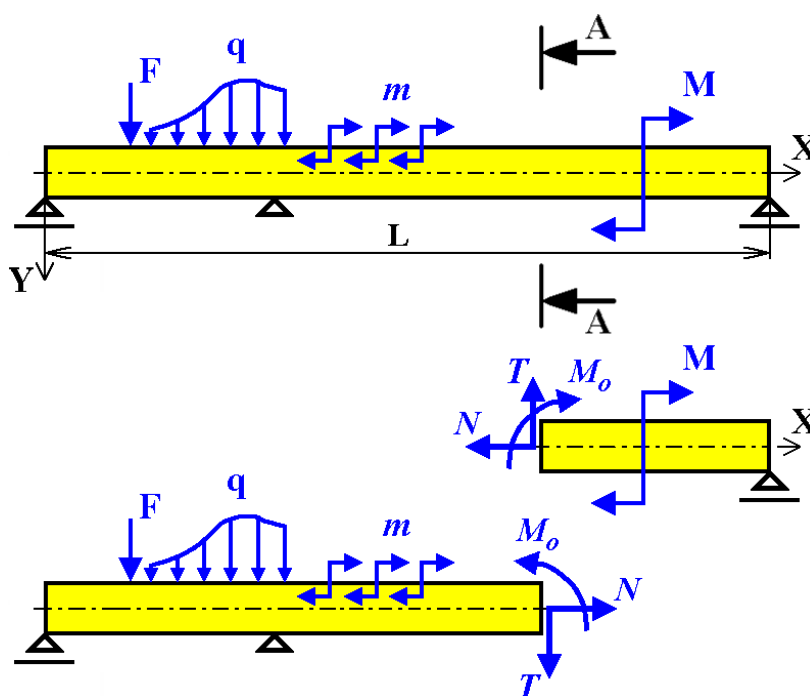
Obr. 23.2 Příklady nosníků (A) přímý rovinný, (B) křivočarý prostorový (potrubí).

Nosníky mohou být **staticky určité** (tj. reakční síly a momenty lze stanovit přímo z rovnic rovnováhy, obvykle nejjednodušší a nejběžnější úlohy) nebo **staticky neurčité (hyperstatické)** a také mohou mít **proměnlivý nebo konstantní příčný průřez**.

Stanovení vnitřních statických účinků, tj. **normálové síly N /N/**, **posouvající (smyková) síly T /N/** a **ohybového momentu M_o /Nm/**, je základním krokem pro výpočet napětí a deformací nosníku.

Pro úplnost je nutno také zmínit vnitřní krouticí moment, který kroutí nosníkem kolem podélné osy X a vyvolává tak kroucení. Nicméně, kroucení nosníků je tématem až dalšího dílu této knihy.

Aplikací metody Eulerova virtuálního řezu "A-A", viz Obr. 23.3 a předchozí kapitola, lze stanovit důležité vztahy pro N , T a M_o .

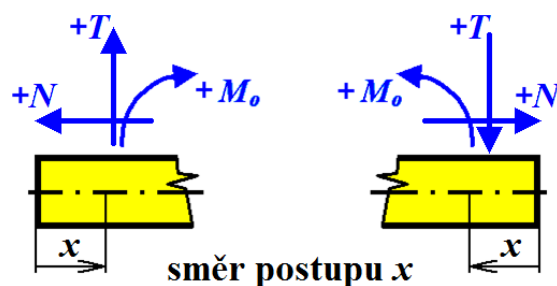


Obr. 23.3 Normálová síla N , posouvající síla T a ohybový moment M_o ve virtuálním řezu rovinného nosníku.

Normálové síly N jsou kolmé na rovinu virtuálního řezu (tj. působí ve směru normály průřezu), posouvající síly jsou tečné na plochu virtuálního řezu a ohybové momenty otáčejí kolem osy Z kolmé na rovinu X, Y nosníku.

N , T a M_o jsou definovány příslušnými algebraickými součty příslušných vnějších účinků na pravé nebo levé straně nosníku, blíže vysvětleno v příkladech této kapitoly. Jinými slovy, jestliže je celý nosník (tj. obecně těleso) v rovnováze, pak musí být v rovnováze také každý bod nosníku (tělesa). Tedy vnitřní účinky jsou v rovnováze s vnějšími účinky. V obecném případě to platí i v dynamických úlohách, které však jsou tématem až dalšího dílu této knihy.

Pro praktické vyšetřování vnitřních účinků, se používá obvyklá znaménková konvence, viz Obr. 23.4. Vnější zatížení pak stačí jen jednoduše porovnat v algebraickém součtu se znaménkovou konvencí (dle zkušeností autora této kapitoly je právě porovnání tou nejjednodušší metodou řešení) a samozřejmě existují také jiné přístupy, ale výsledek musí být vždy stejný.



Obr. 23.4 Znaménková konvence vnitřních statických účinků v souvislosti se směrem postupu x po nosníku.

V literatuře se občas objevují také jiné alternativní znaménkové konvence, ale ty naštěstí nejsou předmětem této knihy ☺.

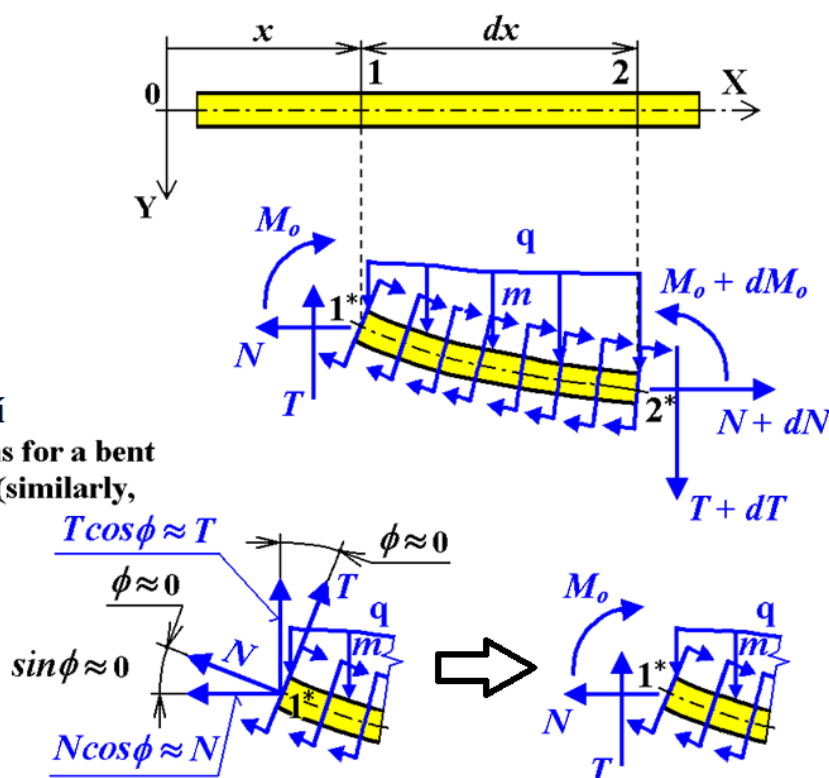
Průběhy vnitřních statických účinků se vykreslují obvykle do grafů v závislosti na poloze na nosníku. Blíže příklady v této kapitole.

Pro úplnost je třeba ještě doplnit **Schwedler-Žuravského věty** (někdy nazývané jen **Žuravského věty**), které vychází z rovnováhy na úseku ohraničeném dvěma souměznými řezy 1 a 2, viz Obr. 23.5, kde se předpokládá **spojité zatížení**⁹⁷ q /N m/ a **spojitě rozložený moment** m /N/.

(a) **Nedeformovaný stav**
Undeformed state
(portion "1, 2"):

(b) **Deformovaný stav**
Deformed state
(portion "1*", 2*"):

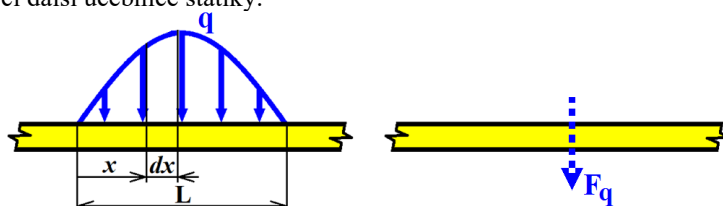
(c) **Přijátá zjednodušení**
Accepted simplifications for a bent
beam at the point "1*" (similarly,
it is at the point "2*"):



Obr. 23.5 Znaménková konvence vnitřních statických účinků v souvislosti se směrem postupu po nosníku.

Vlivem vnějšího zatížení se body „1“ a „2“ přemístily do polohy „1*“ a „2*“, kde v Obr. 23.5(c) jsou znázorněny přijátá zjednodušení jednoduché teorie malých deformací. Zatížení q a m indukují v bodu „1*“ síly N , T a moment M_o a v bodu „2*“ síly $N + dN$, $T + dT$ a moment $M_o + dM_o$.

⁹⁷ **Spojité zatížení (liniová síla, intenzita síly)** q je spojitě rozložená síla, kterou si lze představit např. jako působení písku na korbě automobilu, působení hydrostatického tlaku kapaliny, působení vlastní tíhy tělesa atp. Velikost výslednice síly $F_q = \int_0^L q dx$ (ekvivalentní síly od spojitého zatížení) je pak v těžišti obrazce spojitého zatížení. Blíže viz [1] či další učebnice statiky.



Dle Obr. 23.5 a rovnice rovnováhy sil ve svislém směru, tj. $T - qdx - (T + dT) = 0$, a po úpravě vyplývá **1. Schwedler⁹⁸-Žuravského⁹⁹ věta**

$$\frac{dT}{dx} = -q, \quad \text{tj.} \quad T = - \int q \, dx. \quad (23.1)$$

Podobně, z momentové podmínky rovnováhy k bodu „2“, tj. $M_o + mdx + Tdx - (M_o + dM_o) - qdx \frac{dx}{2} = 0$, vyplývá **2. Schwedler-Žuravského věta**

$$\frac{dM_o}{dx} = T + m, \quad \text{tj.} \quad M_o = \int (T + m) \, dx. \quad (23.2)$$

Při odvození rovnice (23.2) bylo využito skutečnosti, že $dx \rightarrow 0$ a tedy $\frac{(dx)^2}{2} = 0$.

Rovnice (23.1) a (23.2) lze spojit a potom platí

$$\frac{d^2 M_o}{dx^2} = \frac{dT}{dx} + \frac{dm}{dx} = \frac{dm}{dx} - q. \quad (23.3)$$

Rovnice (23.1) až (23.3) jsou **diferenciální rovnice¹⁰⁰**, které jsou vhodné také pro hledání extrémů či inflexních bodů v průbězích T a M_o . Tyto rovnice jsou také aplikované při řešení průhybů nosníků a rámu či výpočtu mechanického napětí, poměrných deformací, průhybů aj., viz další díl této knihy.

Pro hlubší pochopení je vhodné použít např. referenci [10] a [11].

Pro úplnost je třeba ještě zmínit, že použití Schwedler-Žuravského vět je možno rozšířit také o vliv pružného podkladu či dynamických účinků a dalších zatížení (odvozené

⁹⁸ **Johann Wilhelm Schwedler** (1823–1894) byl německý stavební inženýr.



(zdroj fotografie internet)

⁹⁹ **Dmitrij Ivanovič Žuravskij** (1821–1891) byl ruský stavební inženýr.



(zdroj fotografie internet)

¹⁰⁰ **Diferenciální rovnice** jsou obecně matematické rovnice, ve kterých se vyskytují derivace funkcí. Bývají aplikovány v téměř v každé oblasti vědy.

diferenciální rovnice jsou však složitější, viz např. [12] až [14]). Také je možné sestavit ještě 3. Schwedler-Žuravského větu ve směru axiálním, viz Kapitola 25.2.

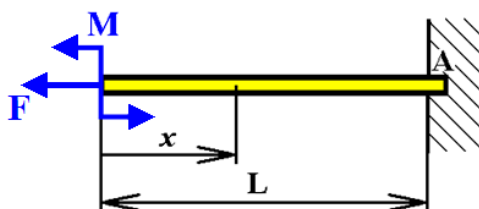
Průběhy (hodnoty) vnitřních statických účinků jsou nezávislé na volbě souřadného systému.

Jestliže je $N > 0$, pak je nosník natahován a jestliže je $N < 0$, pak je nosník stlačován, blíže Kapitola 25.

23.3 Příklady

Příklad 23.1: Určete průběhy vnitřních statických účinků pro přímý vetknutý rovinný nosník (konzola) zatížený silou F a momentem M , viz Obr. 23.6. Proveďte několik způsobů řešení pro vysvětlení pochopení principů.

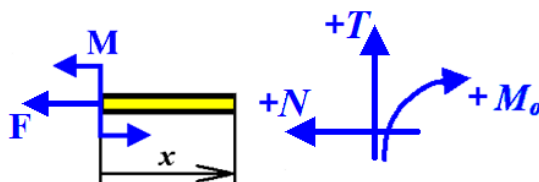
Dáno: F /N/, M /Nm/, L /Nm/.



Obr. 23.6 Vetknutý nosník zatížený silou F a momentem M .

Uvedený nosník patří mezi nejjednodušší úlohy mechaniky a je proto vhodný pro vysvětlení látky.

Nejrychlejší způsob řešení je vidět na Obr. 23.6, kde lze definovat souřadnici $x \in \langle 0; L \rangle$ s počátkem umístěným na volném konci. Pak lze dle Obr. 23.7 odvodit vztahy pro vnitřní statické účinky na řezu ve vzdálenosti x .

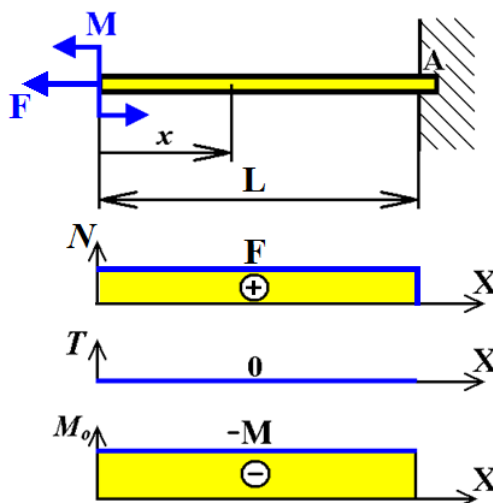


Obr. 23.7 Definice úseku $x \in \langle 0; L \rangle$ a znaménková konvence

Prostým porovnáním zatížení na Obr. 23.7 se znaménkovou konvencí vyplne

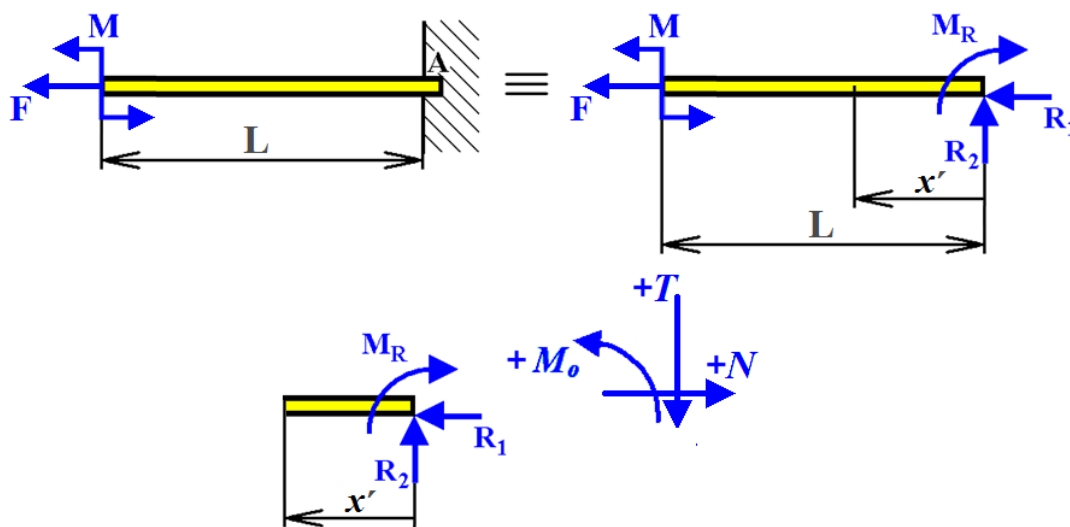
$$N_{(x)} = F, \quad T_{(x)} = 0, \quad M_{o(x)} = -M, \quad (23.4)$$

viz vykreslené průběhy na Obr. 23.8.

Obr. 23.8 Průběhy $N_{(x)}$, $T_{(x)}$ a $M_{o(x)}$ pro vetknutý nosník.

Uvedeným způsobem nebylo nutné počítat reakční účinky ve vetknutí.

Alternativní řešení je zavedením souřadného systému z opačné strany (tj. z místa vetknutí, $x' \in \langle 0; L \rangle$), potom je nutné stanovit reakce, viz Obr. 23.9.

Obr. 23.9 Alternativní řešení vetknutého nosníku zatíženého silou F a momentem M .

Pro reakční účinky pak platí $\sum F_{Xi} = 0$, tj. $R_1 = -F$, $\sum F_{Yi} = 0$, tj. $R_2 = 0$, $\sum M_{Ai} = 0$, tj. $M_R = M$.

Pro vnitřní statické účinky potom platí $N_{(x')} = F$, $T_{(x')} = 0$, $M_{o(x')} = -M$, což dává stejné hodnoty jako rovnice (23.4) a Obr. 23.8.

Třetí alternativou je aplikace Schwedler-Žuravského vět (23.1) a (23.2), tj. s přihlédnutím k zadání $\frac{dT}{dx} = 0$, $\frac{dM_o}{dx} = T$.

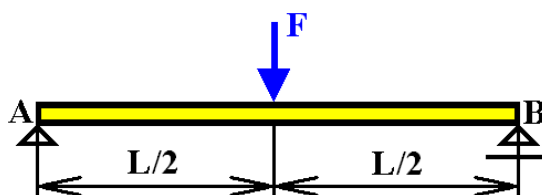
Z první rovnice vyplývá $T_{(x)} = \int 0 \, dx = C$, kde konstantu C je nutné stanovit z okrajové podmínky $T_{(x=L)} = C = -R_2 = 0$ nebo $T_{(x=0)} = C = 0$ a odtud $C = 0$ a $T_{(x)} = 0$.

Z druhé rovnice, s přihlédnutím k $T_{(x)} = 0$, vyplyne $\frac{dM_o}{dx} = 0$, $M_o(x) = \int 0 \, dx = D$. Konstanta D se stanoví z okrajové podmínky $M_o(x=L) = -M_R = -M = D$ nebo $M_o(x=0) = -M = D$ a odtud $D = -M$ a $M_o(x) = -M$.

Všechny tři výše uvedené postupy se liší složitostí, ale jednoznačně vedou ke stejným výsledkům uvedeným na Obr. 23.8.

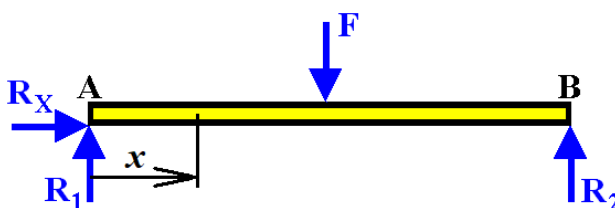
Příklad 23.2: Určete reakce a průběh vnitřních statických účinků na symetrickém jednoduše podepřeném nosníku, který je zatížen silou F , viz Obr. 23.10.

Dáno: F /N/, L /Nm/.



Obr. 23.10 Jednoduše podepřený nosník zatížený silou F .

Nejprve je nutné stanovit reakce, viz uvolnění na Obr.23.11.



Obr. 23.11 Uvolnění a definice souřadnice x .

Platí

$$\sum F_{Xi} = 0, \text{ tj. } R_x = 0,$$

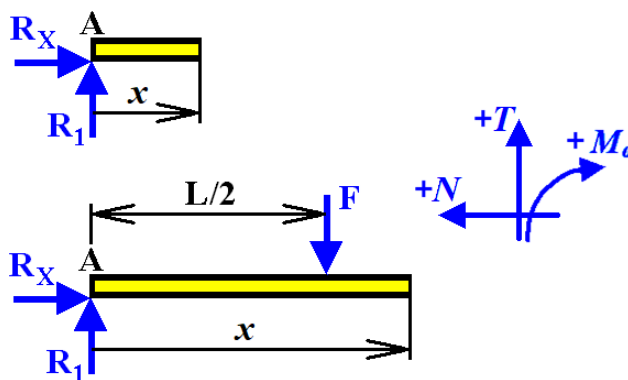
$$\sum M_{Ai} = 0, \text{ tj. } R_2 L - F \frac{L}{2} = 0, \text{ tj. } R_2 = \frac{F}{2}, \quad \sum M_{Bi} = 0, \text{ tj. } R_1 L - F \frac{L}{2} = 0, \text{ tj. } R_1 = \frac{F}{2},$$

kde navíc rovnice $\sum F_{Yi} = 0$, slouží pro kontrolu výsledků.

Protože zatížení silou F je symetrické, tak $R_1 = R_2 = \frac{F}{2}$.

Nosník má dva úseky¹⁰¹, pro zvolený globální souřadný systém s počátkem v bodu „A“, tj. $x \in \langle 0; L/2 \rangle$ a $x \in \langle L/2; L \rangle$, viz Obr. 23.12.

¹⁰¹ Úsek (pole) nosníku je definován vždy počátkem a koncem úseku. Počátky nebo konce úseků nosníku jsou definovány volným koncem, vazbou (podporou) umístěním zatížení nebo změnou střednice či změnou průřezu nosníku.



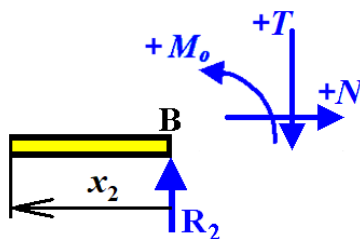
Obr. 23.12 Definice souřadných systémů a znaménková konvence.

Potom, pro vnitřní statické účinky platí vztahy uvedené v Tab. 23.1.

Tab. 23.1 Vztahy pro vnitřní statické účinky.

Interval x , viz Obr. 23.12	Odvozené vztahy
$x \in \langle 0; L/2 \rangle$	$N_{(x)} = 0$, $T_{(x)} = R_1 = \frac{F}{2}$, $M_{o(x)} = R_1 x = \frac{F}{2} x$
$x \in \langle L/2; L \rangle$	$N_{(x)} = 0$, $T_{(x)} = R_1 - F = -\frac{F}{2}$, $M_{o(x)} = R_1 x - F(x - L/2) = \frac{F}{2} (L - x)$

Alternativním způsobem odvození může být také využití lokálního souřadného systému $x_2 \in \langle 0; L/2 \rangle$ na místo $x \in \langle L/2; L \rangle$, tj. postup z opačné strany nosníku, viz Obr. 23.13.

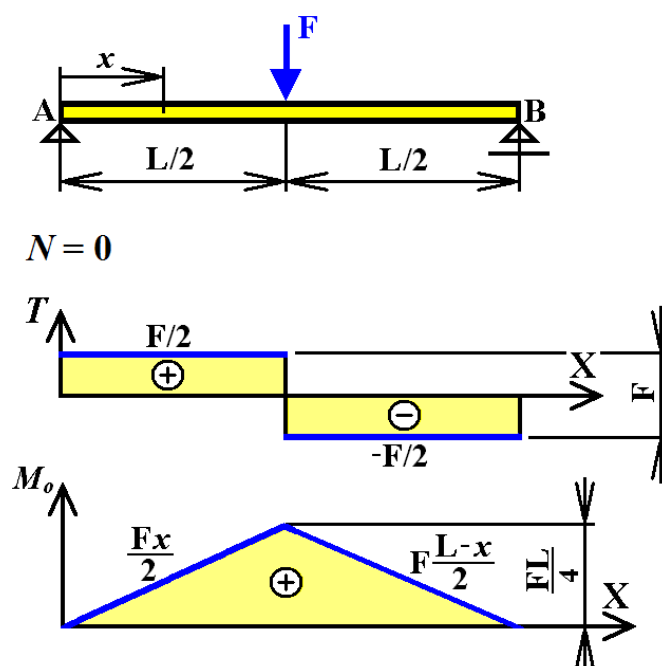
Obr. 23.13 Alternativní definice souřadného systému $x_2 \in \langle 0; L/2 \rangle$ na pravé straně nosníku.

Potom platí $N_{(x_2)} = 0$, $T_{(x_2)} = -R_2 = -\frac{F}{2}$, $M_{o(x_2)} = R_2 x_2 = \frac{F}{2} x_2$.

Jak již bylo řečeno, tak průběhy vnitřních statických účinků nezávisí na volbě souřadného systému, tj. mohou existovat různé způsoby zápisu, ale hodnoty v daném místě budou stejné. Platí tedy na úsecích $x \in \langle L/2; L \rangle$ a $x_2 \in \langle 0; L/2 \rangle$ pro hodnoty ohybových momentů

$$M_{o(x=L/2)} = M_{o(x_2=L/2)} = \frac{FL}{4}.$$

Průběhy vnitřních statických účinků jsou vykresleny na Obr. 23.14.



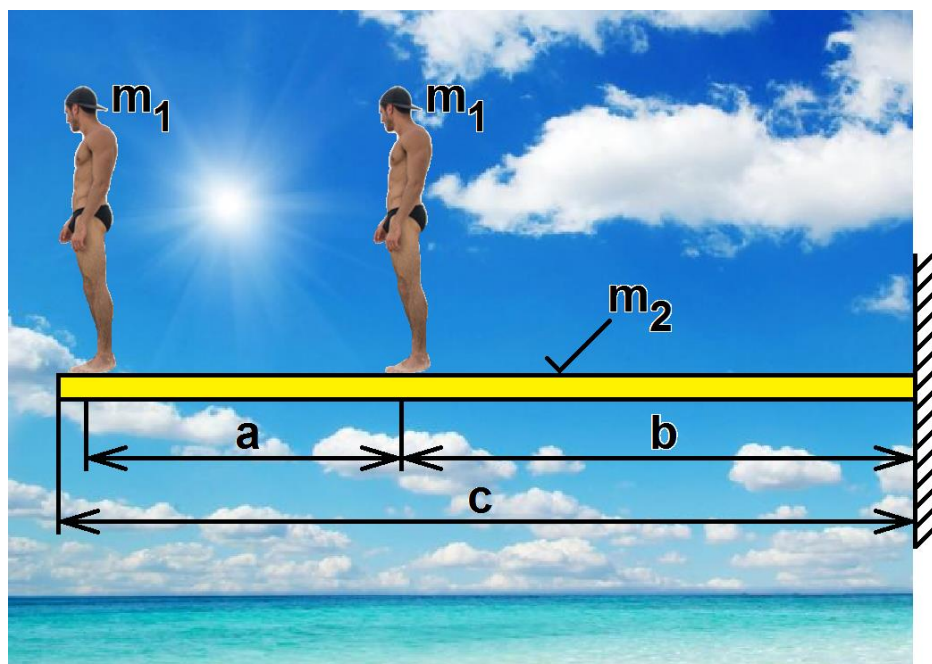
Obr. 23.14 Průběhy vnitřních statických účinků.

Z Obr. 23.14 je zřejmé, že vertikální bodová síla způsobuje skok (nespojitosť) v průběhu posouvající síly, tj. skok z hodnoty $F/2$ na $-F/2$.

Pro úplnost pochopení je vhodné stručně vysvětlit poslední alternativní postup řešení a tím je aplikace Schwedler-Žuravského věty. Například, ze známého průběhu posouvajících sil $T_{(x)} = \frac{F}{2}$, viz Tab. 23.1, lze aplikací rovnice (23.2) získat $M_{o(x)} = \int T_{(x)} dx = \frac{F}{2} \int dx$. Řešením se získá $M_{o(x)} = \frac{Fx}{2} + C$, kde integrační konstantu C je možno stanovit z okrajové podmínky konce nosníku $M_{o(x=0)} = \frac{F \cdot 0}{2} + C = 0$, tj. $C = 0$. Pro ohybový moment pak platí $M_{o(x)} = \frac{Fx}{2}$, což je rovnice z Tab. 23.1.

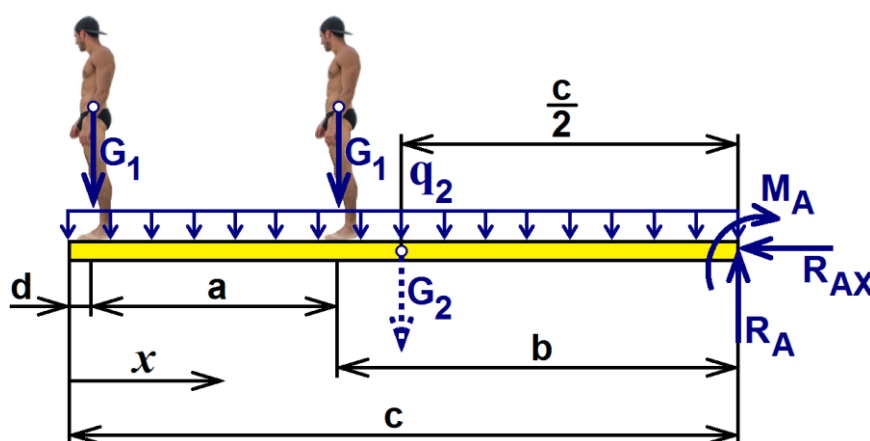
Příklad 23.3: Dvě dvojčata se stejnou hmotností m_1 stojí na skokanském můstku o hmotnosti m_2 , viz Obr. 23.15. Stanovte průběhy vnitřních statických účinků. Můstek lze považovat za homogenní kvádr a úlohu považujte za rovinnou. Uchycení skokanského můstku je provedeno vetknutím. Tento příklad navazuje na Příklad 14.13 z prvního dílu této knihy, viz [1].

Dáno: hmotnosti m_1 /kg/, m_2 /kg/, rozměry a /m/, b /m/, c /m/, tíhové zrychlení g /ms⁻²/.



Obr. 23.15 Dvojčata stojící na skokanském můstku.

Vzhledem k rozměrům skokanského můstku lze obě stojící dvojčata považovat za bodová břemena (tj. zatížení od bodové síly). V souladu s řešením příkladu 14.13, viz [1], platí pro vlastní tíhy každého dvojčete $G_1 = m_1 g$ a vlastní tíhu skokanského můstku $G_2 = m_2 g$, které působí v příslušných těžištích¹⁰², viz Obr. 23.16. Tíha G_2 je však rovnoměrně distribuována po celé délce skokanského můstku a je tedy realitovaná konstantním spojitým zatížením $q_2 = \frac{G_2}{L}$, tj. G_2 není vnější bodová síla, ale je to jen silová výslednice od spojitého zatížení q_2 .

Obr. 23.16 Silové zatížení skokanského můstku a volba souřadného systému orientovaných úseků $x \in \langle 0; d \rangle$, $x \in \langle d; c - b \rangle$ a $x \in \langle c - b; c \rangle$ a uvolnění.

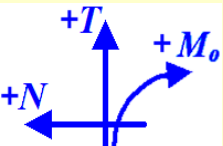
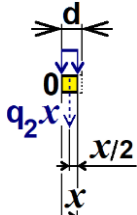
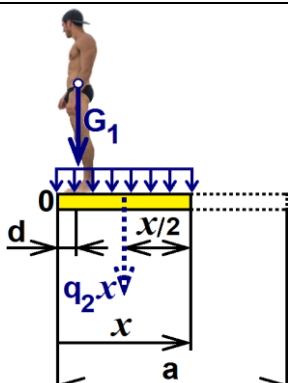
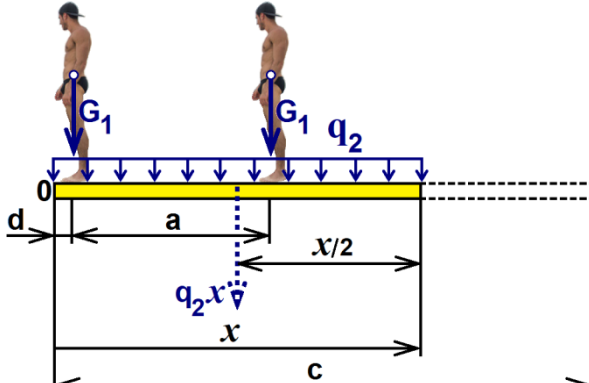
¹⁰² Pojem těžiště, jeho vlastností a výpočet je již vysvětlen v prvním dílu této knihy, viz [1].

Reakční účinky, viz Obr. 23.16, tj. $R_{AX} = 0$, $R_A = 2G_1 + G_2$ a $M_A = G_1(a + 2b) + G_2 \frac{c}{2}$, jsou také odvozeny v Příkladu 14.13.

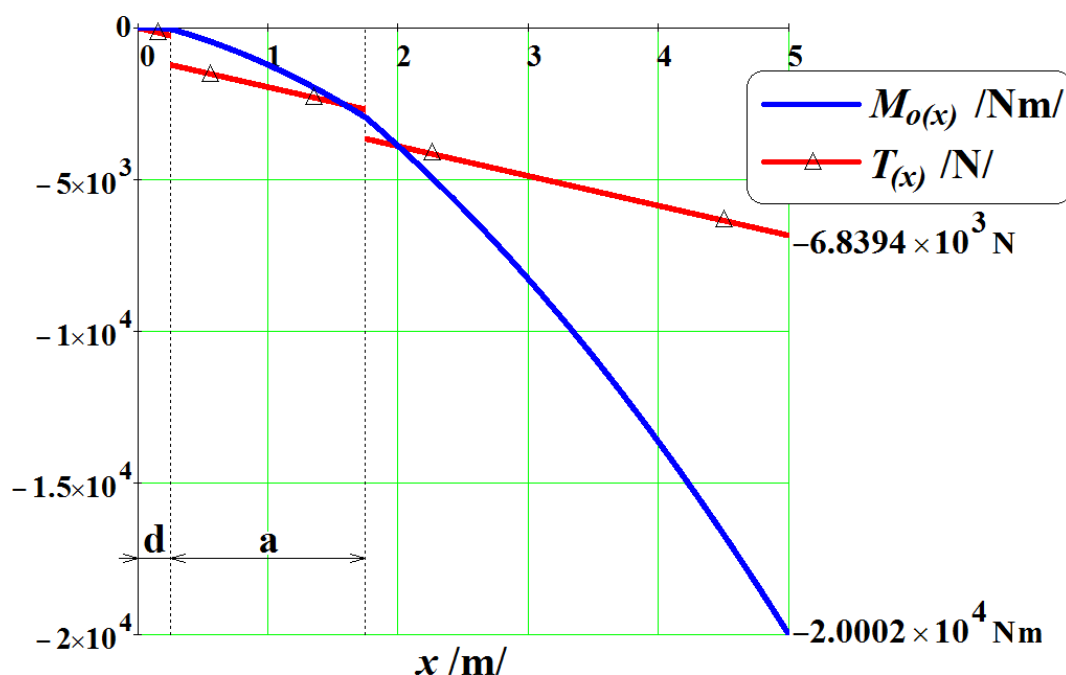
Pro kótu platí $d = c - a - b$, viz Obr. 23.16.

Vztahy pro vnitřní statické účinky jsou odvozeny v Tab. 23.2.

Tab. 23.2 Vztahy pro vnitřní statické účinky.

Interval x	Odvozené vztahy a znaménková konvence	
$x \in \langle 0; d \rangle$	 $N_{(x)} = 0$ $T_{(x)} = -q_2 x$ $M_{o(x)} = -q_2 \frac{x^2}{2}$	
$x \in \langle d; c - b \rangle$	 $N_{(x)} = 0$ $T_{(x)} = -q_2 x - G_1$ $M_{o(x)} = -G_1(x - d) - q_2 \frac{x^2}{2}$	
$x \in \langle c - b; c \rangle$	 $N_{(x)} = 0$ $T_{(x)} = -q_2 x - 2G_1$ $M_{o(x)} = -G_1(x - a) - q_2 \frac{x^2}{2}$	

Průběh posouvajících sil a ohybových momentů (pro zvolené hodnoty je znázorněn na Obr. 23.17).

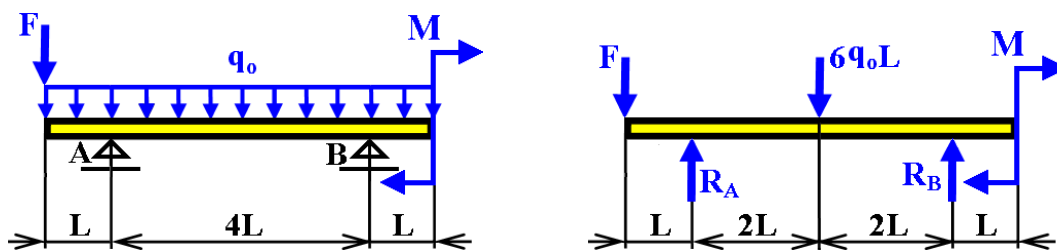


Obr. 23.17 Řešení Příkladu 23.3- průběhy posouvajících sil a ohybových momentů pro zvolené hodnoty $m_1 = 98.7 \text{ kg}$, $m_2 = 500 \text{ kg}$, $a = 1.5 \text{ m}$, $b = 3.25 \text{ m}$, $c = 5 \text{ m}$, $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$.

Průběh ohybových momentů je dán třemi kvadratickými rovnicemi a průběh posouvajících sil je dán třemi přímkami (lineárními rovnicemi).

Příklad 23.4: Stanovte průběhy vnitřních statických účinků pro nosník s převislými konci, viz Obr. 23.18(a).

Dáno: síla $F = 6000 \text{ N}$, moment $M = 5000 \text{ N m}$, délka $L = 1 \text{ m}$, konstantní spojité zatížení $q_0 = 5000 \text{ N m}^{-1}$.

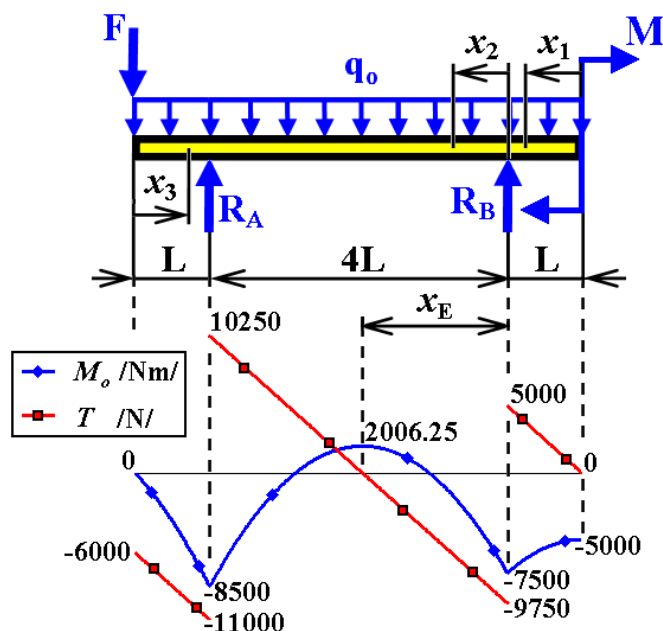


Obr. 23.18 Nosič s převislými konci (a) zadání, (b) uvolnění.

Nejprve je nutné stanovit reakce v podporách, viz uvolnění na Obr. 23.18 (b). Z momentových podmínek rovnováhy, $\sum M_{Ai} = 0$, tj. $R_B 4L + FL - M - q_0 6L 2L = 0$ a $\sum M_{Bi} = 0$, tj. $R_A 4L - F 5L - q_0 6L 2L + M = 0$, vyplývá

$$R_A = 3q_0L + \frac{5F}{4} - \frac{M}{4L} = 21250 \text{ N}, \quad R_B = 3q_0L - \frac{F}{4} + \frac{M}{4L} = 14750 \text{ N}.$$

Pro výpočet vnitřních statických účinků je vhodné zavést lokální souřadné systémy, které jsou definované například způsobem uvedeným na Obr. 23.19, tj. $x_1 \in \langle 0; L \rangle$, $x_2 \in \langle 0; 4L \rangle$ a $x_3 \in \langle 0; L \rangle$.



Obr. 23.19 Definice lokálních souřadných systémů a průběh ohybových momentů a posouvajících sil.

Potom platí

$$N_{(x_1)} = N_{(x_2)} = N_{(x_3)} = 0, \quad T_{(x_1)} = q_0 x_1 = 5000 x_1,$$

$$T_{(x_2)} = q_0(x_2 + L) - R_B = 5000(x_2 + 1) - 14750,$$

$$T_{(x_3)} = -F - q_0 x_3 = -6000 - 5000 x_3, \quad M_{o(x_1)} = -M - q_0 \frac{x_1^2}{2} = -5000 - 2500 x_1^2,$$

$$M_{o(x_2)} = R_B x_2 - M - q_0 \frac{(x_2 + L)^2}{2} = 14750 x_2 - 5000 - 2500(x_2 + 1)^2,$$

$$M_{o(x_3)} = -F x_3 - q_0 \frac{x_3^2}{2} = -6000 x_3 - 2500 x_3^2,$$

kde fyzikální jednotky souřadnic jsou $x_{1,2,3}$ /m/ a výsledky pak vycházejí v základních jednotkách SI.

Pro vykreslení průběhů vnitřních statických účinků je nezbytné vypočítat hodnoty ve specifických bodech

$$T_{(x_1=0)} = 0 \text{ N}, \quad T_{(x_1=L)} = 5000 \text{ N}, \quad T_{(x_2=0)} = -9750 \text{ N},$$

$$T_{(x_2=4L)} = 10250 \text{ N}, \quad T_{(x_3=0)} = -6000 \text{ N}, \quad T_{(x_3=L)} = -11000 \text{ N},$$

$$M_{o(x_1=0)} = -5000 \text{ Nm}, \quad M_{o(x_1=L)} = -7500 \text{ Nm}, \quad M_{o(x_2=0)} = -7500 \text{ Nm},$$

$$M_{o(x_2=4L)} = -8500 \text{ Nm}, \quad M_{o(x_3=0)} = 0 \text{ Nm}, \quad M_{o(x_3=L)} = -8500 \text{ Nm}.$$

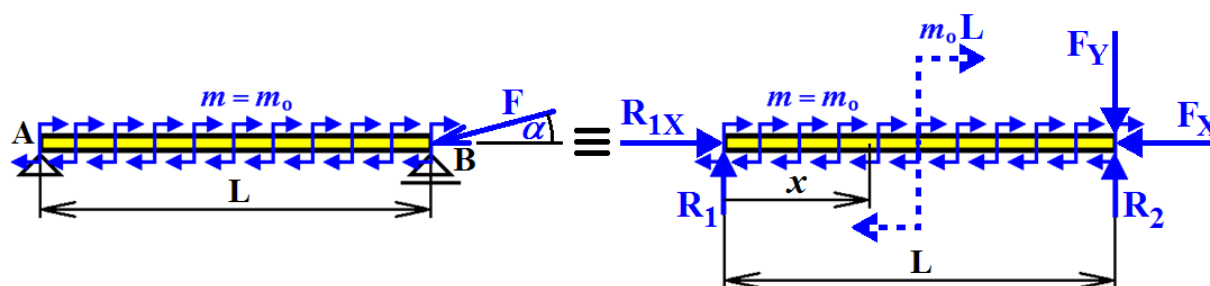
Průběhy posouvajících sil a ohybových momentů jsou vykresleny ve spodní části Obr. 23.19.

Polohu lokálního maxima ohybového momentu na úseku $x_2 \in \langle 0; 4L \rangle$, lze stanovit z polohy extrému funkce¹⁰³ (tj. v neznámé vzdálenost x_E). Musí platit 2. Schwedler-Žuravského věta (23.2), tj. v tomto případě $\frac{dM_{o(x_2)}}{dx} = T_{(x_2)}$, ze které vyplývá podmínka extrému $T_{(x_2=x_E)} = 5000(x_E + 1) - 14750 = 0$.

Řešením se získá poloha lokálního extrému $x_E = \frac{14750}{5000} - 1 = 1.95$ m a velikost lokálního extrému ohybového momentu je $M_{o(x_2=x_E)} = -2006.25$ N m, viz Obr. 23.19.

Příklad 23.5: Stanovte reakce a rovnice průběhů vnitřních statických účinků pro jednoduše podepřený nosník, který je zatížen spojité rozloženým konstantním momentem (intenzitou momentu) m_0 a silou F , viz Obr. 23.20(a).

Dáno: spojité rozložené moment m_0 /N/, délka L /m/, síla F /m/ a úhel α /rad/.



Obr. 23.20 Nosič s převislými konci (a) zadání, (b) uvolnění.

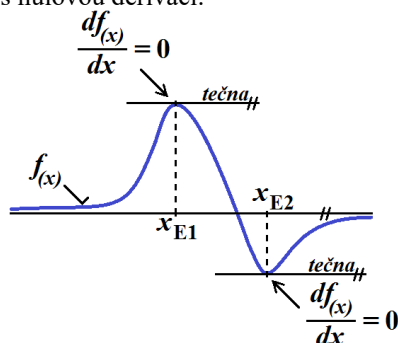
Podle Obr. 23.20(b), platí $F_X = F \cos \alpha$, $F_Y = F \sin \alpha$ a pro reakce platí z rovnic rovnováhy ($\sum F_{Xi} = 0$, $\sum M_{Ai} = 0$, $\sum M_{Bi} = 0$) vztahy $R_{1X} = F_X$, $R_1 = -m_0$, $R_2 = m_0 + F_Y$.

Pro souřadný systém $x \in \langle 0; L \rangle$, viz Obr. 23.20(b), lze stanovit rovnice vnitřních statických účinků

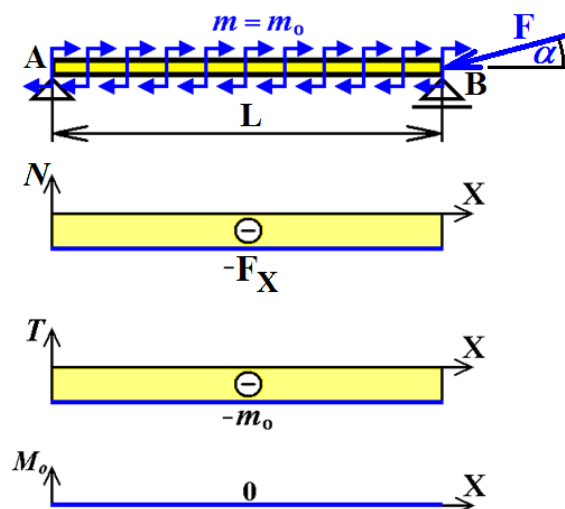
$$N_{(x)} = -R_{1X} = -F_X, \quad T_{(x)} = R_1 = -m_0, \quad M_{o(x)} = R_1 x + m_0 x = 0.$$

Průběh vnitřních statických účinků je znázorněn an Obr. 23.21.

¹⁰³ **Extrém funkce** je takový bod funkce, ve kterém nabývá největší hodnoty (maximum) nebo nejmenší hodnoty (minimum). Obvykle se hledají body s nulovou derivací.



Extrémy funkce $f(x)$ (v bodu x_{E1} je maximum $f_{(x=x_{E1})}$ a v bodu x_{E2} je minimum $f_{(x=x_{E2})}$)

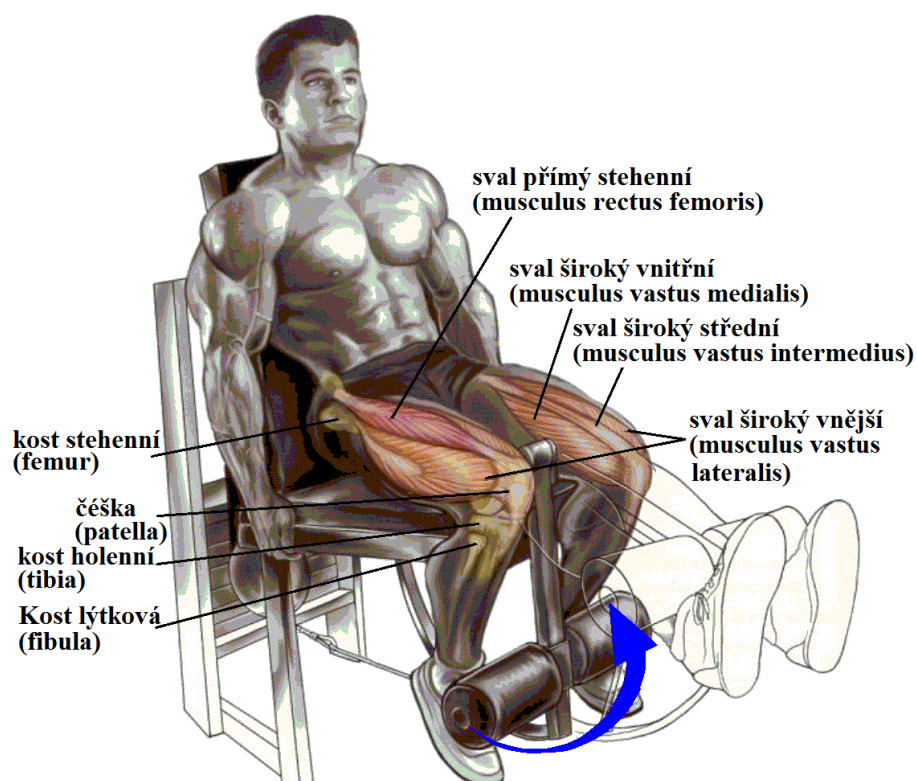


Obr. 23.21 Průběh vnitřních statických účinků.

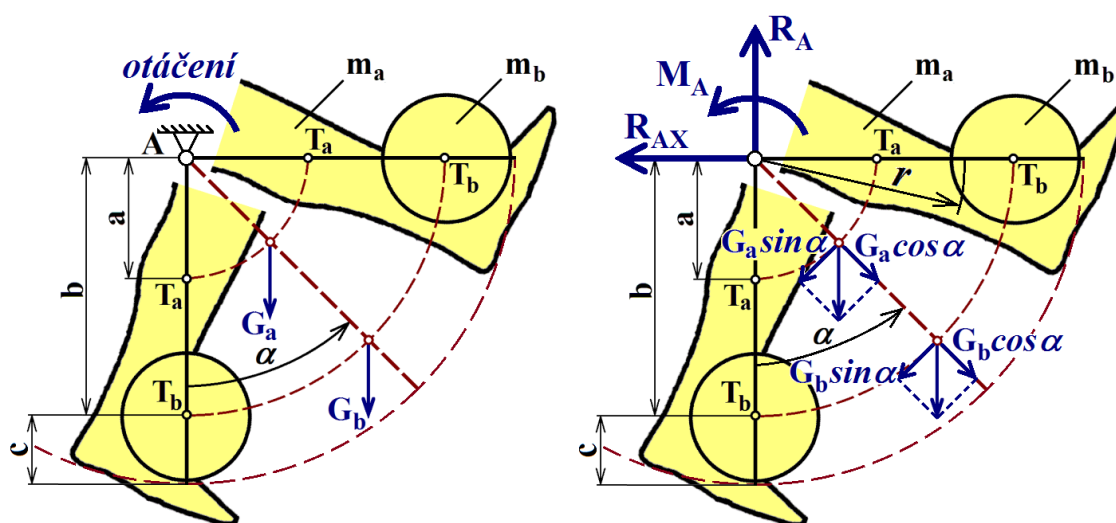
Příklad 23.6: Cvičení svalů stehna předkopáváním, viz Obr. 23.22. Určete co nejjednodušeji reakční účinky a orientační průběh vnitřních statických účinků v průběhu cvičení, které působí na obě nohy. Známe jsou hmotnosti části jedné nohy včetně boty m_a a hmotnost celé zvedané/otáčené konstrukce m_b , dále poloha těžiště¹⁰⁴ T_a spodní části nohy včetně boty a poloha těžiště T_b zvedané konstrukce, viz Obr. 23.22 a 23.23. Úlohu řešte jako statickou, tj. vliv možných dynamických účinků neuvažujte. Naznačte také možné zpřesnění řešení průběhu vnitřních statických účinků. Příklad navazuje na řešení Příkladu 14.5, viz první díl této knihy [1].

Dáno: hmotnosti $m_a = 6 \text{ kg}$, $m_b = 20 \text{ kg}$, rozměry $a = 0.24 \text{ m}$, $b = 0.5 \text{ m}$, $c = 0.15 \text{ m}$ tíhové zrychlení $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$.

¹⁰⁴ Pojem těžiště a jeho výpočet je vysvětlen v prvním dílu této knihy, viz [1].



Obr. 23.22 Cvičení steh předkopáváním; zdroj internet a autorem upraveno a doplněno.

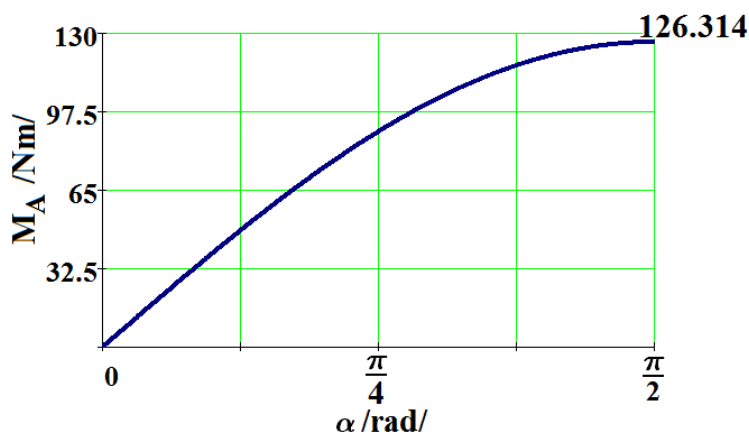


Obr. 23.23 Cvičení steh předkopáváním.

Za předpokladu uvažování dokonale tuhých těles, statické úlohy a zanedbání pasivních odporů, je možno zavedením úhlu $\alpha \in (0; \pi/2)$, viz Obr. 23.23(a), definovat pohyb po kružnici (otáčení kolem bodu „A“). Bod „A“ je střed otáčení, umístěný v oblasti kolenního kloubu (articulatio genus).

V příkladu 14.5 jsou stanoveny vlastní tíhy části dolní končetiny a boty $G_a = m_a g = 58.84 \text{ N}$ a celé zvedané/otáčené konstrukce $G_b = m_b g = 196.14 \text{ N}$. Tyto tíhové síly mají výslednice v těžištích T_a , T_b , viz Obr. 23.23.

Protože dochází k pohybu celé soustavy (otáčení kolem bodu „A“), pak takový pohyb je vyvolán prací svalů stehna, které se projeví zátěžným momentem M_A , viz Obr. 23.23 (b). Potom z rovnováhy v bodu „A“ vyplývá pro výsledný zátěžný moment působící na obě končetiny $M_A = 2G_a a \sin\alpha + G_b b \sin\alpha = (2G_a a + G_b b) \sin\alpha = 126.314 \sin\alpha$, viz Obr. 23.24. Bez působení momentu M_A vyvolaného prací svalů není možné provádět cvičení předkopáváním.



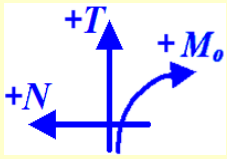
Obr. 23.24 Průběh výsledného zátěžného momentu při cvičení stehem předkopáváním $M_A = 126.314 \sin\alpha$.

Maximální moment je při maximálním předkopu (tj. při úhlu $\alpha = \pi/2$) a má hodnotu $M_{A\text{MAX}} = 126.314 \text{ Nm}$. Ještě jedenkrát je zdůrazněno, že odvození je pro obě končetiny, tj. uvažuje se síla $2G_a$.

Dle Obr. 23.23(b), lze stanovit výslednou reakční sílu pro obě kolena, a to z podmínek rovnováhy, tj. $R_{AX} = 0 \text{ N}$, $R_A = 2G_a + G_b = 313.82 \text{ N}$.

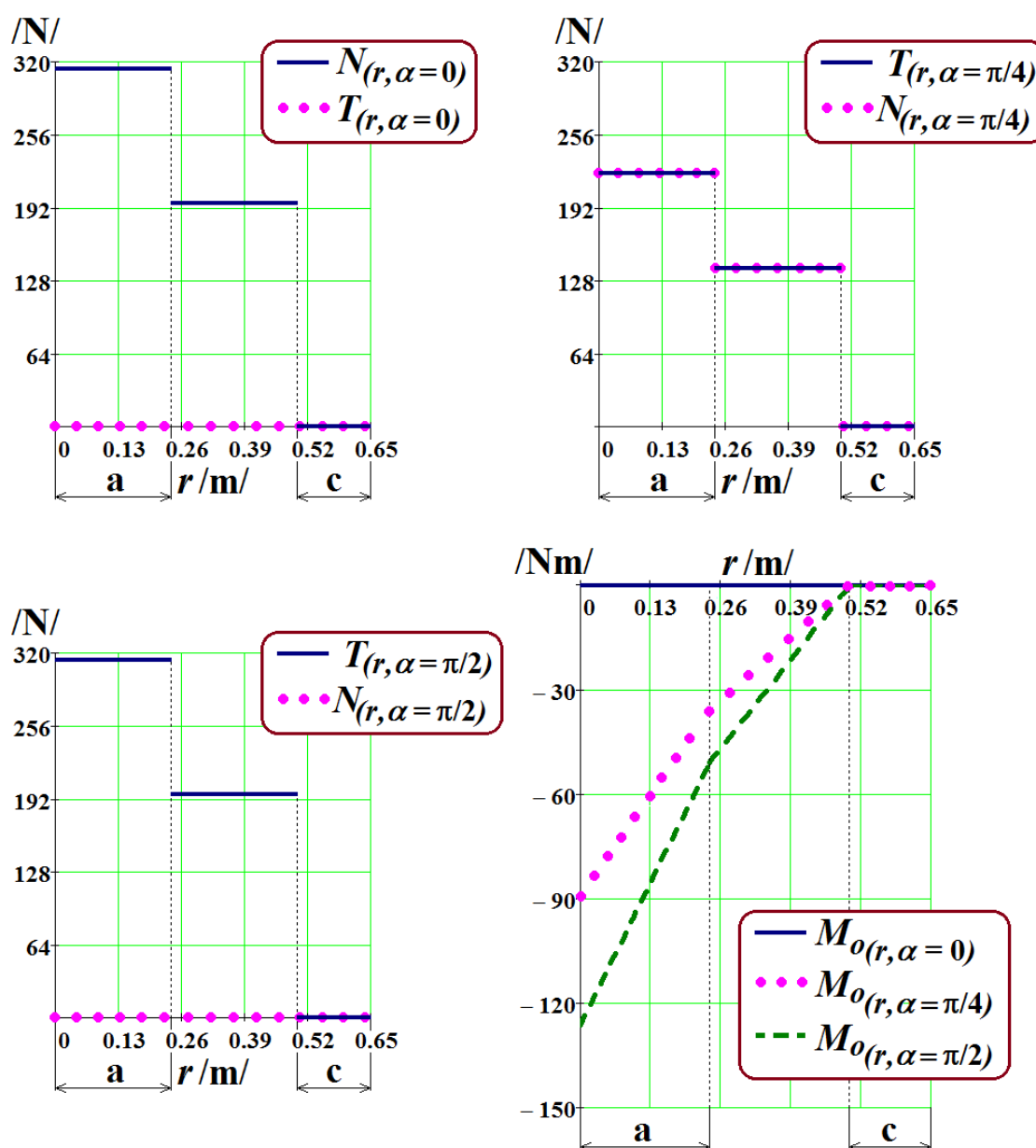
V polárním souřadném systému r, α , viz Obr. 23.23, Kapitola 21 a [1], lze definovat průběhy vnitřních statických účinků v závislosti na poloměru r a úhlu α , viz Tab. 23.3.

Tab. 23.3 Vztahy pro vnitřní statické účinky při cvičení předkopáváním (součet pro obě končetiny).

Interval r	Odvozené vztahy a znaménková konvence	
$r \in \langle 0; a \rangle$	$N_{(r,\alpha)} = R_A \cos\alpha = (2G_a + G_b) \cos\alpha$ $T_{(r,\alpha)} = R_A \sin\alpha = (2G_a + G_b) \sin\alpha$ $M_{o(r,\alpha)} = -M_A + R_A r \sin\alpha = [2G_a(r - a) + G_b(r - b)] \sin\alpha$	
$r \in \langle a; b \rangle$	$N_{(r,\alpha)} = R_A \cos\alpha - 2G_a \cos\alpha = G_b \cos\alpha$ $T_{(r,\alpha)} = R_A \sin\alpha - 2G_a \sin\alpha = G_b \sin\alpha$ $M_{o(r,\alpha)} = -M_A + R_A r \sin\alpha - 2G_a(r - a) \sin\alpha = G_b(r - b) \sin\alpha$	

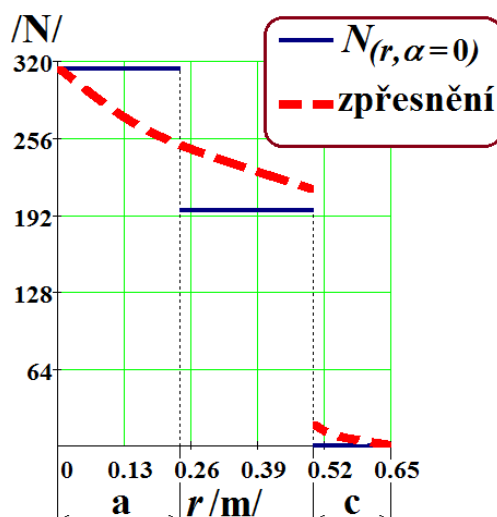
$r \in \langle b; b + c \rangle$	$N_{(r,\alpha)} = R_A \cos \alpha - 2G_a \cos \alpha - G_b \cos \alpha = 0$ $T_{(r,\alpha)} = R_A \sin \alpha - 2G_a \sin \alpha - G_b \sin \alpha = 0$ $M_{o(r,\alpha)} = -M_A + R_A r \sin \alpha - 2G_a(r - a) \sin \alpha - G_b(r - b) \sin \alpha = 0$
----------------------------------	---

Průběhy vnitřních statických účinků pro zvolené hodnoty jsou vykresleny na Obr. 23.25. Z těchto průběhů jsou dobře patrné skoky v průbězích $N_{(r,\alpha)}$ a $T_{(r,\alpha)}$, které jsou způsobeny jednoduchou představou, že účinky tíhových sil jsou nahrazeny bodovými silami působícími v těžištích. S tím také následně souvisí, že vnitřní statické účinky na chodidle a kotníku (tj. po délce kóty c) jsou nulové, avšak hmota celé končetiny včetně chodidla je zahrnuta v síle G_a . To je obecně v rozporu se skutečností, ale v mnoha případech řešení je to přijatelné a vhodné zjednodušení, které nemění hodnotu $M_{A\text{MAX}}$.



Obr. 23.25 Vnitřní statické účinky při cvičení předkopáváním (součet pro obě končetiny).

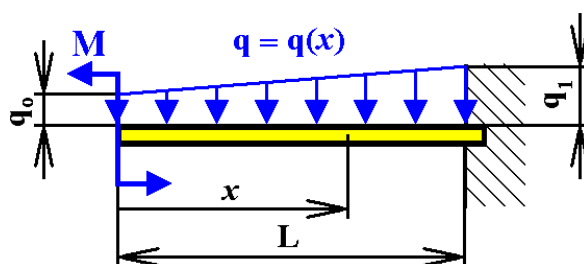
Na základě předchozího rozboru skutečnosti, nabízí se také možné zpřesnění průběhů vnitřních statických účinků, které je bližší realitě, a to nahrazením bodové tíhové síly G_a v končetině příslušným spojitým zatížením (např. obecného lichoběžníkového typu), jehož silová výslednice působí ve stejném těžišti G_a . Potom budou nenulové vnitřní statické účinky také na kótě c , příkladem může být průběh $N_{(r,\alpha)}$ viz Obr. 23.26. Nutno podotknout, že úloha se tím mírně zkomplikuje, ale je řešitelná a že velikost reakčních účinků M_A , R_A a R_{AX} se tímto zpřesněním nezmění.



Obr. 23.26 Zpřesnění průběhu normálové síly při cvičení předkopáváním (součet pro obě končetiny).

Příklad 23.7: Stanovte rovnice posouvajících sil a ohybových momentů pro vetknutý nosník zatížený lichoběžníkovým spojitým zatížením daným lineární funkcí $q(x) = q_0 + \frac{q_1 - q_0}{L} x$ a vnějším momentem M , viz Obr. 23.27.

Dáno: koeficienty spojitého zatížení q_0 /Nm⁻¹/, q_1 /Nm⁻¹/, moment M /Nm/, délka L /m/.



Obr. 23.27 Vetknutý nosník zatížený lichoběžníkovým spojitým zatížením a momentem.

Souřadný systém $x \in \langle 0; L \rangle$ je definovaný na Obr. 23.27. Z 1. Schwedler-Žuravského věty (23.1) vyplývá $\frac{dT}{dx} = -q(x)$, tj. $T(x) = -\int q(x) dx = -\int \left(q_0 + \frac{q_1 - q_0}{L} x \right) dx$.

Řešením se získá $T(x) = -q_0 x - \frac{q_1 - q_0}{2L} x^2 + C$, kde C /N/ je integrační konstanta, která se určuje z okrajové podmínky volného konce $T_{(x=0)} = 0$, tj. $C = 0$ N. Posouvající síla je tedy daná rovnicí

$$T_{(x)} = -q_0 x - \frac{q_1 - q_0}{2L} x^2. \quad (23.4)$$

Podobně, z 2. Schwedler-Žuravského věty (23.2) vyplývá $M_{o(x)} = \int T_{(x)} dx$, tj. $M_{o(x)} = \int -q_0 x - \frac{q_1 - q_0}{2L} x^2 dx = -q_0 \frac{x^2}{2} - \frac{q_1 - q_0}{6L} x^3 + D$, kde D [Nm] je integrační konstanta. Konstanta D se opět určuje z okrajové podmínky volného konce $M_{o(x=0)} = -M$, tj. $D = -M$. Pro rovnici ohybového momentu pak platí

$$M_{o(x)} = -q_0 \frac{x^2}{2} - \frac{q_1 - q_0}{6L} x^3 - M. \quad (23.5)$$

Průběh posouvající síly je dán kvadratickou rovnicí a průběh ohybových momentů je dán kubickou rovnicí.

Příklad 23.8: Stanovte jednoduchým způsobem reakce v podloží a průběh normálových sil ve stojné noze baletky při atitudě¹⁰⁵, viz Obr. 23.28. Úlohu řešte jako statickou. Známa je hmotnost těla baletky včetně oblečení a baletních špiček¹⁰⁶ m_{corpus} a také její tělesná výška h . Pro odvození využijte znalostí z prvního dílu této knihy, viz [1], kde jsou odborníky doporučované vztahy pro výpočet hmotností částí těla, viz poslední sloupec Tab. 23.4, a také délky částí těla dle Wintera, viz Obr. 23.29 (a), a polohy těžišť částí dolní končetiny, viz Obr. 23.29 (b). Určete také orientačně, jakými silami na sebe vzájemně působí v kyčelním kloubu stojná noha a zbytek těla.

Dáno: tíhové zrychlení $g = 9.807 \text{ ms}^{-2}$, hmotnost $m_{\text{corpus}} = 49 \text{ kg}$, tělesná výška $h = 1.68 \text{ m}$ a vztahy uvedené v Tab. 23.4 a na Obr. 23.29.



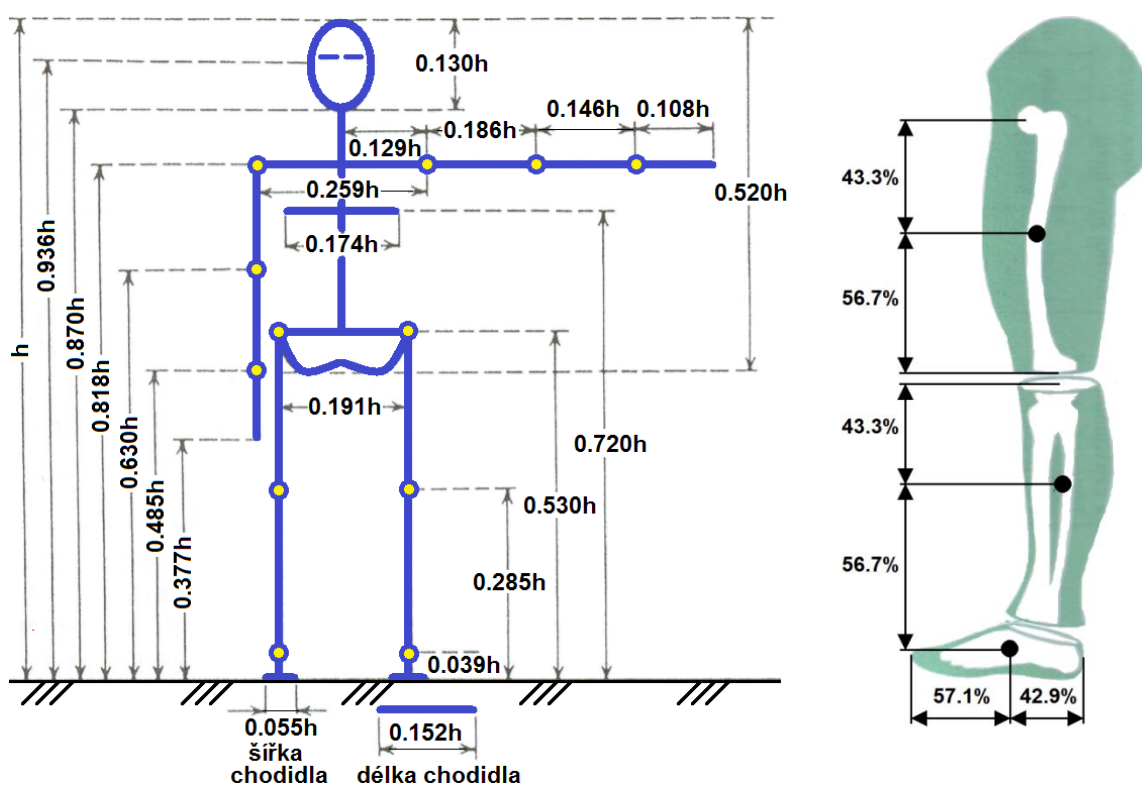
Obr. 23.28 Baletka při atitudě; původní fotografie převzata od autorky Justyna Brozdowska z [15] https://www.pngitem.com/middle/bihhRJ_png-images-free-download-ballet-dancer-png-transparent/ a následně autorem této kapitoly upravena a doplněna.

¹⁰⁵ **Atituda** nebo přesněji francouzsky **attitude** je jeden ze základních postojů na jedné noze v klasickém tanci.

¹⁰⁶ **Baletní špičky** jsou druhem obuvi převážně používaný baletkami pro tanec na špičkách (en pointe).

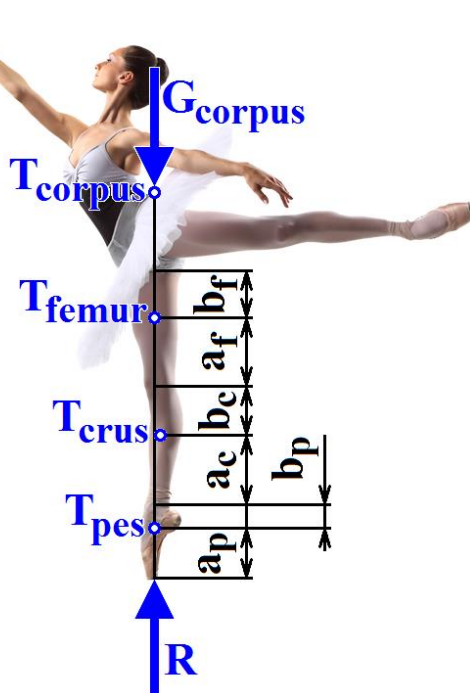
Tab. 23.4 Stanovení hmotnosti segmentů, metoda relativních segmentů, převzato z [1]. Pro výpočet hmotnosti segmentu platí vztah $m_{segment} = n_{segment} m_{corpus}$.

Segment lidského těla		$n_{segment}$ /1/ dle Webb Associates	$n_{segment}$ /1/ dle De Leva	$n_{segment}$ /1/ odborníky doporučené hodnoty	
Trup a hlava		0.45	—	žena	0.3780
				muž	0.3928
Hlava a krk		—	žena 0.0668	žena	0.0688
			muž 0.0694	muž	0.0715
Pánev		0.134	—	žena	0.1358
				muž	0.1302
Trup a pánev		—	žena 0.4257	žena	0.4451
			muž 0.4346	muž	0.4515
Horní končetina	Nadloktí (paže)	0.028	žena 0.0255	žena	0.0281
			muž 0.0271	muž	0.0298
	Předloktí	0.017	žena 0.0138	žena	0.0152
			muž 0.0162	muž	0.0178
	Ruka	0.006	žena 0.0056	žena	0.0062
			muž 0.0061	muž	0.0067
Dolní končetina	Stehno	0.100	žena 0.1478	žena	0.1318
			muž 0.1416	muž	0.1262
	Bérec	0.043	žena 0.0481	žena	0.0481
			muž 0.0433	muž	0.0433
	Noha	0.014	žena 0.0129	žena	0.0138
			muž 0.0137	muž	0.0147



Obr. 23.29 (a) Charakteristické rozměry člověka dle Wintera, viz [1], (b) charakteristické délkové poměry polohy těžišť v segmentech dolní končetiny vztahované na délku segmentu (membrum inferius), viz [1].

Pro celkovou tíhovou sílu působící v těžišti těla (latinsky corpus) baletky platí $G_{\text{corpus}} = m_{\text{corpus}} g = 49 \times 9.807 = 480.54 \text{ N}$. Působíště výslednice tíhové síly G_{corpus} leží v těžišti baletky T_{corpus} , viz Obr. 23.30.



Obr. 23.30 Uvolnění a poloha lokálních těžišť segmentů nohy (latinsky femur, crus, pes) a globálního těžiště.

Baletka je v atitudě ve statické rovnováze, a tedy při uvolnění lze předpokládat, že reakční síla R leží na stejné přímce jako síla G_{corpus} . Potom platí $R = G_{\text{corpus}} = 480.54 \text{ N}$. Jinými slovy, baletní špička je zatížena celou hmotností baletky.

Pro nejjednodušší řešení, je vhodné předpokládat hmotnost oblečení a baletních špiček jako rovnoměrně rozloženou po celém těle baletky (tj. projeví se v každém segmentu těla, což ovlivní výpočet opravdu zanedbatelným způsobem).

Protože úkolem je stanovit jednoduchým způsobem průběhy normálové síly ve stojné dolní končetině (membrum inferius), je vhodné stanovit délky, hmotnosti a polohu těžišť segmentů dolní končetiny.

V souladu s posledním sloupcem Tab. 23.4 a Obr. 23.30, je možno stanovit hmotnosti a tíhové síly segmentů dolní končetiny, viz Tab. 23.5. Při řešení je stojná noha rozdělena na tři segmenty, kterými jsou femur (stehenní část) s délkou $a_f + b_f$, crus (bérceová část) s délkou $a_c + b_c$ a pes (noha) s délkou $a_p + b_p$. V délce $a_p + b_p$ je také zahrnut rozměr baletní špičky.

Tab. 23.5 Hmotnosti a tíhové síly působící ve stojné končetině při atitudě.

Segment	Hmotnost $m_{segment}$ /kg/	Tíhová síla $G_{segment}$ /N/ $G_{segment} = m_{segment}g$
Stehno (femur)	$m_{femur} = 0.1318 \times m_{corpus} = 6.458$	$G_{femur} = 63.34$
Bérec (crus)	$m_{crus} = 0.0481 \times m_{corpus} = 2.357$	$G_{crus} = 23.11$
Noha (pes)	$m_{pes} = 0.0138 \times m_{corpus} = 0.676$	$G_{pes} = 6.63$
Dolní končetina (membrum inferius)	$m_{membrum} =$ $= m_{femur} + m_{crus} + m_{pes} = 9.491$	$G_{membrum} =$ $= m_{membrum}g = 93.08$

Tíhové síly G_{femur} , G_{crus} a G_{pes} působí v lokálních těžištích segmentů T_{femur} , T_{crus} a T_{pes} , které jsou dány Obr. 23.29(b) a 23.30 a zapsány v Tab. 23.6. Kóty a_i značí distální vzdálenost a kóty b_i značí proximální vzdálenost na segmentu. Například, kóta a_f je 56.7 % délky stehna atp.

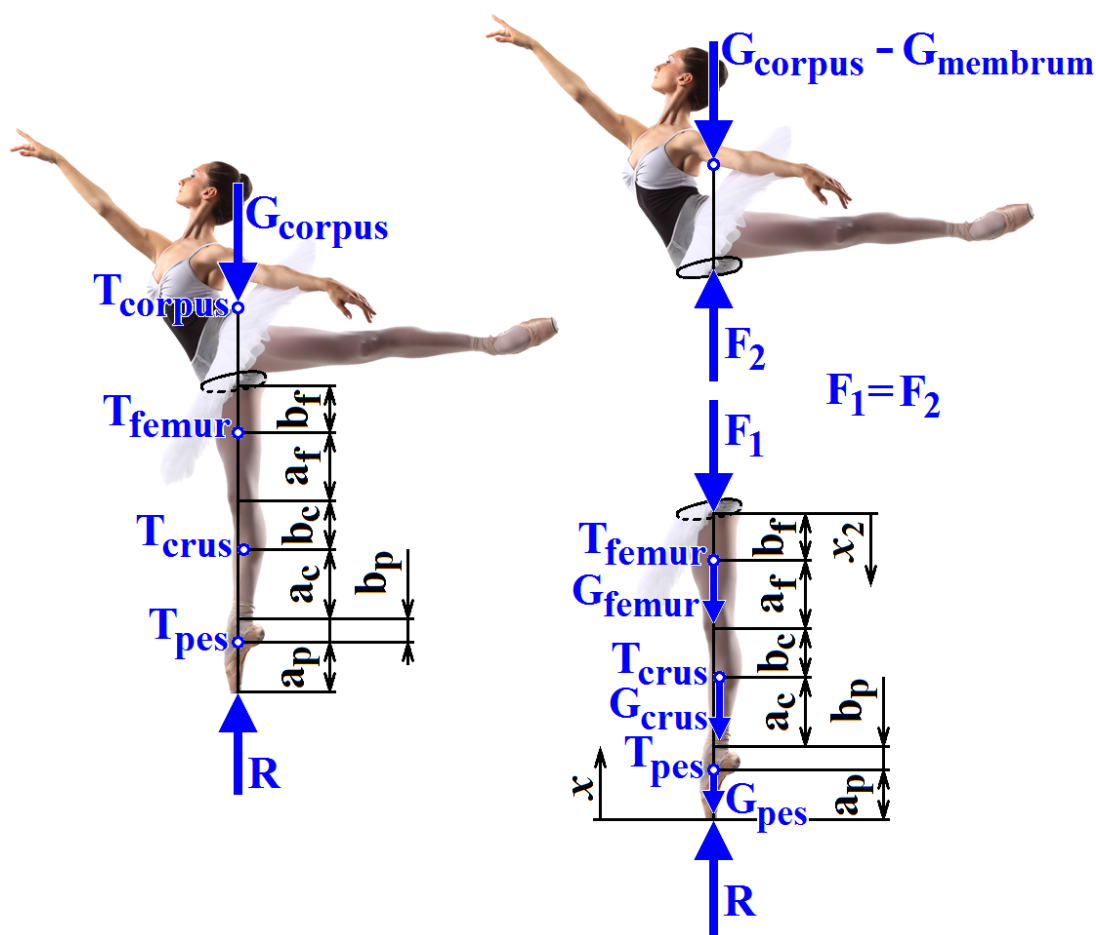
Tab. 23.6 Délky segmentů a poloha lokálních těžišť ve stojné končetině při atitudě.

Segment	Kóty /m/		
	Délka segmentu $a_i + b_i$ /m/, viz Obr. 23.29(a)	Distální a_i	Proximální b_i
Stehno (femur)	$(0.530 - 0.285)h = 0.4116$	$a_f = 0.567 \times 0.4116 =$ $= 0.2334$	$b_f = 0.433 \times 0.4116 =$ $= 0.1782$
Bérec (crus)	$(0.285 - 0.039)h = 0.4133$	$a_c = 0.567 \times 0.4133 =$ $= 0.2343$	$b_c = 0.433 \times 0.4133 =$ $= 0.179$
Noha (pes)	0.260 (délka baletních špiček obutých na noze v taneční poloze „en pointe“)	$a_p = 0.571 \times 0.260 =$ $= 0.1485$	$b_p = 0.429 \times 0.260 =$ $= 0.1115$
Dolní končetina (membrum inferius)	$\sum_i(a_i + b_i) = 1.0849$		

Z tab. 23.6 vyplývá také délka dolní končetiny s baletními špičkami při „en pointe“, která je 1.0849 m.

Jinou alternativou stanovení délek segmentů, než „tabulkové“ hodnoty, je samozřejmě také antropometrické měření in vivo, které ale není vždy možné.

Orientačně lze také stanovit, jakými silami na sebe vzájemně působí v kyčelním kloubu stojná noha a zbytek těla. Pro řešení je vhodné použít Eulerovu metodu virtuálního řezu znázorněnou na Obr. 23.31.



Obr. 23.31 Eulerova metoda myšleného řezu použitá pro stanovení sil F_1 a F_2 , znázornění tíhových sil v segmentech dolní končetiny a definice souřadných systémů úseků x , x_2 dolní končetiny.

Protože baletka (těleso) je ve statické rovnováze, potom musí být v rovnováze také každá část jejího těla. Potom lze z horního řezu na Obr. 23.31 (tj. tělo baletky bez jedné končetiny), který je také v rovnováze, určit sílu

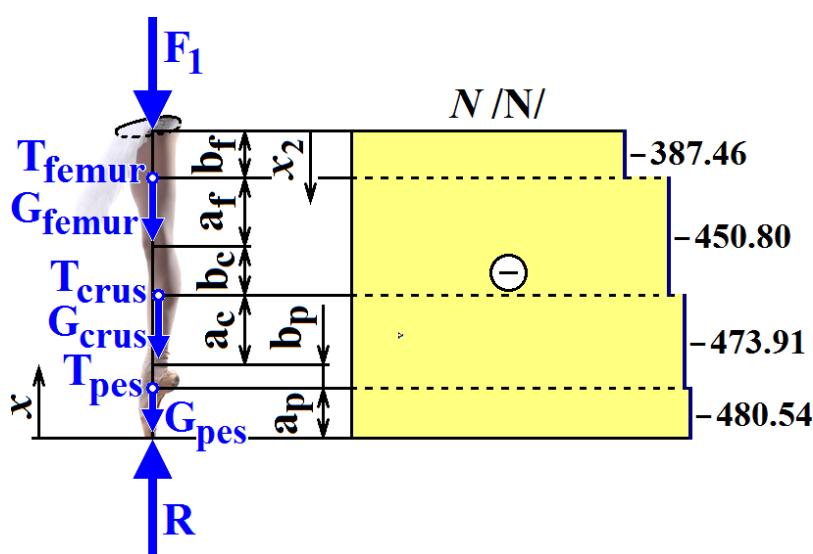
$$F_2 = G_{\text{corpus}} - G_{\text{membrum}} = 480.54 - 93.08 = 387.46 \text{ N.}$$

Síla F_2 však musí být v rovnováze se silou F_1 , která působí na spodním řezu. Potom platí $F_1 = F_2 = 387.46 \text{ N.}$

Na základě zjednodušení, že spojitě rozložené tíhové síly v jednotlivých segmentech dolní končetiny se nahradí bodovými silami G_i , lze rychlým způsobem určit průběhy normálových sil v končetině v závislosti na zvolených souřadnicích x a x_2 , viz Obr. 23.31 a Tab. 23.7 a Obr. 23.32. Odvozené průběhy normálových sil jsou pak na každém úseku dolní končetiny konstantní.

Tab. 23.7 Průběhy normálových sil ve stojné končetině při atitudě.

Segment	Úsek stojné dolní končetiny (membrum inferius)	Rovnice normálové síly
Stehno (femur)	$x_2 \in \langle 0; b_f \rangle$	$N_{(x_2)} = -F_1 = -387.46 \text{ N}$
	$x_2 \in \langle b_f; b_f + a_f \rangle$	$N_{(x_2)} = -F_1 - G_{\text{femur}} = -450.80 \text{ N}$
Bérec (crus)	$x_2 \in \langle b_f + a_f; b_f + a_f + b_c \rangle$	$N_{(x_2)} = -F_1 - G_{\text{femur}} = -450.80 \text{ N}$
	$x \in \langle a_p + b_p; a_p + b_p + a_p \rangle$	$N_{(x)} = -R + G_{\text{pes}} = -473.91 \text{ N}$
Noha (pes)	$x \in \langle a_p; a_p + b_p \rangle$	$N_{(x)} = -R + G_{\text{pes}} = -473.91 \text{ N}$
	$x \in \langle 0; a_p \rangle$	$N_{(x)} = -R = -480.54 \text{ N}$



Obr. 23.32 Průběhy normálových sil ve stojné noze při atitudě.

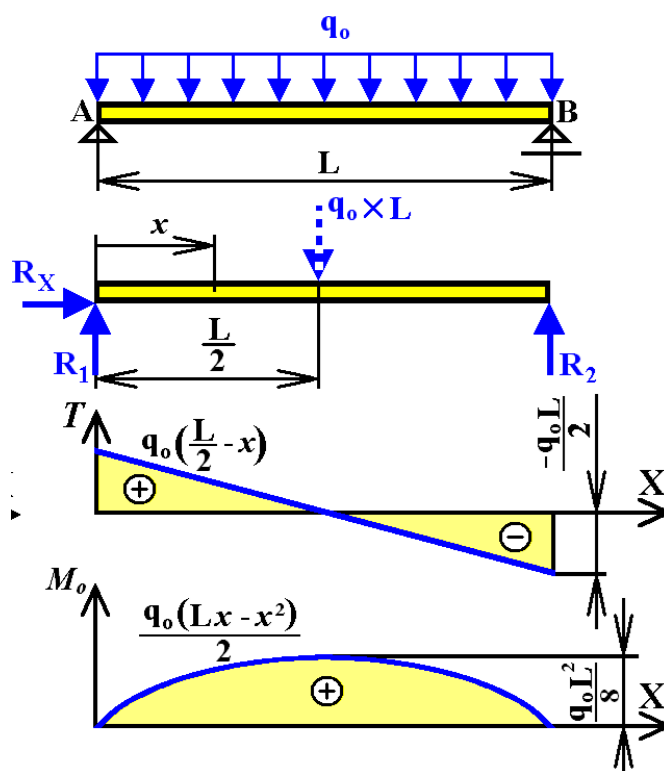
Průběh normálové síly je záporný, tj. ve stojné noze je tlakové zatížení, což je čtenáři této knihy jistě zřejmé ☺.

Zpřesněný postup, který se však příliš neliší, je předveden v Příkladu 25.9.

23.4 Otázky k pochopení látky

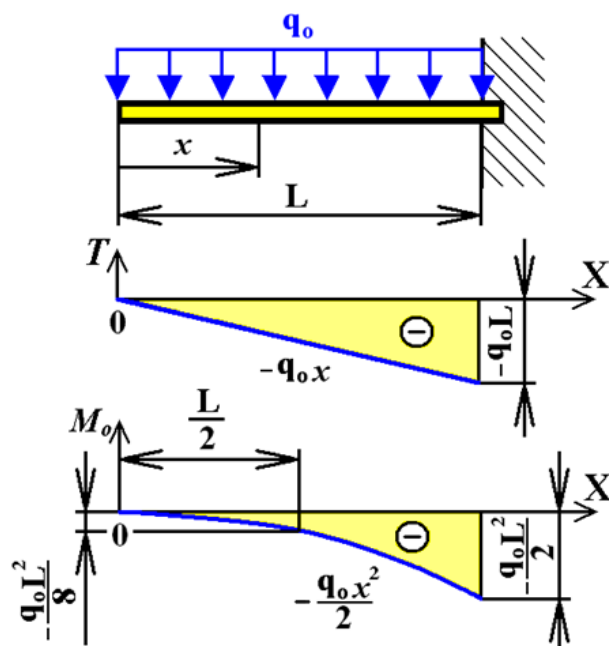
1. Co je vysvětleno na Obr. 23.1?
2. Proč mají síly F_1 a F_2 na Obr. 23.31 stejnou velikost?
3. Co je to nosník?
4. Jaké znáte druhy nosníků?
5. Jak se stanovují vnitřní statické účinky na nosníku?
6. Jaké znáte druhy vnitřních statických účinků?
7. Značí se ohybový moment v této knize jako M_o ?

8. Vysvětlete znaménkovou konvenci aplikovanou při vyšetření vnitřních statických účinků.
9. Je fyzikální jednotka ohybového momentu Nm^{-1} ?
10. K čemu se používají Schwedler-Žuravského věty?
11. Odvoďte Schwedler-Žuravského věty.
12. Je pravda, že $\frac{dT}{dx} = M_o$?
13. Co je to spojitě zatížení?
14. Je fyzikální jednotka spojitěho zatížení nosníku $q \text{ Nm}^{-1}$?
15. Je pravda, že hodnoty vnitřních statických účinků jsou závislé na volbě souřadného systému?
16. V souladu s definicí v této knize, je pravda, že pokud je v nosníku kladná normálová, tak je nosník stlačován?
17. Prostý nosník zatížený konstantním spojitým zatížením q_o , viz Obr. 23.33. Dokážete spočítat reakční síly a odvodit a vykreslit vztahy pro posouvající síly a ohybové momenty?



Obr. 23.33 Prostý nosník zatížený konstantním spojitým zatížením, uvolnění a průběhy vnitřních statických účinků, pro reakční síly platí $R_1 = R_2 = \frac{q_o L}{2}$.

18. Vetknutý nosník zatížený konstantním spojitým zatížením q_o , viz Obr. 23.34. Dokážete odvodit a vykreslit vztahy pro posouvající síly a ohybové momenty?



Obr. 23.34 Veknutý nosník zatížený konstantním spojitým zatížením, uvolnění a průběhy vnitřních statických účinků.

23.5 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Shlédněte varovné video o tom, že přerušit nosník autogenem¹⁰⁷ se nemusí vyplatit, viz [9] https://www.idnes.cz/zpravy/zahranicni/rusko-petrohrad-stadion-demolice-zriceni-nehoda-smrt-delnik-obet.A200201_093133_zahranicni_dtt.
2. Shlédněte video o samonosném mostu Leonarda da Vinciho¹⁰⁸, který lze postavit jen z nosníků a bez jakéhokoliv spojovacího materiálu, viz Obr. 23.35 a internetový odkaz [16] <https://www.youtube.com/watch?v=fkoeCq1vso0>.

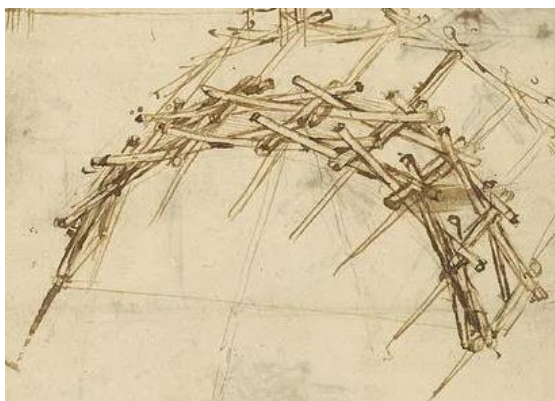
Snad potom získáte k nosníkům pozitivní vztah ☺.

¹⁰⁷ **Autogen** je hovorově používaný termín pro zařízení určené k řezání plamenem nebo svařování plamenem.

¹⁰⁸ **Leonardo di ser Piero da Vinci** (1452–1519) byl italský malíř, sochař, architekt, přírodovědec, anatom, hudebník, spisovatel, vynálezce, konstruktér a bojovník za práva zvířat.

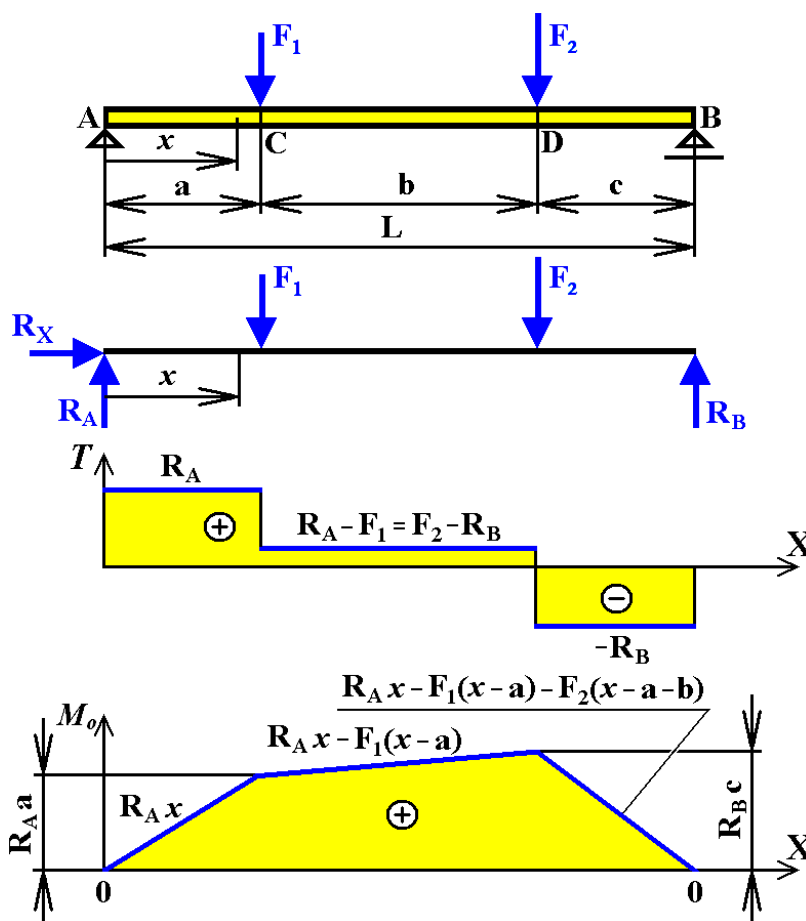


Autoportrét a obraz svatého Jana Křtitele (zdroj obrázků internet)



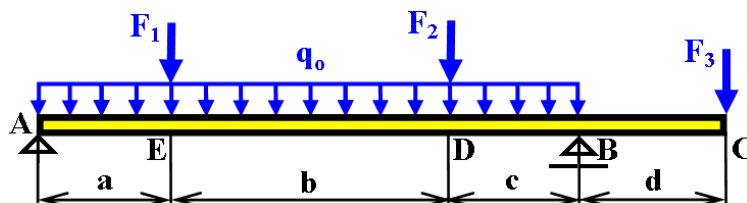
Obr. 23.35 Most Leonarda da Vinciho – krása elegantního nápadu jak využít nosníky; zdroj obrázků internet.

3. Stanovte reakce a průběhy vnitřních statických účinků na prostém nosníku zatíženým silami F_1 a F_2 , viz Obr. 23.36.



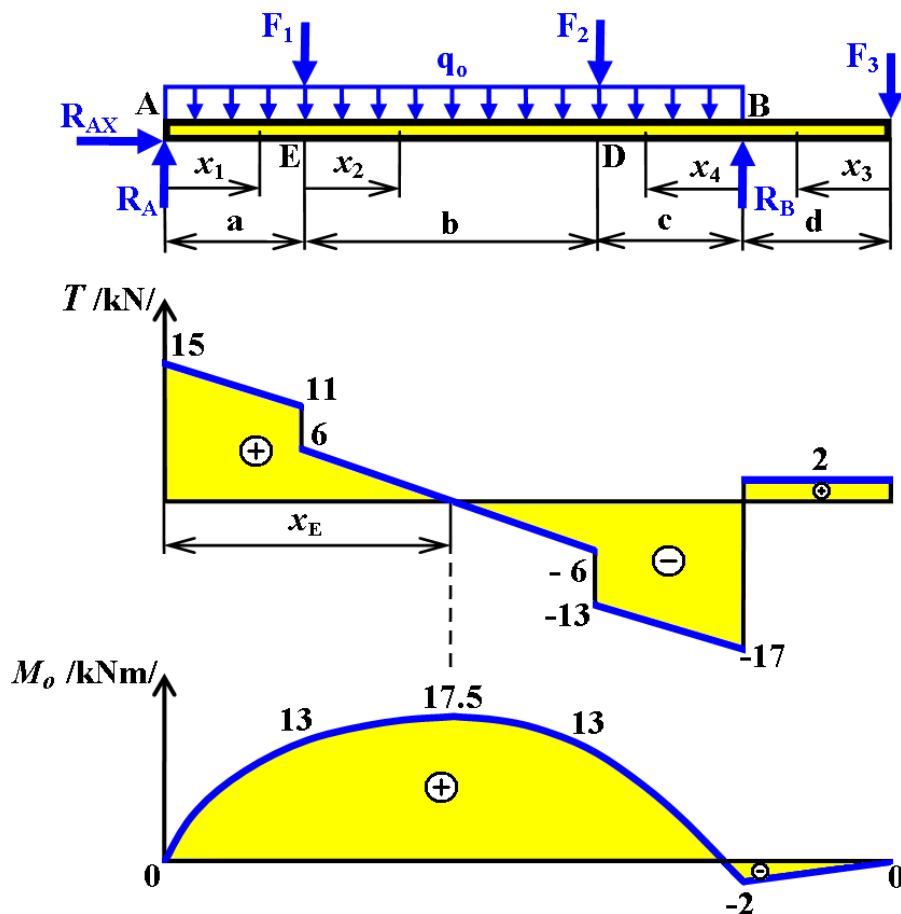
Obr. 23.36. Prostě podepřený nosník a průběhy vnitřních statických účinků, kde pro reakce platí $R_A = \frac{F_1(b+c)+F_2c}{L}$, $R_B = \frac{F_1a+F_2(a+b)}{L}$.

4. Pro pochopení problematiky může být vhodné shlédnout videa, viz [10] <https://onlineschool.cz/pruznost-pevnost/princip-vvu/> nebo e-learningové texty [11] http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/ZMech/CD_Zaklady_mechaniky/text/ZM05_v_nitri_stat_ucinky.pdf
5. Stanovte reakce a průběhy posouvajících sil a ohybových momentů pro nosník znázorněný na Obr. 23.37. Dáno: $a = 1\text{ m}$, $b = 3\text{ m}$, $c = 1\text{ m}$, $d = 1\text{ m}$, $F_1 = 5000\text{ N}$, $F_2 = 7000\text{ N}$, $F_3 = 2000\text{ N}$ a $q_0 = 4000\text{ N m}^{-1}$.



Obr. 23.37

Reakce $R_{AX} = 0\text{ kN}$, $R_A = 15\text{ kN}$, $R_B = 19\text{ kN}$ a průběhy posouvajících sil a ohybových momentů jsou znázorněny na Obr. 23.38.

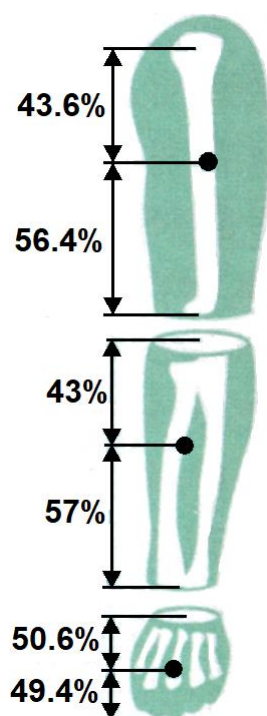


Obr. 23.38 Průběhy posouvajících sil a ohybových momentů.

6. Naznačte řešení nebo přímo určete jednoduchým způsobem reakce v uchycení a průběh normálových sil v horní uchycené končetině při statickém visu na jedné končetině, viz Obr. 23.39. Dáno: tíhové zrychlení $g = 9.807 \text{ ms}^{-1}$, hmotnost $m_{\text{corpus}} = 49 \text{ kg}$, tělesná výška $h = 1.68 \text{ m}$ a vztahy uvedené v Tab. 23.4 a na Obr. 23.29 a 23.40.



Obr. 23.39 Statický vis na jedné ruce a nástin jeho řešení (Kristýna Ester Frydrýšková, 4. 4. 2020).



Obr. 23.40 Orientační polohy těžišť (středů hmotnosti) segmentů horní končetiny člověka. Jsou uvedena procenta příslušné délky daného segmentu, blíže [1].

7. Co jiného vás napadne, mimo definice v mechanice/biomechanice, při pojmu vnitřní síla? Jestliže nevíte, tak se s „rozumem“ a „nadhledem“ podívejte na [17] ☺.
8. Máte-li další dotazy, využijte [18] ☺.

23.6 Reference ke kapitole 23

- [1] Frydrýšek, K.: *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Frydrýšek, K.: *Basic Strength and Elasticity of Materials*, Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, VSB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, Czech Republic, 2016, pp. 1-264.
- [3] Jíra, A., Jandeková, D., Hlobilová, A., Hájková, P., Janouchová, E., Řehounek, L., Zrůbek, L.: *Sbírka příkladů stavební mechaniky*, ISBN 978-80-01-06301-9, Fakulta stavební, ČVUT v Praze, 2019, pp. 1-113, https://mech.fsv.cvut.cz/wiki/images/6/67/Sbirka_prikladu_SUK.pdf
- [4] Horyl, P.: *Engineering mechanics: syllabus*, VŠB – Technical University of Ostrava, ISBN 80-248-0801-3, Ostrava, 2004.
- [5] Ondrouch, J., Šňupárková, J.: *Příručka statiky s příklady*, VŠB – TU Ostrava, 2004, ISBN: 8070789700, pp. 1-165.

- [6] Kunz, J.: *Technická mechanika*, Nakladatelství ČVUT Praha, ISBN 978-80-0105-563-2, Praha, 2014, pp. 1-113.
- [7] Žiaran, S.: *Technická mechanika – Statika*, Vydavateľstvo STU v Bratislave, Slovakia, 2011, ISBN: 9788022735681, pp. 1-388.
- [8] Krčál, O., Frydrýšek, K., Adámková, L.: *Příklady z pružnosti a pevnosti I (část 2)*, VŠB-Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-1826-9, Ostrava, 2008, Czech Republic, pp. 1-124.
- [9] Video: Dělník přerážl nosník a stadion v Petrohradu se nečekaně zhroutil
https://www.idnes.cz/zpravy/zahranicni/rusko-petrohrad-stadion-demolice-zrizeni-nehoda-smrt-delnik-obet.A200201_093133_zahranicni_dtt.
- [10] Princip VVÚ stručně a jasně, Onlineschool.cz, <https://onlineschool.cz/pruznost-pevnost/princip-vvu/>.
- [11] E-learning, Vnitřní statické účinky nosníku, (vsb.cz)
http://www.elearn.vsb.cz/archivcd/FS/ZMech/CD_Zaklady_mechaniky/text/ZM05_vnitri_stat_ucinky.pdf.
- [12] Frydrýšek, K.: *Nosníky a rámy na pružném podkladu 1 (Beams and Frames on Elastic Foundation)*, VŠB-TU Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, ISBN 80-248-1244-4, Ostrava, Czech Republic, 2006, pp. 1-463.
- [13] Frydrýšek, K., Jančo, R. et al: *Nosníky a rámy na pružném podkladu 2 (Beams and Frames on Elastic Foundation 2)*, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-1743-9, Ostrava, 2008, Czech Republic, pp. 1-516.
- [14] Frydrýšek, K., Nikodým, M. et al: *Nosníky a rámy na pružném podkladu 3 (Beams and Frames on Elastic Foundation 3)*, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava, ISBN: 978-80-248-2257-0, Ostrava, 2010, Czech Republic.
- [15] Png Images Free Download - Ballet Dancer Png, Transparent Png , Transparent Png Image – PNGitem, https://www.pngitem.com/middle/bihhRJ_png-images-free-download-ballet-dancer-png-transparent/.
- [16] How to make a da Vinci bridge, Full-size Leonardo Da Vinci bridge - YouTube
<https://www.youtube.com/watch?v=fkoeCq1vso0>.
- [17] 15 zvyků, které mají lidé s mimořádnou vnitřní silou (forbes.cz) <https://forbes.cz/15-zvyku-ktere-maji-lide-s-mimoradnou-vnitri-silou/>.
- [18] Zkušenosti autora této knihy při studiu a výuce předmětů souvisejících se statikou, mechanikou a biomechanikou.

24. STRUČNĚ O MATERIÁLECH, JEJICH POUŽITÍ A VLASTNOSTECH

Tato kapitola v jednoduchosti a stručnosti vysvětluje technický pojem **materiál**, jeho využití, členění a jeho základní vlastnosti. V návaznosti na předchozí text a prvního dílu této knihy, viz [1] je nezbytným, do jisté míry i laicky jednoduchým, úvodem do obecně velmi rozsáhlého multioboru, kterým je **materiálové inženýrství**, resp. **materiálová věda**¹⁰⁹. Tak jako v celé této knize, opět je uvedeno, že pro hlubší studium problematiky je tato kapitola nedostačující.

Nicméně platí, že bez materiálu a bez jeho poznání nelze nic vyrobit, případně ani v lékařství nelze léčit. Nezapomeňte, že také živý organismus se skládá z různorodých materiálů. **Správná volba materiálu a jeho znalost je pro výzkum i praktické lékařské či inženýrské či biomechanické aplikace nezbytná.**

Vrcholem poznatku této kapitoly je Hookeův zákon a modul pružnosti v tahu a tlaku, jejichž znalost patří k základům předpokladům řešení mnoha úloh mechaniky či biomechaniky, respektive inženýrství. Získané poznatky jsou dále rozvíjeny v dalších kapitolách a dílech této knihy.

Jestliže je čtenář dostatečně znalý problematiky, pak může tuto kapitolu „přeskočit“ a pokračovat dále v četbě.

Autorem této kapitoly jsou Karel Frydrýšek, Leopold Hrabovský a Josef Hlinka.

24.1 Definice materiálu

Existuje poměrně dostatek definic pojmu materiál. Několik z nich je uvedeno zde.

Jednoduše **z fyzikálního pohledu, materiál je látka, která se může vyskytovat v různých látkových skupenstvích a složení a kterou lze fyzikálními či chemickými metodami poznávat.** Nebo materiál se skládá z elementárních částic, které mají mezi sebou nějakou fyzikální (chemickou) vazbu.

Z pohledu **ekonomiky. Materiál je hmotný ekonomický zdroj jednorázově spotřebovaný při zajišťování výsledků podnikatelského procesu**, případně je to také **jedna z forem oběžných aktiv v ekonomice**, viz např. [2] <https://www.vyznam-slova.com/materi%C3%A1l>.

Z pohledu **vzniku a výroby. Materiál je zdroj, ze kterého se něco vyrábí nebo něco vzniká**, např. dřevo pro výrobu trámů nebo biologický materiál, ze kterého vznikne buňka či organismus. Je to tedy **fyzický (materiální) prostředek k uskutečnění něčeho nového.**

Samozřejmě také existují „studijní materiály“, tj. pokud možno ucelený soubor informací (poznatků) potřebný ke zvládnutí učiva, které jistě dobře znají studenti.

Případně podle účetnictví, materiál je jednou ze složek zásob, které jsou součástí krátkodobého majetku neboli oběžných aktiv, viz [3] <http://www.testyzucetnictvi.cz/slovnicek-ucetnich-pojmu.php?pojem=materiál> aj. Tímto směrem pohledu na materiál se však tato kapitola nezabývá ☺.

¹⁰⁹ **Materiálová věda** (anglicky **Materials science**) je mezioborová věda, která má za sebou bohatou historii. Je zaměřená na výzkum a vývoj nových či stávajících materiálů použitelných v celé škále lidské činnosti. K tomu využívá především přístupy fyziky, chemie a inženýrství. Blíže např. https://cs.wikipedia.org/wiki/Materi%C3%A1lov%C3%A9_v%C4%9Bdy.

Aplikace materiálu také souvisí s technologií a lidskými potřebami.

24.2 Členění materiálu

Existuje mnoho pohledů na to, jak rozčlenit či zachytit různorodost materiálů a jejich vlastností. Úmyslně zde používáme slovo „členění“ namísto „dělení“ materiálu, protože dělením/rozdělením, tj. dezintegrací materiálu, se zabývá např. obrábění materiálu ☺.

- Podle **látkového skupenství**¹¹⁰. Existují materiály ve formě **pevná látka, kapalina, plyn, plazma** a dále do určité míry „exotické“ formy, kterými jsou **kvark-gluonové plazma**¹¹¹, **Bose-Einsteinův kondenzát**, **Supratekutost**¹¹² aj.
- Podle **vztahu k organismům**. Existují materiály **organické** a **anorganické**. Materiály mohou být **biologicky kompatibilní (biokompatibilní)** či **biologicky nekompatibilní**, což souvisí se snášenlivostí materiálů v biologickém prostředí. S tím je vázaná také široká škála posuzování interakce materiálu s organismy, např. **toxická**¹¹³, **cytotoxická**¹¹⁴, **virocita**¹¹⁵, **baktericita**¹¹⁶, **alergie**¹¹⁷, **karcinogeny**¹¹⁸, **teratogeny**¹¹⁹, **mutageny**¹²⁰ aj., viz např. Obr. 24.1 Další informace jsou uvedeny např. ve vyhláškách [4] <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/HTML/?uri=OJ:L:2008:353:FULL&from=EN> a [5] <https://osha.europa.eu/cs/themes/dangerous-substances/clp-classification-labelling-and-packaging-of-substances-and-mixtures>. Důležitou charakteristikou je také **biostabilita materiálů**, kterou lze vysvětlit jako zachování původních materiálových vlastností i po zavedení do organismu, viz např. [6] <https://lekarske.slovniky.cz/pojem/biostabilita>. Při tom všem je důležité si uvědomit, že s časem se vlastnosti materiálu mohou měnit.

¹¹⁰ **Skupenství látky**, někdy nazývané také jako **fáze**, je forma látky definovaná uspořádáním molekul/atomů částic a typickými vlastnostmi. Látka může v jeden okamžik najednou existovat ve formě nejvýše tří skupenství. Např. za určitých podmínek vidíme v jeden okamžik páru, led a kapalnou vodu v přírodě.

¹¹¹ **Kvark-gluonové plazma** (někdy nazývané **quagma**, anglicky ve zkratce **QGP**) je skupenství hmoty existující při extrémně vysokých teplotách a tlacích. Obsahuje kvarky a gluony, podobně jako běžná hadronová hmota. V běžné hadronové hmotě jsou kvarky pevně svázané, ale v kvark-gluonovém plazmatu jsou kvarky uvolněné. Blíže např. https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvark-gluonov%C3%A9_plazma.

¹¹² **Supratekutost** je vlastnost kapaliny s nulovou viskozitou, tzv. supratekutiny (z latinského supra = nad).

¹¹³ **Toxická** (jedovatost) je schopnost vyvolat otravu. Pro míru stupně toxicity byla zavedena stupnice **LD** (z anglického lethal dose, což znamená smrtelná dávka). Potom např. LD₉₀ je označení dávky při které uhynulo 90 % potkanů.

¹¹⁴ **Cytotoxická** je schopnost ničit buňky. Např. jedy a v některých situacích také léky či imunitní buňky aj.

¹¹⁵ **Virocita** je schopnost ničit viry.

¹¹⁶ **Baktericita** je schopnost ničit bakterie.

¹¹⁷ **Alergie** je přehnaná a nepřiměřená reakce imunitního systému organismu na látky běžné v okolním prostředí.

¹¹⁸ **Karcinogeny** látky, které způsobují nebo napomáhají rakovinnému bujení buněk.

¹¹⁹ **Teratogeny** faktory, které podněcují vznik vročené vývojové vady.

¹²⁰ **Mutageny** faktory, které podněcují změny genetické informace (mutace).



Obr. 24.1 Značení (a) Toxické látky, (b) Látky nebezpečné pro životní prostředí, (c) Látky nebezpečné pro zdraví, viz [4] a [5].

- Podle **použitých zdrojů**. Materiály mohou být **přírodní**, např. krokodýlí kůže nebo **umělé** např. syntetická napodobenina kůže. Mezi přírodní materiály také patří maso nebo obilniny, které se dále zpracovávají na další potraviny např. hamburgery, mouku atp.
- Podle stupně recyklovatelnosti jsou materiály **recyklovatelné**, **obtížně recyklovatelné** nebo **nerecyklovatelné**.
- Podle dostupnosti a nákladů jsou materiály **vzácné** (např. radioaktivní kalifornium) nebo **běžné** (např. hlína) či **drahé** nebo **levné**.¹²¹
- Podle chemického pohledu existují **kovy**, **polokovy** a **nekovy**.
- Podle stupně použitelnosti. Existují **surové materiály**, které jsou surovinami pro výrobu klasických materiálů. Příkladem surového materiálu je např. železná ruda, která je základní surovinou při výrobě a zpracování železných slitin.
- Z pohledu **technologie výroby** lze u materiálu zmínit některé možnosti výroby či zpracování. Např. **slévateľnost**, **obrobiteľnosť**, **svařovateľnosť**, **tvařiteľnosť**, **odolnosť vůči korozi**, **tvrdost** či **mikrotvrdost** aj. Nicméně, technologie jsou předmětem dalšího dílu této knihy.
- Z **pohledu struktury** či **chemické stejnorodosti** existují materiály **ryzí** (tj. vysoké čistoty a stejnorodosti např. čisté zlato), **kompozitní** (např. slitiny kovů nebo sklo vyztužené kovovou mřížkou).
- Z pohledu **profesního** či **průmyslového** lze dělit materiály na **strojírenské**, **automobilové**, **gumářenské**, **stavební**, **těžební**, **hutnické**, **biomedicínské**, **kosmické**, **vojenské**, pro **sport** aj.
- Z pohledu **mechaniky**, existují materiály **ideální**, které mají dokonalou ideální strukturu bez imperfekcí a materiály **reálné**. Materiál může být **homogenní** (surodý, stejnorodý), tj. má v každém místě stejné vlastnosti, nebo **nehomogenní**. Materiál může být také **izotropní** (tj. vlastnosti materiálu jsou nezávislé na směru) nebo **anizotropní**. Stoprocentní míra homogenity a izotropie je výsadou jen ideálního materiálu. Nicméně, reálné materiály lze v mnoha případech považovat také za izotropní či homogenní, přičemž chyba takové idealizace může být zanedbatelná. Specifickým příkladem anizotropie či částečné izotropie je **ortotropie**, tj. stav kdy v určitých směrech má

¹²¹ **Nejdražším materiálem** je zřejmě velmi těžce dostupná antihmota, viz [7] <https://www.euro.cz/clanky/10-nejdrazsich-materialu-1449377/>.

materiál stejné vlastnosti (kost, dřevo). Touto problematikou se podrobněji zabývá další díl této knihy.

- Významné je také členění podle **fyzikálních či mechanických vlastností** např. podle **hustoty materiálu**, která je již vysvětlena v prvním dílu této knihy [1], dále podle **elektrické vodivosti, poréznosti, tepelné vodivosti, tvrdosti, odolnosti proti opotřebení, průsvitnosti, tepelné stálosti mechanických vlastností, tvrdosti, pevnosti, pružnosti, tuhosti** aj.
- Zajímavým kritériem je také použitelnost. Existují materiály **použitelné** a materiály **nepoužitelné** v dané oblasti. Například, dřevo je vhodné pro výrobu nábytku, ale je nevhodné pro výrobu osteosyntetického¹²² materiálu.
- Poslední členění může být provedeno podle **oblíbenosti** či **popularity** nebo **žádanosti** určitých materiálu. To může hraničit i s **trestnou činností**. Např. mezi **zakázané materiály** patří **slonovina**, viz [8]
https://cs.wikipedia.org/wiki/Obchod_se_slonovinou, což souvisí s ochranou slonů.
- Existují materiály **domácí** a **zahraniční**.

Výše uvedené členění jistě není úplné, ale dává širší souvislosti a prvotní vhled do biomechaniky materiálů, která je tématem dalšího dílu této knihy.

24.3 Historie používání materiálu člověkem

Člověk zřejmě jako první materiál s největší pravděpodobností používal **dřevo, kámen, kosti a kůže zvířat**. Později k tomu postupně přibývaly další materiály, které kolem sebe nacházel.

Podle znalostí a představ autorů této knihy, lze historii člověka rozdělit na epochu **doby kamenné** (bez využívání kovů) a **doby kovové** (období využívání kovů). Přičemž obě epochy „do jisté míry“ stále pokračují, protože kámen i kovy se používají dnes a budou se používat i v budoucnu ☺.

Pravděpodobně prvními kovy, které člověk začal používat, jsou **zlato, stříbro, cín a měď**. Materiálové experimenty vedly k používání slitin a další převratnou materiálovou revolucí byla **doba bronzová** a později **doba železná**. To jsou všeobecně známá fakta.

Historickým faktem je, že používání nových materiálů vede k novým technologiím, novým znalostem, objevům, technickému pokroku a z tohoto pohledu je převážně pozitivním aspektem v rozvoji lidské společnosti. Čtenář jistě tuší, že materiály se dají použít také z výroby zbraní a následným válkám, kterých bylo a bohužel je stále dostatek.

24.4 Pružnost, tuhost a poddajnost jako základní fyzikální charakteristiky materiálu

Pružnost, nazývaná také **elasticita** či **reciproká**¹²³ **tuhost**, viz [9], je schopnost materiálu, pružnými deformacemi, přizpůsobovat působení zatížení tělesa. Pokud zatížení přestane na těleso působit, pak se těleso vrátí do původního tvaru, tj. pružné deformace budou nulové.

¹²² **Osteosyntetický materiál** je materiál vhodný pro výrobu a instalaci implantátů pro chirurgickou léčbu komplikovaných zlomenin lidí a zvířat.

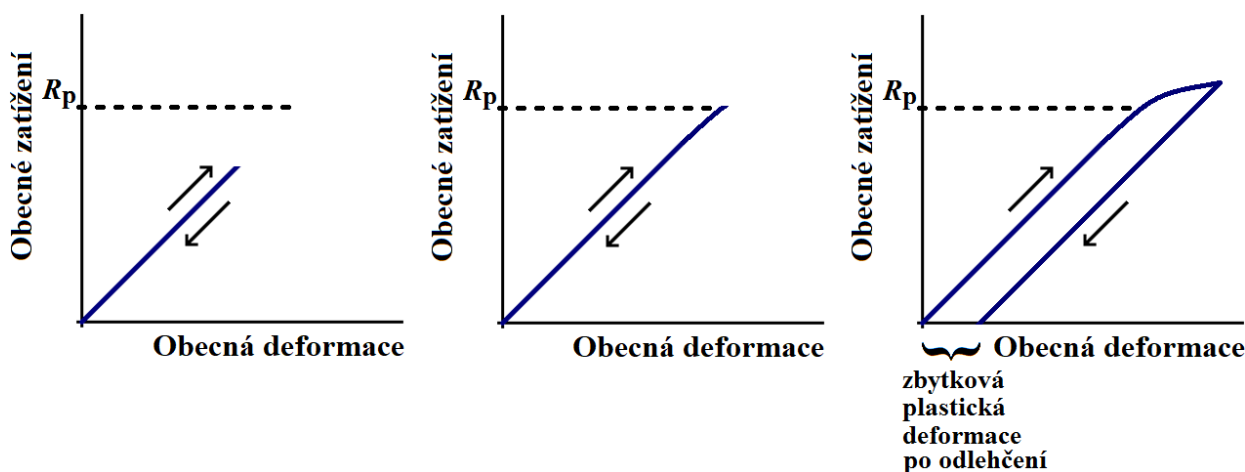
¹²³ **Reciprocita** (z latinského *reciprocus* = vzájemný) znamená vzájemnost.

Pružnost a pevnost je také vědní obor.

Pružné (elastické) deformace jsou tedy vratné deformace v tělese a souvisí s pojmem **pružné těleso**. Materiál je pružný, jestliže po odeznění zatížení se jeho rozměry vrátí do původního tvaru.

Pružnost materiálu má svá omezení. Omezením u kovů a jim podobných materiálů je dáno **mezí kluzu**¹²⁴ R_p /Pa/ (hranice vzniku čistě elastických deformací), viz Obr. 24.2. Při zatěžování nad mezí pružnosti se projevují elasto plastické deformace a po odlehčení jsou v tělese zbytkové plastické deformace. **Více o elastických, plastických, elasto-plastických aj. deformacích je uvedeno v Kapitolách 21 a 22 této knihy.**

Více informací o mezí kluzu je uvedeno v Kapitole 25.4 a její experimentální stanovení je uvedeno v dalším dílu této knihy.



Obr. 24.2 Zatěžování (a) pod mezí kluzu, (b) na mez kluzu a pod mezí kluzu, (c) nad mezí kluzu a pod mezí kluzu.

Blízko k pojmu pružnost má také tuhost. **Tuhost**¹²⁵ je typická pro každé pružné těleso a udává míru změny geometrie (např. průhybu, zkrácení aj.) vzhledem k velikosti zatížení. **Absolutní tuhost** je tuhost nekonečné velikosti, která je typická pro absolutně tuhá (rigidní) tělesa, která se nedeformují, viz Kapitola 21 a 22. Tuhost se obvykle vyjadřuje podle vztahu

$$\text{tuhost} = \frac{\text{charakteristické zatížení}}{\text{charakteristická deformace}}. \quad (24.1)$$

Například, jestliže je těleso zatížené silou F /N/ a jeho charakteristická délková změna je Δ_L /m/, pak platí $\text{tuhost} = \frac{F}{\Delta_L}$ /Nm⁻¹/. Tuhost lze tedy obecně chápat jako funkci, po jejímž vynásobení charakteristickou deformací se získá charakteristické zatížení.

Poddajnost je opakem tuhosti a je to převrácená hodnota tuhosti. Platí tedy

$$\text{poddajnost} = \text{tuhost}^{-1} = \frac{\text{charakteristická deformace}}{\text{charakteristické zatížení}}. \quad (24.2)$$

¹²⁴ **Mez kluzu** je anglicky **yield limit**

¹²⁵ **Tuhost** (anglicky **stiffness**)

Tuhost a poddajnost mohou být charakterizovány obecně složitou nelineární funkcí, avšak v běžných úlohách je lze charakterizovat lineární závislostí.

Obdobné vztahy jako (24.1) a (24.2) lze odvodit i pro tuhost v kroucení (torzní tuhost), tuhost v ohybu aj. způsoby zatížení.

24.5 Hookeův zákon a modul pružnosti

Hookeův¹²⁶ zákon, viz [10], patří mezi elementární zákony mechaniky či biomechaniky.

Pro případ jednoosé napjatosti, který je tématem této knihy (viz např. Kapitola 25 a další díly této knihy), dává do souvislosti **poměrné deformace** ε /1/ (Kapitola 23) s mechanickým **napětím** σ /Pa/. Pro homogenní a izotropní materiály, viz Kapitola 22, platí

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (24.3)$$

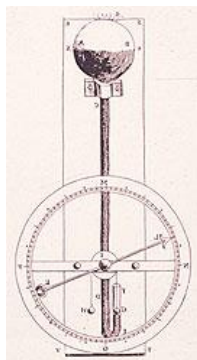
kde E /Pa/ je **modul pružnosti (modul elasticity, Youngův¹²⁷ modul)**.

Hookeův zákon tedy zní: „**Napětí je přímo úměrné poměrné deformaci**“.

Nutno podotknout, že příslušná napětí či poměrné deformace ve vztahu (24.3) je nutné stanovovat podle příslušného způsobu namáhání, tj. např. jinak je tomu u namáhání ohybu a jinak u namáhání tahem. Blíže např. Kapitola 25 a další díly této knihy.

Hodnoty modulů pružnosti některých materiálů jsou uvedeny v Tab. 24.1.

¹²⁶ **Robert Hooke** (1635–1703) byl anglický polyhistor a inženýr. Proslavil se především jako objevitel Hookeova zákona a objevitel buněk organismů.



Hookeův barometr (zdroj obrázku: internet)

¹²⁷ **Thomas Young** (1773–1829) byl britský polyhistor.



(zdroj obrázku internet)

Tab. 24.1 Hodnoty modulů pružnosti materiálů (při pokojové teplotě).

Materiál:	Modul pružnosti (Young's modulus) E /MPa/:
Absolutně tuhé (rigidní) těleso	∞
Bronz	$\approx 1.17 \times 10^5$
Diamant	7.76×10^5 až 1.25×10^6
Cermet ¹²⁸ ($\text{MO}_2\text{C} + \text{TiCN} + \text{Ni}$)	5×10^5
Hořčík	$\approx 4.5 \times 10^4$
Hliníkové slitiny	$\approx 7.5 \times 10^4$
Korund	3.96×10^5 až 4.16×10^5
Kost (corticalis) - podélně	1.1×10^4 až 2.1×10^4
Kost (corticalis) - příčně	5×10^3 až 1.3×10^4
Litina:	$\approx 9.65 \times 10^4$
Mosaz	$\approx 1.04 \times 10^5$
Nimonicke slitiny	$\approx 2.1 \times 10^5$
Ocel	1.95×10^5 až 2.17×10^5
Titan	$\approx 1.003 \times 10^5$

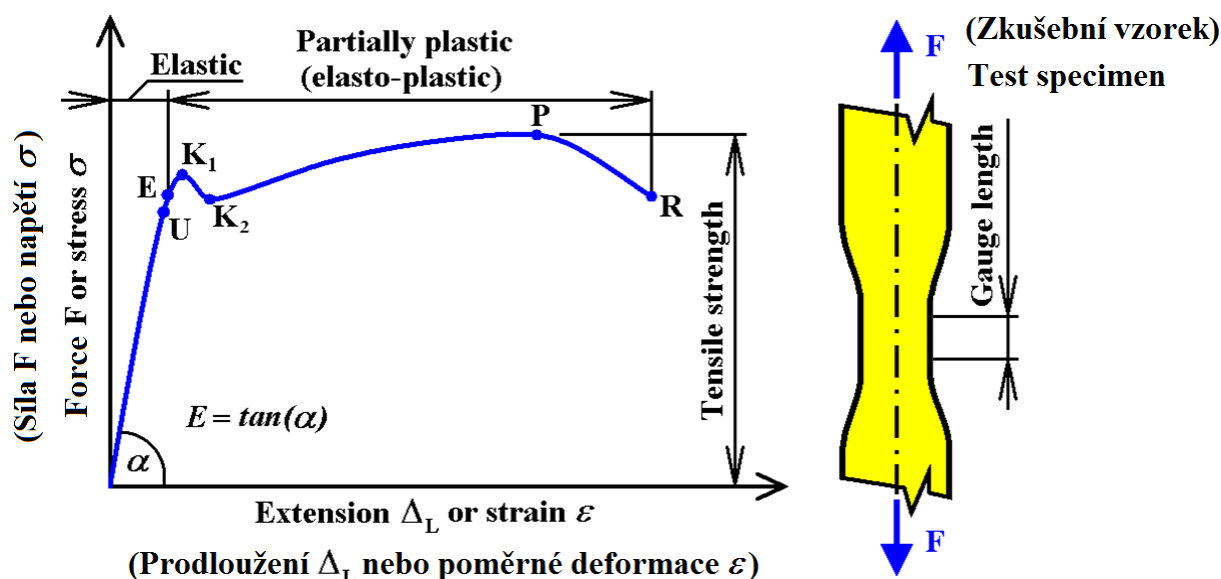
Modul pružnosti, je nazýván materiálovou konstantou, avšak ve skutečnosti má náhodný rozptyl a není to tedy konstanta ☺. Lze jej stanovit mnoha způsoby, avšak vždy ve spojení s experimenty, např. z vyhodnocení tahových, ohybových aj. materiálových zkoušek.

Modul pružnosti lze také vyjádřit jako směrnici lineární části závislosti tahové síly či napětí na tahovém prodloužení či poměrné deformaci, viz průběh tahové zkoušky na Obr. 24.3. Pro modul pružnosti pak platí

$$E = \tan(\alpha), \quad (24.4)$$

kde $\tan(\alpha)$ je směrnice počáteční přímky na Obr. 24.3.

¹²⁸ Cermet (složenina z anglických ceramic – keramika a metal – kov) je žárovzdorný kompozit vyráběný spékáním keramiky a kovových prášků je kompozitní materiál vyrobený spékáním směsi prášků kovů a keramiky.



Obr. 24.3 Stanovení modulu pružnosti a tahová zkouška (body „U“ = mez úměrnosti, „E“ = mez elasticity, „K_{1,2}“ = mez kluzu¹²⁹, „P“ = mez pevnosti, „R“ = mez lomu).

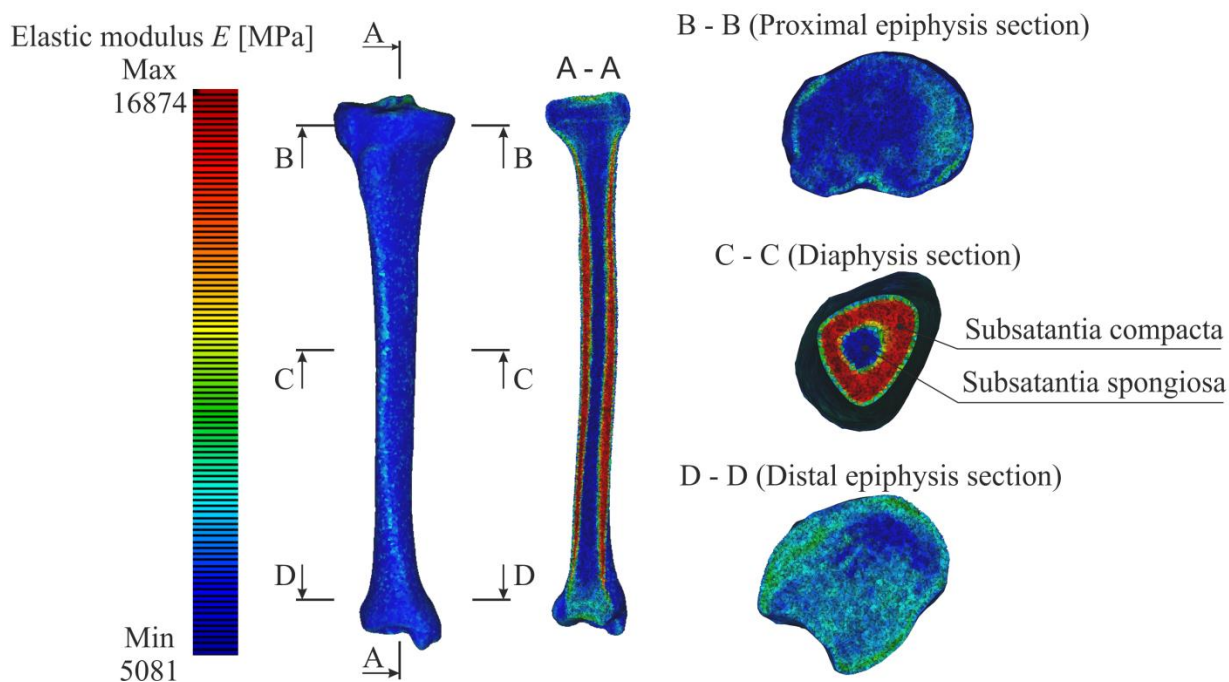
Některé materiály mohou mít rozdílný modul pružnosti v tahu a tlaku (např. beton či kostní cement). Ortotropní materiály (např. dřevo) mívají moduly pružnosti různé ve směrech v materiálu. Obvykle existuje podstatný rozdíl v materiálových vlastnostech v radilní či transversální rovině kmene stromu.¹³⁰

V případě využití **výpočetní tomografie**¹³¹, kterou lze stanovit rozložení hustoty materiálů, lze následně dopočítat také modul pružnosti v daném místě tělesa. Využívá se jí poměrně často pro stanovení rozložení objemové hustoty či modulu pružnosti v orgánech, viz např. Obr. 24.4.

¹²⁹ **Mez kluzu** je anglicky **yield limit**.

¹³⁰ Anatomické řezy rostlinami jsou vysvětleny v 1. dílu této knihy [1].

¹³¹ **Výpočetní tomografie** (CT, nebo **X-ray CT**) nesprávně nazývaná jako „počítačová tomografie“, „výpočtová tomografie“ či „komputerová tomografie“ je významná radiologická vyšetřovací metoda, která umožňuje neinvazivní počítačové zobrazení vnitřních částí těl. Více o této metodě v dalším dílu této knihy.



Obr. 24.4 Rozložení modulu pružnosti v lidské tibii.

24.6 Základní informace o některých skupinách materiálů

- Sypké hmoty

Sypké hmoty jsou sypký materiál (tzv. partikulární hmoty), viz Obr. 24.5. Do jisté míry jsou netradičním, ale velmi rozšířeným materiálem. Za určitých podmínek se chovají podobně jako kapalina a za jiných zase jako pevná látka. Typickým příkladem sypkých hmot je např. hromada zrní, pilin drobných kamínků, saze, pelety, mouka, písek, hlína, emulze s pevnými částicemi, pasty, sypký kostní cement, sypká sádra, drcené pneumatiky atp. Přesná definice, co lze považovat za sypký materiál a co již ne není přesně stanovena.



Obr. 24.5 Sypký materiál.

Sypké hmoty jsou poměrně intenzivně a dlouhodobě zkoumány v základním i aplikačním výzkumu na VŠB – Technické univerzitě Ostrava, a to na Hornicko geologické fakultě a na Fakultě strojní. Jedním z předních světových odborníků na sypké hmoty je **Jiří Zegzulka**.¹³²

Základní vlastnost sypkých materiálů, kterou se tyto odlišují od kapalin, představuje jejich schopnost přenášet třecí síly v klidovém stavu. V kapalinách vznikají třecí síly pouze za pohybu, to znamená až při určitém gradientu rychlosti pohybu kapaliny. V klidovém stavu pak tyto síly zanikají. **U sypkých materiálů třecí síly působí stále a jsou poměrně málo závislé na gradientu rychlosti** (pro praktické účely lze vliv gradientu rychlosti zanedbat). Existenci třecích sil lze poměrně snadno dokázat při pozorování hromady nesoudržného sypkého materiálu (volně „tekoucího“), viz Obr. 24.5. Taková **hromada sypkých hmot zůstává pohromadě v důsledku třecích sil uvnitř sypkého materiálu, resp. mezi jejich částicemi a dále pak v důsledku třecích sil mezi sypkou hmotou a základnou.** Nebýt těchto sil, potom by se uvažovaná hromada chovala jako kapalina a změnila by se do tvaru „kaluže“.

Sypké materiály jsou nejpřehledněji roztrženy do pěti skupin dle klasifikace podle FEM (francouzsky *Fédération Européenne de la Manutention*)¹³³ dle a) zrnitosti, b) soudržnosti, c) chování během dopravy, d) objemové hmotností a e) teploty. Blíže [11] a [12].

Zrnitost, viz Obr. 24.6, je charakterizována dvěma znaky. První znak je charakteristický pro velikost zrna, resp. rozměr zrna a je označen velkým písmenem A až K. Druhý znak je charakterizován římskými číslicemi (I až VI), udává tvar zrna takto: I. Ostré hrany s přibližně stejnými rozměry ve všech rozměrech. II. Ostré hrany, kde jeden rozměr je viditelně větší než ostatní. III. Ostré hrany, u nichž jeden rozměr podstatně menší než ostatní. IV. Zaoblené hrany s přibližně stejnými rozměry ve všech třech rozměrech. V. Oblé hrany mající jeden rozměr viditelně větší než ostatní. VI. Oblé hrany, kde jeden rozměr je podstatně menší než ostatní rozměry.



Obr. 24.6 Zrnitost sypkého materiálu.

Prof. Ing. Jiří Zegzulka, CSc. narozen 15. 10. 1958 je český strojní inženýr a přední odborník v oblasti výzkumu mechaniky sypkých hmot.



¹³³ Anglicky **European Materials Handling Federation**, vznikla v roce 1953.

Pojem zrnitosti lze také do určité míry a laicky vysvětlit na mouce, kterou v naší zemi běžně kupujeme jako hladká (nejjemnější zrnitost), polohrubá, hrubá a krupice (nejhrubší zrnitost). Ještě vyšší hodnoty zrnitosti dosahuje namletý šrot nebo celá zrna obilí.

Soudržnost je spjata se vzájemnými silami (kohézní, elektrostatické nebo kapilární) mezi částicemi sypkých hmot. Soudržnost je udávána arabskými číslicemi v tomto odstupňování: 1. materiál ve vzduchu se vznášející a tekoucí spontánně jako tekutina, 2. lehce tekoucí materiál, 3. normálně tekoucí, 4. obtížně tekoucí, 5. soudržný materiál a 6. materiál netekoucí, se sklonem ke tvoření kleneb a obtížně od sebe oddělitelnými částicemi.

Chování materiálu během dopravy je charakterizováno a označováno malými písmeny a zahrnuje celkem 10 skupin vlastností, které jsou pro dopravu významné a uvádí je Tab. 24.2, viz [13] a [14].

Tab. 24.2 Označení vlastností materiálu při dopravě.

Označení	Vlastnost	Příklad
o	abrazivní (obrusivý)	křemen, vysokopeční struska, koks
p	korozivní	kuchyňská sůl
q	křehký, rozbitelný	mýdlové vločky
r	explozivní	prach uhelný
s	hořlavý	třísky, hobliny dřevěné
t	prachovitý	cement
u	vlhký (v %)	písek těžený z vody
v	lepivý	hlína s obsahem vody
w	hydroskopický	kuchyňská sůl, sádra
x	páchnoucí	odpadky

Objemovou hmotnost (hustotu) sypkého materiálu je nutno vyjádřit jako podíl hmotnosti a příslušného objemu. Nutno zdůraznit, že jsou také známy pojmy měrná a sypná hmotnost. Fyzikální pojem hustoty je také vysvětlen v 1. dílu této knihy.

Teplota dopravovaného materiálu je dána symbolem udávajícím počet stupňů současně s doplňkem údaje o stupnici Celsiově nebo Fahrenheitově.

Sypké materiály jsou tvořeny částicemi různého tvaru, velikosti, ovšem přibližně stejné sypné/objemové/měrné hmotnosti. Realita je taková, že částice tvoří v podstatě statistický soubor a z toho důvodu může být chování hmoty do velké míry nepředvídatelné. Mechanické projevy sybkých materiálů jsou složitým odrazem jeho struktury a v podstatě charakteru každé částice [15].

Sypké hmoty se tedy vyznačují mechanickými vlastnostmi a) zrnitostí, b) vlhkostí, c) měrnou, objemovou a sypnou hmotností, d) přirozeným a dynamickým sypným úhlem, e) úhlem vnitřního a vnějšího tření, f) soudržným napětím a g) napětovým stavem sypkého tělesa, viz [15].

Zrnitost/granulometrie je složení sypkého materiálu podle velikosti zrna vyjádřené buď procentuálním obsahem zvolených tříd zrnitosti nebo tzv. křivkou zrnitosti (frekvenční a součtová křivka), viz [14].

Vlhkost je vyjádřena obsahem vody ve vzorku v procentech jeho hmotnosti. Sypkému materiálu schopnému zadržovat určitý obsah vody říkáme vlhký. Vlhký sypký materiál je sypký materiál, ve kterém voda ulpívá na zrnech. Vlhkost a nasákavost (schopnost přijmout vodu) je

důležitá k posouzení náchylnosti k nalepování, namrzání sypkého materiálu na dopravních systémech případně pro degradaci biologických materiálů např. plísněmi, houbami, oxidací apod.

Přírozený sypný úhel (klidový), je úhel, který svírá tečna ke svahu volně nasypaného materiálu s vodorovnou rovinou podložky, viz Obr. 24.7.



Obr. 24.7 Sypný úhel α .

Při kmitání podložky dochází ke zmenšení sypného úhlu a vzniku tzv. dynamického sypného úhlu.

Úhel vnitřního tření zahrnuje tření mezi jednotlivými zrny materiálu. Má souvislost s vazebními silami, a tudíž závisí na velikosti a stavu sypkého materiálu. U téhož materiálu závisí na normálovém tlaku a na míře zhutnění materiálu. S rostoucím vertikálním napětím úhel vnitřního tření sypké hmoty roste.

Úhel vnějšího tření je úhlem, při kterém sypký materiál začíná klouzat po podložce. Součinitel vnějšího tření se mění s velikostí normálového tlaku. Výrazně závisí na typu podkladového materiálu.

Soudržnost sypkých materiálů je schopnost přenášet vnitřním třením nejen smyková a tlaková namáhání, ale i malá tahová a krutová namáhání. Ideální sypké hmoty přenášejí jen smyk a tlak. Soudržnost působí s vnitřním třením na smykových plochách a je závislá na sypné tíze, charakteristické výšce, součiniteli vnitřního tření a na úhlu smykové roviny.

Pro stanovení tlaků v sypném tělese není možno použít Pascalova zákona uvažujícího rovnoměrné šíření tlaku všemi směry (ten platí pouze pro tekutiny). Pro sypký materiál je charakteristické široký rozsahem úhlu vnitřního tření na rozdíl od kapalin, viz [15].

Pro vyjádření napětí v sypké hmotě se nejjednodušeji používá **Rankinova teorie**, která zanedbává vnitřní tření materiálu i tření po stěnách zásobníku, a tudíž uvažuje svislé napětí na vodorovnou plochu jako hydrostatický tlak. Přesnější je **teorie Jansenova**, která předpokládá,

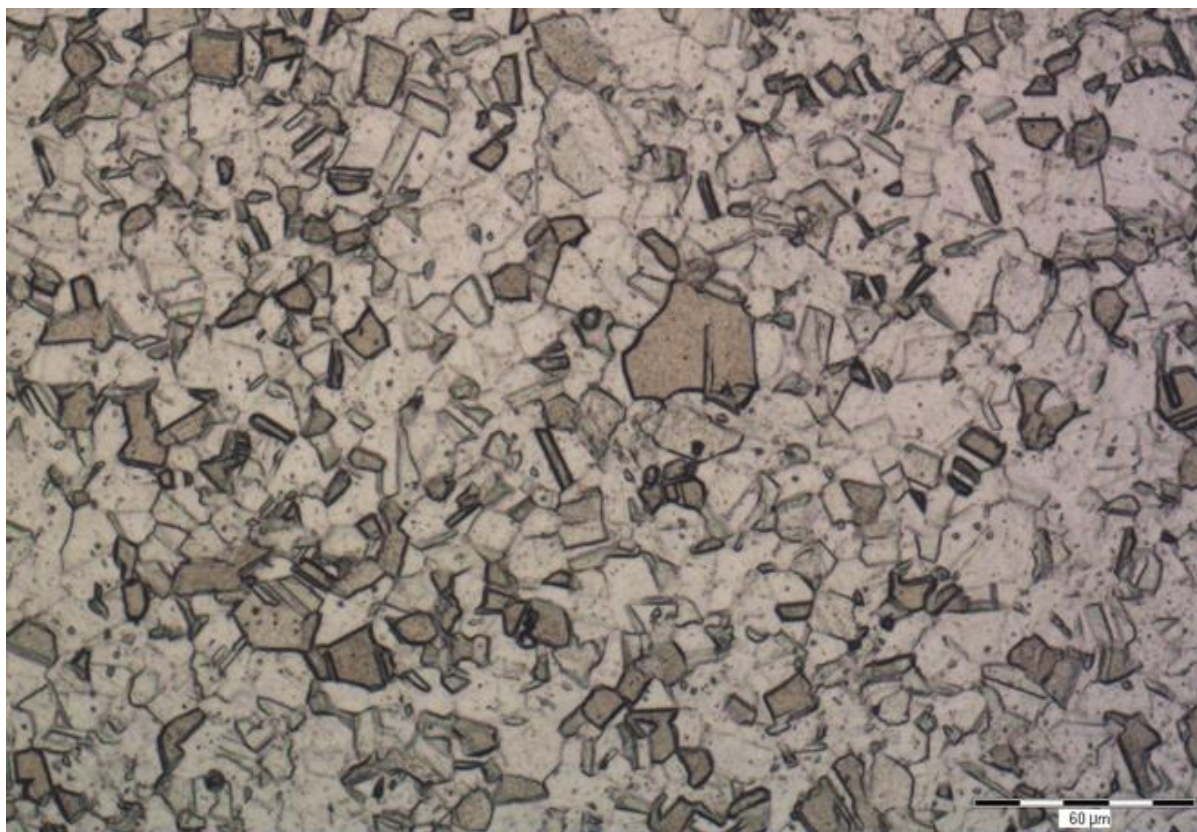
že sloupec uvnitř zásobníku je zavěšen na ostatních vrstvách materiálu a jejich prostřednictvím na stěnách. Bere tudíž v úvahu vnitřní i vnější tření materiálu. Více o této problematice je uvedeno v dalších dílech této knihy anebo v odborné literatuře, která je nad rámec zaměření této knihy.

- **Kovy**

Jako kovy jsou jak chemicky čisté prvky, které zaujímají v současné chvíli 86 míst periodické tabulky, tak i jejich směsi, které se obecně nazývají slitinami. Ačkoliv se kovy a jejich slitiny mohou ve svých vlastnostech i výrazně lišit, pro všechny je typická kovová vazba, která váže jednotlivé atomy v tzv. uzlových bodech atomové mřížky. Vazebné síly jsou zde dány vzájemnou interakcí mezi kladně nabitými atomy v mřížce a jejich valenčními elektrony, které se v této mřížce mohou pouze s minimálním omezením pohybovat a díky tomu celou strukturu materiálu udržet pohromadě. Charakter této vazby, která není v prostoru výrazně orientovaná a má v porovnání s ostatními typy vazeb daleký dosah, kovům dává její charakteristické vlastnosti, jako jsou například dobrá tvařitelnost, významná pevnost v tahu a tlaku, dobrá tepelná či elektrická vodivost nebo odolnost vůči opotřebení a vzniku křehkého porušení za běžných teplot. Vzhledem k mechanickým vlastnostem kovů, které se zpravidla pro jednotlivé druhy liší, lze obecně tvrdit, že čím je kov čistější, tzn. čím méně atomů příměsí či nečistot jeho kompozice obsahuje, tím jsou jeho základní mechanické vlastnosti jako je mez pevnosti, či mez kluzu nižší. Pro úplnost lze uvést příklad tzv. matky materiálů, za kterou jsou oceli, jakožto slitiny, železa často označovány. Mez kluzu R_p chemicky čistého železa bez příměsí či nečistot je přibližně 55 MPa, kdežto jeho cíleným legováním¹³⁴ lze mez kluzu výsledné oceli zvýšit i na úroveň převyšující často i 1500 MPa.

Struktura kovových materiálů je typicky polykrystalická, to znamená, že je zpravidla tvořena velkým počtem monokrystalů, tzv. zrny. V rámci jednoho monokrystalu, tj. jednoho zrna, je orientace krystalových mřížek, ve kterých jsou atomy kovu umístěny, vždy totožná. Oblasti, kde se potkávají krystalové mřížky s rozdílnou orientací, jsou označovány jako hranice zrn. Typická mikrostruktura korozivzdorné oceli s patrnými hranicemi jednotlivých zrn je vidět na Obr. 24.8.

¹³⁴ **Legování** je metalurgický postup zlepšování vlastností kovu a jejich slitin. Provádí se přidáním tzv. legovacích prvků čili legur během výroby kovu.



Obr. 24.8 Mikrostruktura korozivzdorné oceli (fotografie vyleštěného povrchu z mikroskopu s dobře patrnými hranicemi zrn).

Obecně platí, že v rámci jednoho zrna jsou vlastnosti materiálu izotropické, tzn. že se mění v závislosti na vzájemné orientaci působících sil a orientaci krystalové mřížky, ve které dané zrnó krystalizovalo. **Díky vysokému počtu nahodile orientovaných zrn se však výsledná materiál z makroskopického hlediska jeví jako čistě anizotropický**, a tedy má v ideálním případě ve všech směrech stejné mechanické vlastnosti. Samotná **velikost jednotlivých zrn hraje klíčovou roli při deformačním chování kovových materiálů a obecně platí, že čím jsou jednotlivá zrna kovového materiálu menší, tím má materiál vyšší mechanické vlastnosti**. Vztahu mezi velikostí zrna a výslednou mezí kluzu odpovídá pro většinu kovových materiálů **Hall-Petchův vztah**¹³⁵, pro který platí statistický trend

$$R_p = k_1 + \frac{k_2}{\sqrt{d_z}}, \quad (24.5)$$

kde R_p /Pa/ je mez kluzu kovového materiálu, k_1 /Pa/ a k_2 /Pa m^{0.5}/ jsou Hall-Petschovy materiálové konstanty odpovídající deformačním charakteristikám materiálu a d_z /m/ je charakteristická střední velikost zrna kovového materiálu, viz Tab. 24.3. Vztah (24.5) lze také využít k odhadu meze kluzu kovového materiálu.

¹³⁵ E. O. Hall a N. J. Petch byli britští materiáloví vědci, kteří v 50. letech 20. století publikovali Hall-Petchův vztah.

Tab. 24.3 Hall-Petschovy konstanty pro některé materiály, viz [16]
https://en.wikipedia.org/wiki/Grain_boundary_strengthening.

Materiál	k_1 /Pa/	k_2 /Pa m ^{0.5} /
Měď	25×10^6	1.2×10^5
Ni ₃ Al	300×10^6	1.7×10^6
Titan	80×10^6	4×10^5
Uhlíková ocel	70×10^6	7.4×10^5

Ze vztahu (24.5) vyplývá, že s lineárně klesající střední velikostí zrna v kovovém materiálu, kvadraticky stoupá jeho výsledná mez kluzu R_p . Je zřejmé, že se zmenšující se zrnitostí materiálu, stoupá mez kluzu, avšak s určitým teoretickým omezením. Toto omezení je pro případy blízké $d_z \rightarrow 0$, kdy $R_p \rightarrow \infty$. Prakticky však nelze vytvořit zrno o velikosti $d_z = 0$.

Z hlediska technické praxe lze kovy rozdělit např. následovně:

- Slitiny železa** – jedná se o směsi (slitiny) kovů, které obsahují více než 50 % železa. Mezi ně řadíme např. **oceli**, které obsahují méně jak 2.14 hmotnostních % uhlíku a **litiny** s obsahem železa nad 2.14 hmotnostních % uhlíku. Již od doby průmyslové revoluce hrají tyto materiály klíčovou roli z hlediska využití pro konstrukční účely (např. nosníky), automobilový průmysl (nosný rám automobilů), běžný život (např. nože či běžné nářadí), zbraně a podobně.
- Neželezné kovy a jejich slitiny** – zde patří všechny ostatní kovy a slitiny, které ve své kompozici obsahují méně než 50 % železa. Z hlediska jejich využití v technické praxi zde můžeme například zařadit:
 - **Hliník a jeho slitiny** (duraly, siluminy, ...),
 - **Měď a její slitiny** (mosazi, bronzy, ...),
 - **Hořčík a jeho slitiny**,
 - **Nikl a jeho slitiny**,
 - **Titan a jeho slitiny**,
 - **Nízkotavitelné a zpravidla měkké kovy** (cín, olovo, ...),
 - **Kovy s velmi vysokou teplotou tavení** (wolfram, tantal, ...),
 - **Kovy vysoce radioaktivní** (uran, plutonium, ...),
 - **Kovy s vysokou měrnou hustotou** (osmium, iridium, ...),
 - **Kovy ušlechtilé** (zlato, platina, ...),
 - **Kovy pro speciální použití** (neodym, rhenium, ...),
 - **Ostatní kovy**.

Vzhledem k požadovanému charakteru vybraných konstrukcí, jako je tomu například v automobilovém nebo leteckém průmyslu, je kladen důraz nejen na samotné mechanické vlastnosti, ale také na poměr k jejich měrné hustotě. Jsou proto zavedeny veličiny jako

- **Specifická mez kluzu** (R_p/ρ , tj. poměr meze kluzu a měrné hustoty),
- **Specifická mez pevnosti** (R_m/ρ , tj. poměr meze pevnosti a měrné hustoty),

- **Specifický modul pružnosti v tahu a tlaku (E/ρ),** tj. poměr mezi modulem pružnosti v tahu a tlaku a měrnou hustotou).

Na materiály pro přímé použití ve zdravotnictví jsou kromě jejich mechanických vlastností kladeny i vysoké nároky z hlediska jejich nezávadnosti při přímém styku s tělním prostředím. Na základě toho, můžeme rozdělit **kovové biomateriály** do dvou základních skupin, tj. **biologicky degradabilní** a **biologicky inertní**.

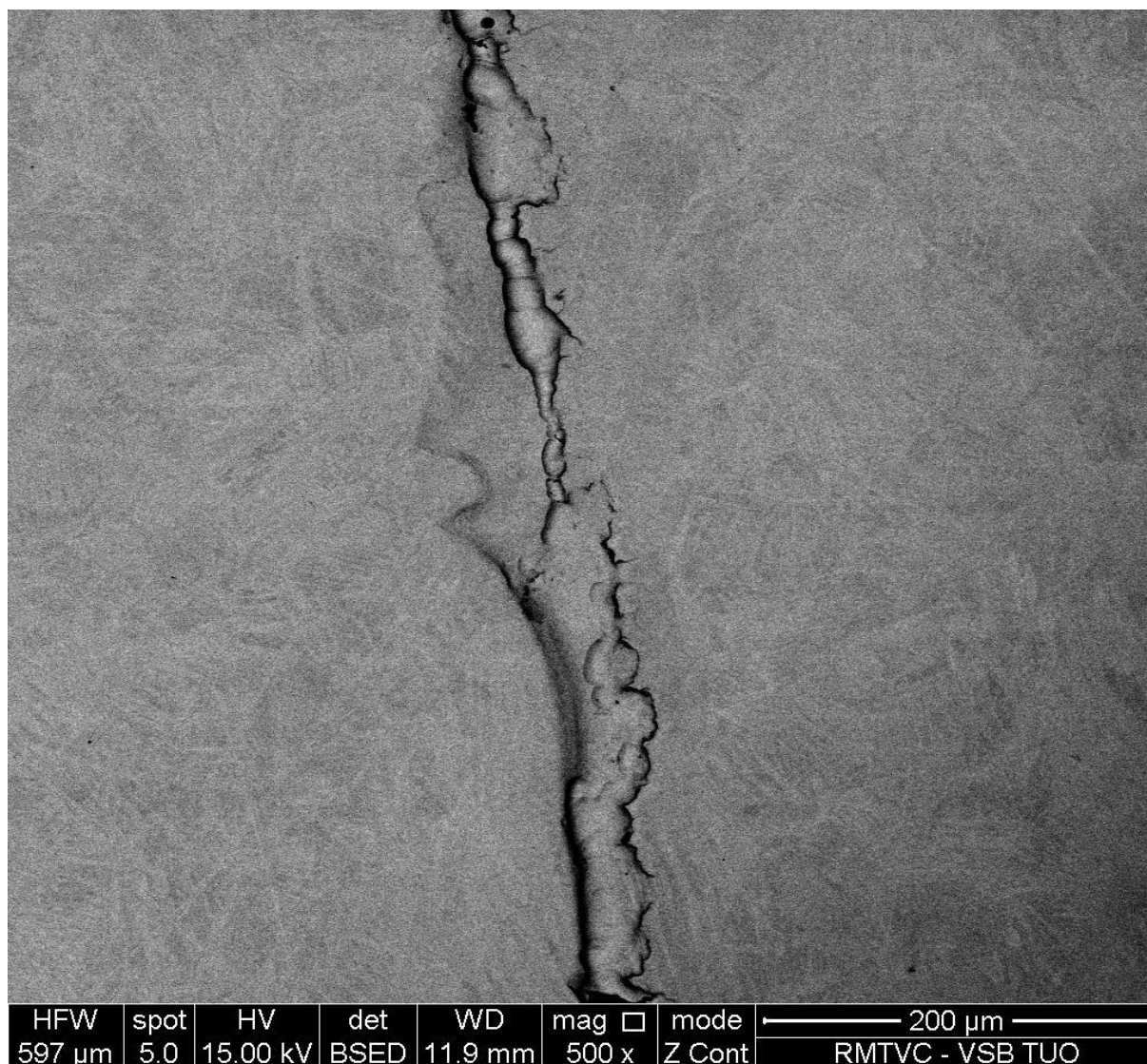
Biologicky degradabilní kovové materiály vyvolávají při styku s tělním prostředím přímou biologickou reakci, na jejíž základě zpravidla dochází k alespoň částečnému rozrušení povrchu kovového materiálu, a kdy tyto reakce nijak výrazně neovlivňují metabolismus okolních tkání a nepůsobí tedy výrazné patologické změny. Přeneseně řečeno se dá říct, že **samovolná degradace takových materiálů je do jisté míry žádoucí a úbytek kovového materiálu je v průběhu času substituován růstem okolní tkáně**. Do této skupiny se pak nejčastěji řadí především vybrané slitiny hořčíku zpravidla legované dalšími biogenními prvky jako jsou vápník či zinek. Z hlediska použití jsou pak biodegradabilní slitiny používány nejčastěji k dočasné fixaci dočasných výztuh tvrdých tkání, které pak z důvodu jejich degradace není třeba z těla extrahovat.

V případě inertních kovových biomateriálů je žádoucí co nejmenší narušení povrchu implantátů v důsledku působení tělního prostředí. V lékařské praxi jsou nejčastěji využívány tyto materiály

- **Titan a jeho slitiny,**
- **Korozivzdorné oceli,**
- **Chrom-kobaltové slitiny,**
- **Zlato a jeho slitiny,**
- **Slitiny na bázi zirkonia.**

V lékařství, u všech jmenovaných, s výjimkou zlata a jeho slitin, je dobré odolnosti vůči působení korozního¹³⁶ tělního prostředí dosaženo díky vysoké stabilitě povrchu, dané tzv. bariérovým efektem velmi tenké vrstvy korozních produktů o tloušťce řádově jednotek nanometrů. Tato povrchová vrstva účinně brání pronikání iontů z tělního prostředí bezprostředně k aktivnímu povrchu čistého kovu a tím významně snižuje korozní rychlost. Odolnost této vrstvy je předmětem vybraných korozních zkoušek na bázi potenciodynamických měření, při kterých je zjišťována stabilita této vrstvy za simulovaných tělních podmínek. V případě porušení této vrstvy se v oblasti porušení vytváří projevy tzv. bodové koroze, která je charakteristická pouze lokálním napadením s relativně velkou rychlostí šíření tohoto aktivního bodu do objemu materiálu. Typický příklad spojených korozních bodů na povrchu korozivzdorné oceli je ilustrován na obrázku 24.9.

¹³⁶ **Koroze** je nežádoucí degradační proces materiálů umístěného v plynech, kapalinách a zeminách, které jsou s materiálem ve styku. Lze ji popsat jako postupné rozrušení kovů či nekovových organických či anorganických materiálů vlivem chemické nebo elektrochemické reakce s okolním prostředím.



Obr. 24.9 Spojité korozní body na povrchu korozivzdorné oceli po provedené korozní zkoušce pořízené elektronovou mikroskopií na VŠB-TU Ostrava.

V lidském těle, v důsledku korozního napadení dochází vždy k aktivnímu rozpouštění napadeného materiálu, kdy korozní produkty přecházejí jak do okolních tkání, tak přes krevní řečiště posléze do celého těla. Pokud k takové situaci dojde, hrozí vždy možné riziko patologických změn v organismu, počínaje projevy typickými pro alergie na těžké kovy, přes nekrózy tkání blízkých napadenému místu až po systémová onemocnění. Proto prochází každá biomedicínská aplikace složitým procesem evaluace příslušného charakteru a následným certifikačním procesem, který výrazně snižuje riziko podobných degradačních změn a ochraňuje pacienta.

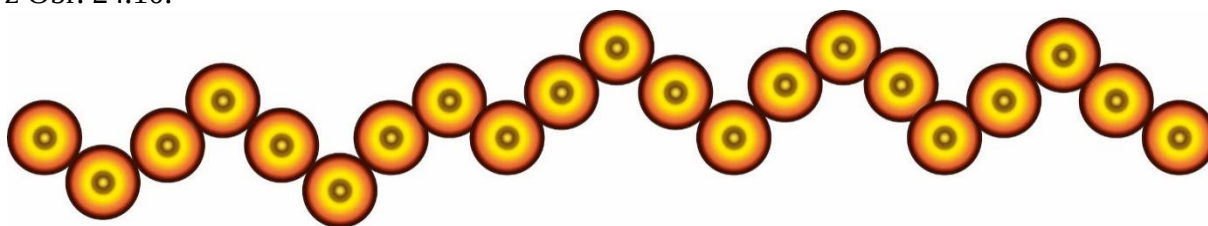
• Polymerní látky

S polymerními materiály se v moderní společnosti setkáváme stále častěji. Díky kombinaci svých mechanických vlastností a nízké hustotě (tedy vysoké specifické pevnosti) jsou využívány velmi často nejen jako konstrukční materiály v dopravním a leteckém průmyslu, ale i běžném životě jak v podobě drobných aplikací a výrobků, tak jako obalové materiály. Z hlediska vnitřní struktury řadíme polymerní materiály mezi tzv. **makromolekulární látky**, protože sestávají z velkého počtu charakteristických molekul uspořádaných v řetězcích. Tyto

makromolekuly vznikají procesem **polymerizace (polymerace)**¹³⁷ z kratších organických řetězců, tzv. **monomerů**¹³⁸. Počet monomerů, které tvoří makromolekulární řetězec polymeru, se zpravidla pohybuje ve velmi širokém rozsahu. Z toho pak vyplývá i značný rozsah výsledné molekulové hustoty takových polymerů, která je součtem relativních atomových hmotností M_r /1/ všech atomů tvořících takovou makromolekulu. V případě konstrukčních polymerních materiálů nejčastěji používaných v technické praxi se relativní molekulová hmotnost M_r pohybuje v rozmezí 103 až 108. Až na specifické výjimky platí, že vazby v rámci jednoho řetězce jsou kovalentní (polární či nepolární), kdežto síly mezi jednotlivými řetězci či jejich skupinami mají spíše nevazebný charakter (Van der Wallsovy síly, vodíkové můstky, ...). Dle prostorového charakteru vnitřního uspořádání rozdělujeme polymerní řetězce na

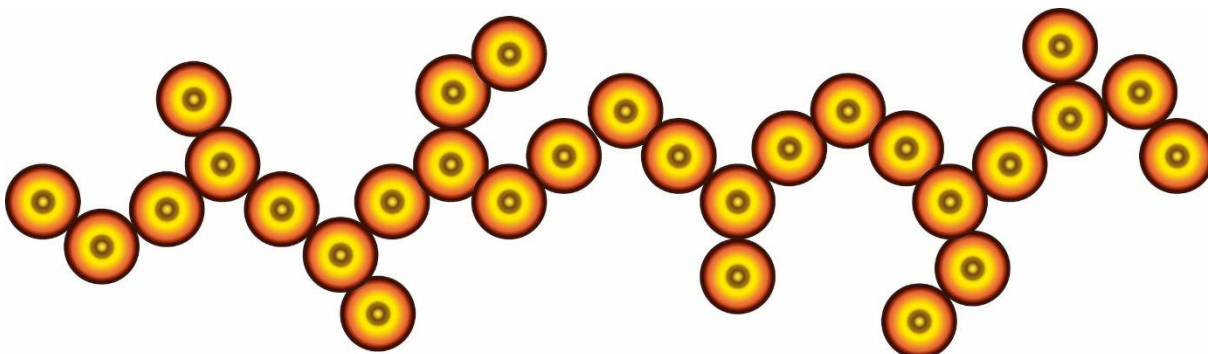
- Řetězce **jednoduché**,
- Řetězce **rozvětvené**,
- Řetězce **prostorově zesítěné**.

Jednoduchý řetězec (lineární) je tvořen řadou jednotlivých molekul, které jsou uspořádány pouze v jednom směru či ose. Zpravidla vzniká polymerací jednotek se dvěma funkčními skupinami. Vznikají relativně jednoduše, např. rozštěpením jedné vícenásobné vazby v původním monomeru. Schematický náčrt jednoduchého řetězce je patrný z Obr. 24.10.



Obr. 24.10 Schématický náčrt jednoduchého polymerního řetězce.

Rozvětvený řetězec je charakteristický přítomností molekul jak na hlavní ose, tak i bočními větvemi, tzv. substituenty bez toho, aby došlo k vazebnému propojení s dalším řetězcem. V důsledku prostorového uspořádání tedy dochází z mikroskopického hlediska k oddálení os jednotlivých řetězců a tím i omezení jejich vzájemné nevazebné interakce, což zpravidla vede ke snížení mechanických i fyzikálních vlastností materiálu jako takového. Schematický náčrt rozvětveného řetězce je patrný na Obr. 24.11.

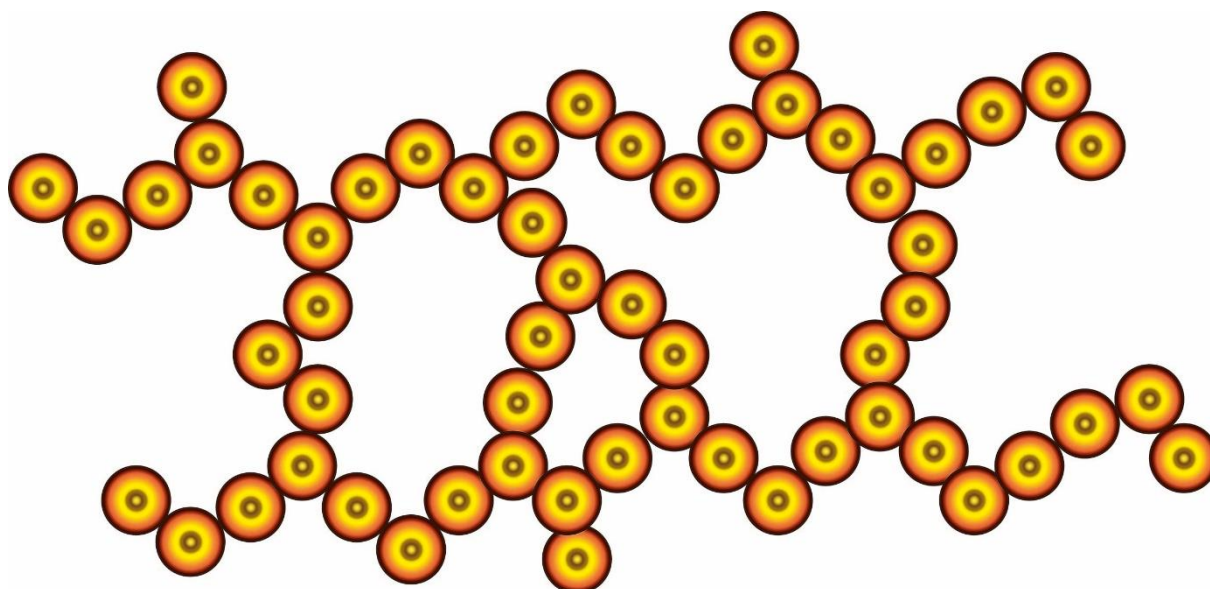


Obr. 24.11 Schématický náčrt rozvětveného polymerního řetězce.

¹³⁷ **Polymerizace (Polymerace)** je chemická reakce je nutná pro výrobu plastů, syntetických kaučuků a umělých vláken.

¹³⁸ **Monomer** (z řeckého monos = jeden a méros = část) je nízkomolekulární sloučenina schopná polymerace a tím vytvoření polymeru (makromolekulární látky).

Prostorově zesítěné řetězce vznikají primárně vzájemným spojením (zesítěním) sousedních lineárních řetězců pevnými vazebnými interakcemi, tj. především kovalentními vazbami. Tímto je omezena vzájemná mobilita jednotlivých řetězců, které se v důsledku působících napětí nemohou dostatečně deformovat. Výsledné mechanické, fyzikální a technologické vlastnosti se pak odvíjí od míry zesítění makromolekulární struktury daného materiálu. Samotná zesítěná struktura může vzniknout buď záměrně v průběhu samotné polymerace, nebo jako nežádoucí projev degradačních procesů při stárnutí polymerního materiálu. Příklad prostorově zesítěné struktury je pak ilustrován na obrázku Obr. 24.12.



Obr. 24.12 Schématický náčrt prostorově zesítěného polymerního řetězce.

Z hlediska technické praxe jsou polymerní látky rozdělovány do skupin dle jejich charakteristických vlastností, které jsou především dány vnitřní stavbou. Z tohoto hlediska rozděluje polymery do následujících skupin

- **Termoplasty,**
- **Reaktoplasty,**
- **Elastomery** (patří sem některé termoplasty a reaktoplasty).

Termoplasty (termoplastické polymery) jsou za běžné pokojové teploty zpravidla pevné a tuhé materiály, které nevynikají ani svou houževnatostí, tzv. že při nadměrné deformaci dochází ke vzniku trvalých porušení. **Za zvýšených teplot dochází k rozvolnění jejich řetězců, které jsou zpravidla jednoduché či velmi slabě rozvětvené, a tím se materiály stávají do jisté míry plastické až kapalné.** Proto je možné termoplasty za zvýšených teplot i tvářet (lisovat, vstřikovat do forem apod.). **Tento teplem aktivovaný proces je však vratný, proto jsou původní vlastnosti daných materiálů obnoveny při opětovném ochlazení.**

Termoplasty jsou polymery složené z lineárních makromolekul s dlouhým řetězcem. Termoplasty jsou v širokém rozsahu teplot viskózní materiály či viskózní kapaliny.

Do této skupiny řadíme například nejběžnější **polyethylén**¹³⁹, viz Obr. 24.13, nebo **polypropylen**¹⁴⁰ a **polyvinylchlorid**.¹⁴¹ Patří sem také **polystyren**, **polymethylmethakrylát** (plexisklo), **polyamid** aj.



Obr. 24.13 Značení polyethylénu

Reaktoplasty (dříve **termosety**, **duromery** či **duroplasty**), mezi které se řadí například **epoxidové pryskyřice**, **kaučuky**¹⁴², viz Obr. 24.14, a **fenolytické pryskyřice**, jsou charakteristické zesílením svých řetězců. Díky zesílení vykazují vysokou pevnost i tvrdost. Vzhledem k charakteru zesílení, které je dáno přítomností silných vazebných interakcí mezi jednotlivými řetězci, si tento typ polymerních materiálů zachovává tyto vlastnosti i za zvýšených teplot, proto je po jejich polymerizaci není možné tvářet. Nadměrné zahřívání pak na proces tváření nemá výrazný vliv, neboť zvýšená teplota vede primárně k degradaci polymerních řetězců, což má za následek trvalé a nevratné poškození samotného materiálu. Nicméně, teplem lze reaktoplast vytvrdit.

¹³⁹ **Polyethylén (PE)** – v systematické chemické nomenklatuře nazýván **Polymethandiyl**, sumární vzorec $(C_2H_4)_n$. Je to nejpoužívanější polymer na světě. Vzniká polymerací ethenu. Poprvé byl syntetizován v roce 1938.

¹⁴⁰ **Polypropylen (PP)** – v systematické chemické nomenklatuře nazýván **Poly(1-methylethan-1,2-diyl)**, sumární vzorec $(C_3H_6)_n$. Je druhým nejpoužívanějším plastem na světě. Vzniká polymerací propenu (propylenu). Poprvé byl syntetizován v roce 1951.

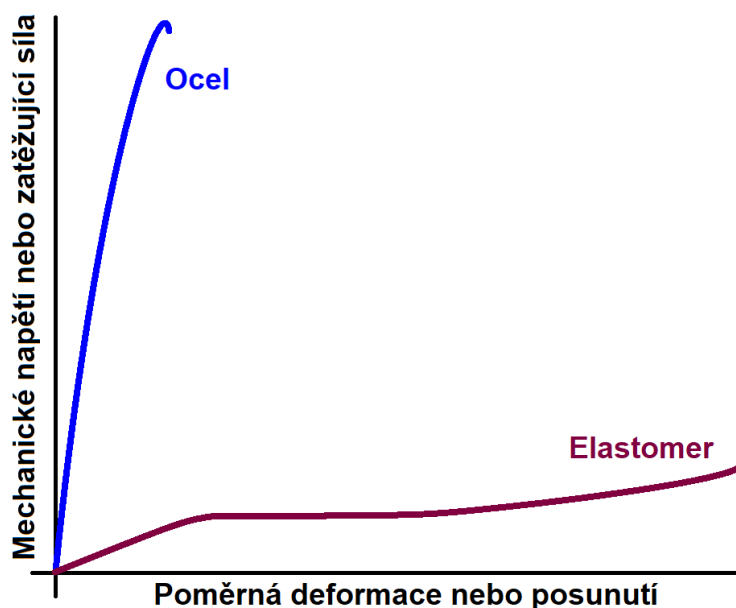
¹⁴¹ **Polyvinylchlorid (PVC)** – v systematické chemické nomenklatuře nazýván **poly(1-chloroethylen)**, sumární vzorec $(C_2H_3Cl)_n$. Je třetím nejpoužívanějším plastem na Zemi, hned po polyethylenu a polypropyleny. Vzniká polymerací vinylchloridu. Poprvé byl syntetizován roku 1835.

¹⁴² **Kaučuk** – v systematické chemické nomenklatuře nazýván **poly(1-chloroethylen)**, sumární vzorec $(C_2H_3Cl)_n$. Je polymerní materiál přírodního nebo syntetického původu. Zdrojem pro jeho výrobu může být také **Kaučukovník brazilský**, viz Obr. 24.14.



Obr. 24.14 Kaučukovník brazilský (*Hevea brasiliensis*) a výroba přírodního kaučuku, viz [17] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kau%C4%8Dukovn%C3%ADk_brazilsk%C3%BD.

Pro **elastomery** je charakteristická vysoká míra deformace, která však nevede k výraznějším trvalým tvarovým změnám, tzn. že se materiálům po odstranění vnějšího mechanického napětí vrací jejich původní tvar. Jsou tedy velmi pružné (elastické). Pro tento typ polymerních materiálů je charakteristický rozvětvený typ nanostruktury, který umožňuje velkou míru vzájemného posunu jednotlivých řetězců. Nejznámějším zástupcem této skupiny je **přírodní kaučuk**, od nějž je odvozena celá řada pryžových materiálů. Právě elastomery jsou velmi náchylné na zesílení struktury v důsledku působení vnějších vlivů. V technické praxi se pak jedná především o kombinaci kyslíku ze vzdušné atmosféry a UV či radiačního záření. Tento proces pak vede k významné degradaci elastických vlastností tohoto typu materiálu. Porovnání tahové zkoušky oceli a elastomeru je znázorněno na Obr. 24.15.



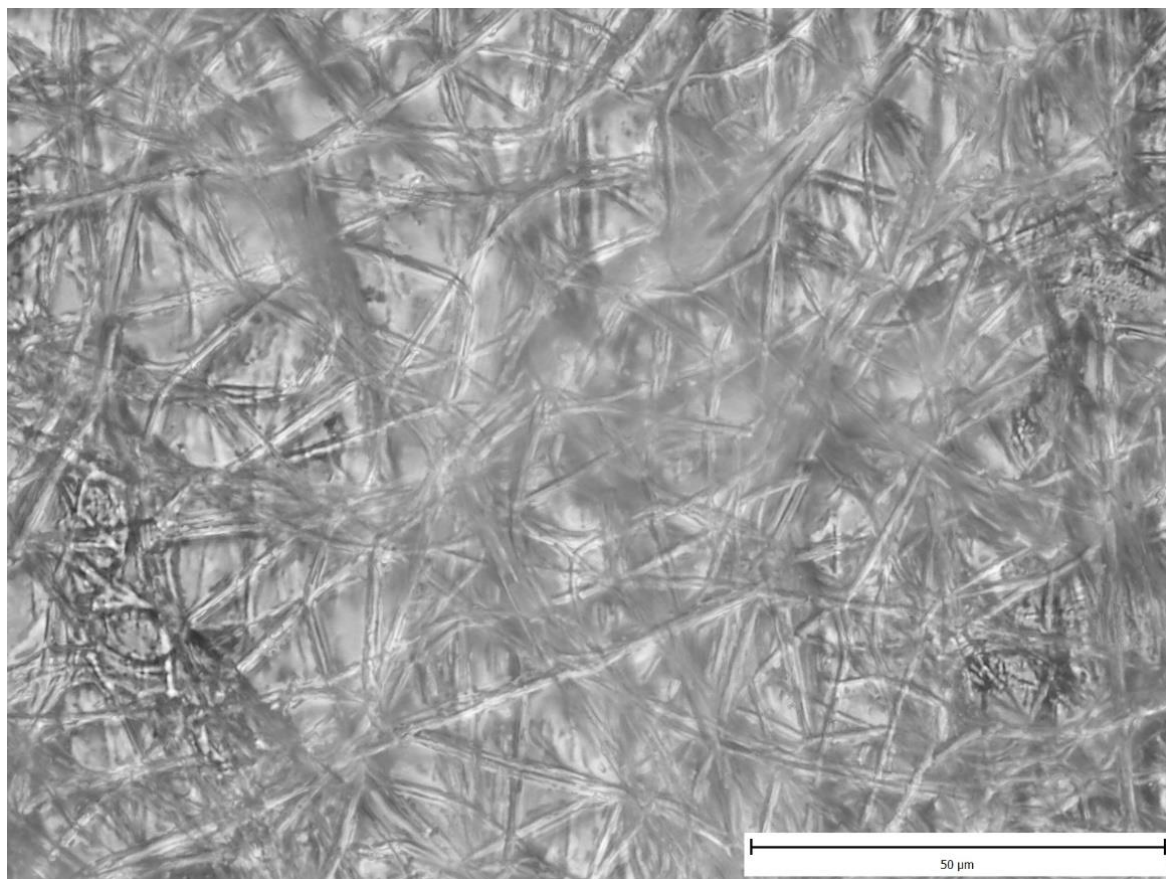
Obr. 24.15 Porovnání tahové zkoušky oceli a elastomeru

Použití Hookeova zákona pro elastomery má jen okrajové využití, protože chování elastomeru je obvykle silně nelineární. Vzhledem ke složitému materiálovému popisu elastomerů, je popis mechanických vlastností elastomerů předmětem dalšího dílu této učebnice.

Z hlediska použití polymerních materiálů ve zdravotnických oborech, došlo v posledních několika dekádách k významnému rozmachu především u degradabilních tělních náhrad či výzkumu náhrad tvrdých i měkkých tkání. Pro přehled je možné zmínit, že v současné době je běžné pro náhradu srdečních chlopní použití **umělé srdeční chlopně z pružných polymerních částí**, nebo při operační léčbě **přetržených kolenních vazů použít polymerní hřeby ke kotvení vazů nových**. Novinkou poslední dekády je pak rozšířené využití tzv. **polymerních scaffoldů (scaffoldů)**¹⁴³, viz např. [18], které slouží jako nosné prvky živých buněk v tkáňovém inženýrství. Pro příklad je na Obr. 24.16 znázorněna struktura 2D vláknitého scaffoldu vyrobeného metodou tzv. **electrospinningu**¹⁴⁴.

¹⁴³ **Polymerní scaffold** (anglicky **polymeric scaffold**) – je tvořen biokompatibilními polymery, které mají vhodné mechanické vlastnosti a jsou dobře odbouratelné v tkáních. Výhodné jsou např. při léčbě zlomenin v situacích, kdy chybí nebo je silně poškozená kostní tkáň (např. tříštivé zlomeniny). Mají vliv na rychlejší regeneraci kostní tkáně, snižování rizika infekce a jsou dobře odbouratelné lidským tělem. Často jsou založeny na bázi biodegradabilních hydrogelů na bázi bakteriální celulózy (BC) plněné vápníkem či jiné.

¹⁴⁴ **Electrospinning** – česky také elektrostatičké zvlákňování je technologický proces využívající silné elektrické pole k tvorbě mikrovláken nebo nanovláken. Vlákna vznikají mezi dvěma opačně nabitými elektrodami.



Obr. 24.16 Mikrostruktura 2D vláknitého scaffoldu pro kolonizaci tělními buňkami.

Více informací o materiálech, a především o biomateriálech, je uvedeno v dalších pokračováních této knihy.

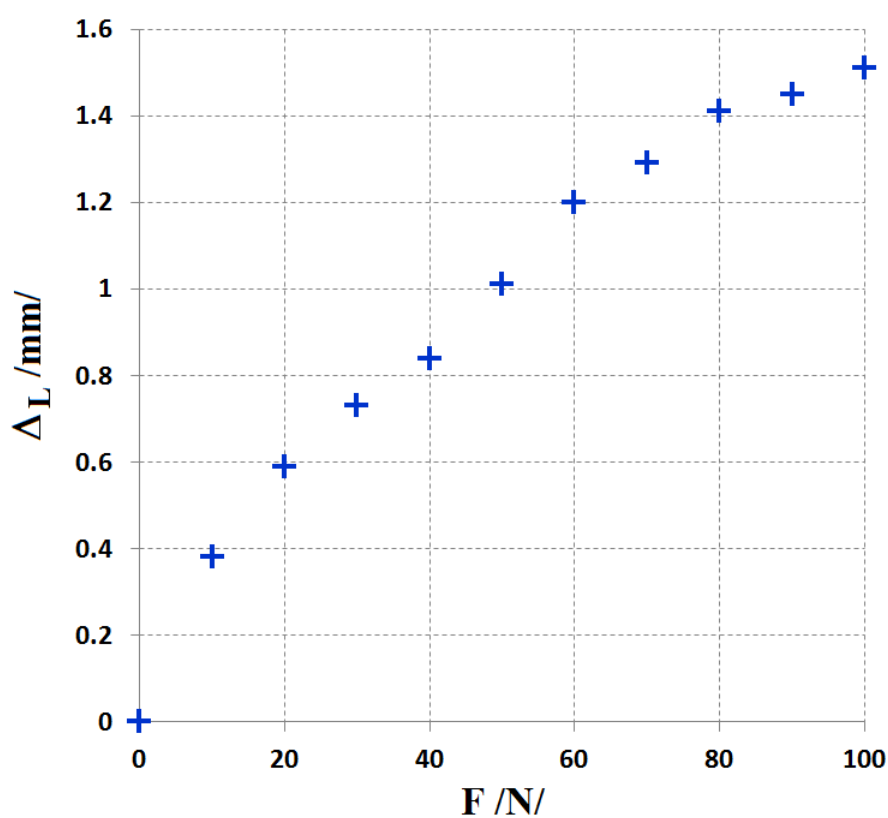
24.7 Příklady

Příklad 24.1: Stanovte vztah pro tuhost materiálu. K dispozici jsou výsledky měření, tj. závislost prodloužení Δ_L na zatěžující síle F , viz Tab. 24.4 a zobrazená závislost na Obr. 24.17. Řešení proveďte v programu Microsoft Excel. Proveďte regresi výsledků, tj. nalezení funkce tj. nalezení vhodných aproximací $\Delta_L = \Delta_{L(F)}$, pomocí lineární závislosti a pomocí kvadratické závislosti. Z těchto závislosti pak stanovte příslušné tuhosti. Na závěr stanovte možnou hodnotu prodloužení pro zátěžnou sílu 55 N.

Dáno: Síla F /N/ a prodloužení Δ_L /m/, viz Tab. 24.4 a Obr. 24.17.

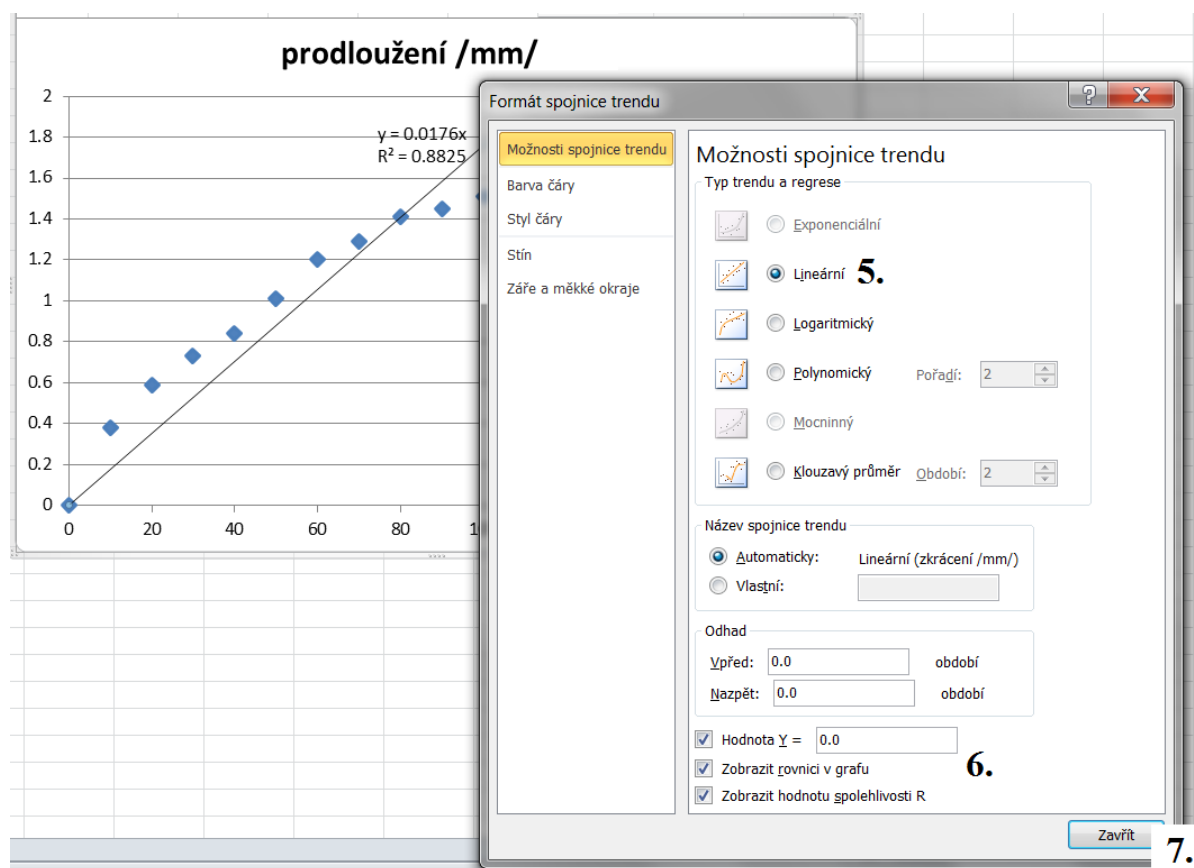
Tab. 24.4 Záznam naměřené závislosti prodloužení Δ_L na zatěžující síle F , viz Obr. 24.17.

Δ_L /mm/	F /N/
0	0
0.38	10
0.59	20
0.73	30
0.84	40
1.01	50
1.2	60
1.29	70
1.41	80
1.45	90
1.51	100

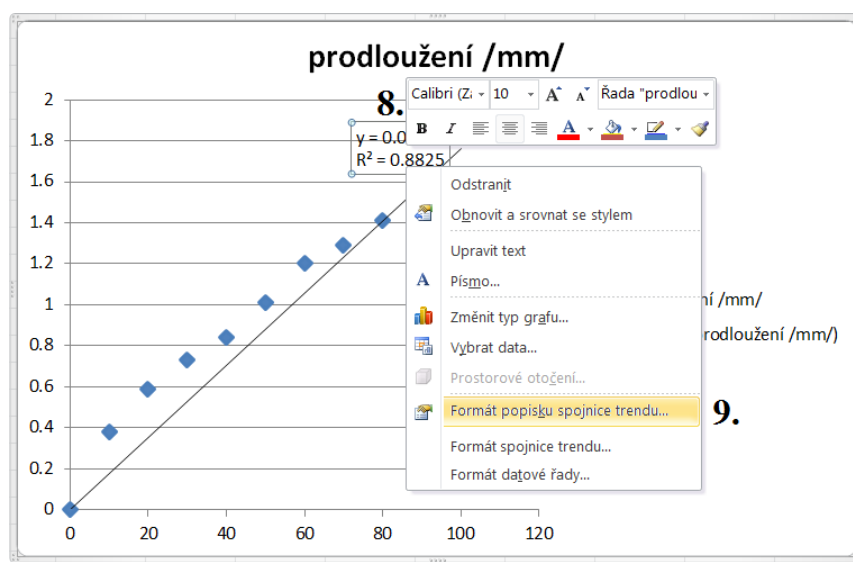
Obr. 24.17 Záznam naměřené závislosti na prodloužení Δ_L na zatěžující síle F , viz Tab. 24.4.

Řešení v programu Microsoft Excel je naznačeno na následujících obrázcích.

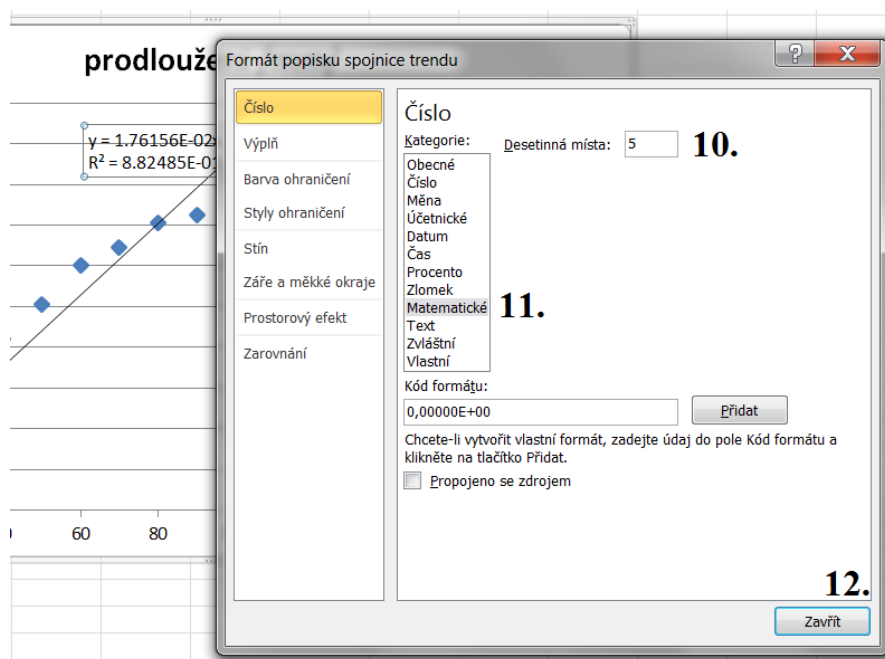
Nejprve je nutné zapsat data do programu Microsoft Excel a pak vykreslit bodový graf závislosti $\Delta_L = \Delta_{L(F)}$, viz Obr. 24.17 a 24.18.



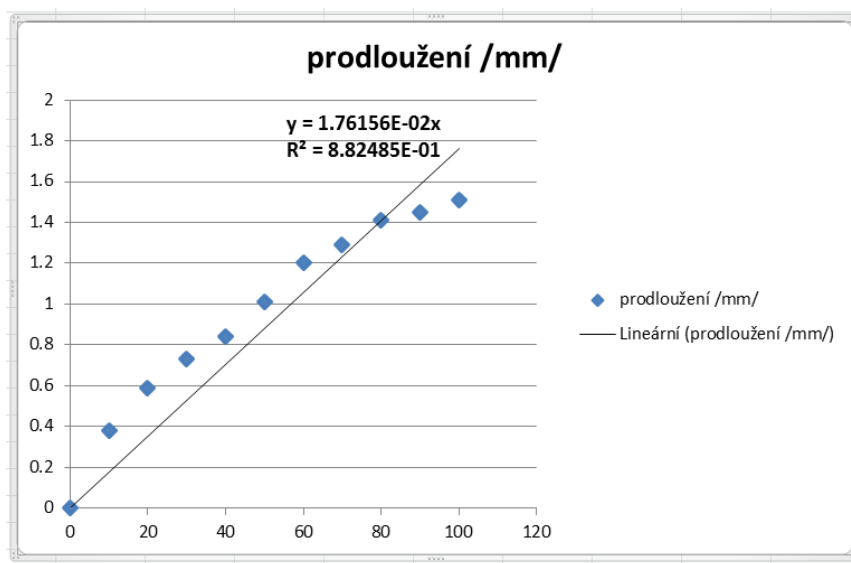
Obr. 24.20 Řešení Příkladu 24.20 (nalezení lineární aproximace výsledků).



Obr. 24.21 Řešení Příkladu 24.1 (nalezení lineární aproximace výsledků).



Obr. 24.22 Řešení Příkladu 24.1 (nalezení lineární aproximace výsledků).

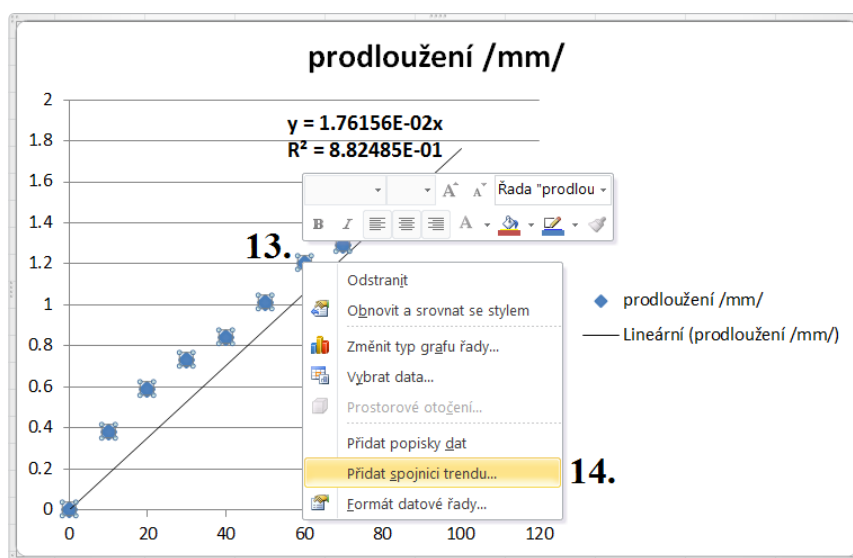


Obr. 24.23 Řešení Příkladu 24.1 (nalezení lineární aproximace výsledků).

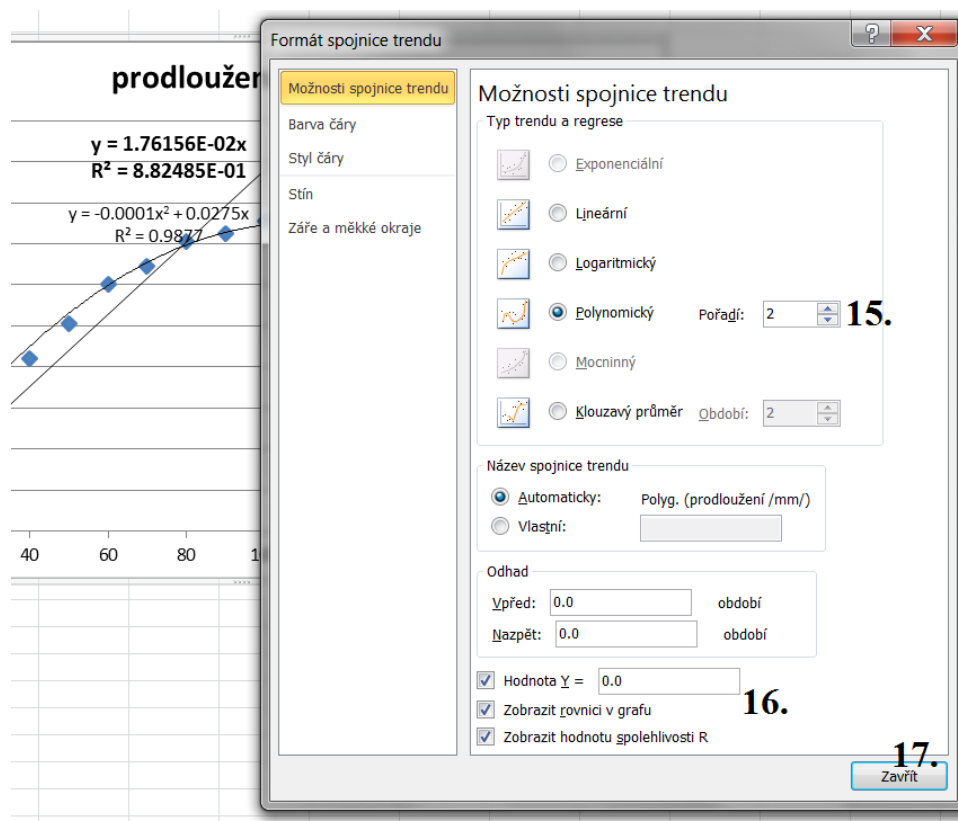
Z Obr. 24.23 je patrná rovnice přímky (funkční závislost) proložená naměřenými výsledky ve tvaru

$$\Delta_{L1} = \Delta_{L1(F)} = 1.76156 \times 10^{-2} F. \quad (24.6)$$

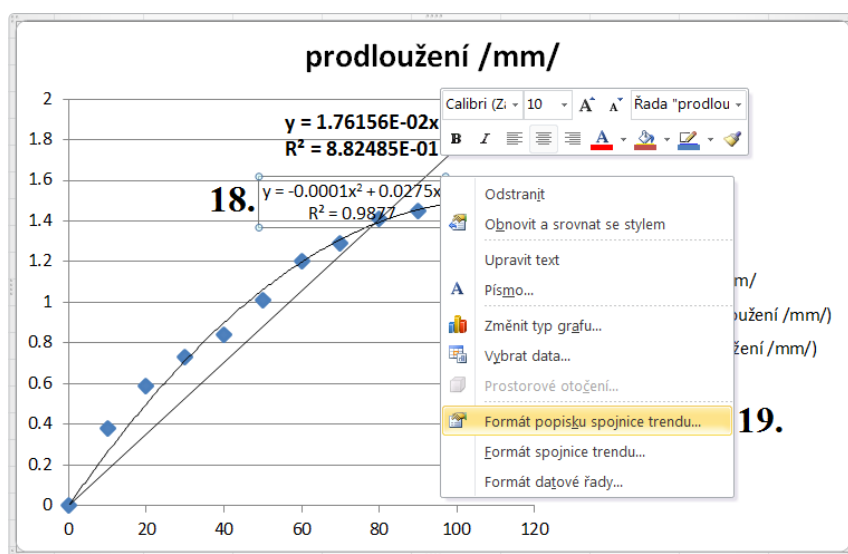
Obdobným postupem lze provést regresi kvadratickou rovnicí, kde se opět hledá aproximace tak, aby procházela bodem $[0; 0]$. Postup je zřejmý z Obr. 24.24 až 24.26.



Obr. 24.24 Řešení Příkladu 24.1 (nalezení kvadratické aproximace výsledků).

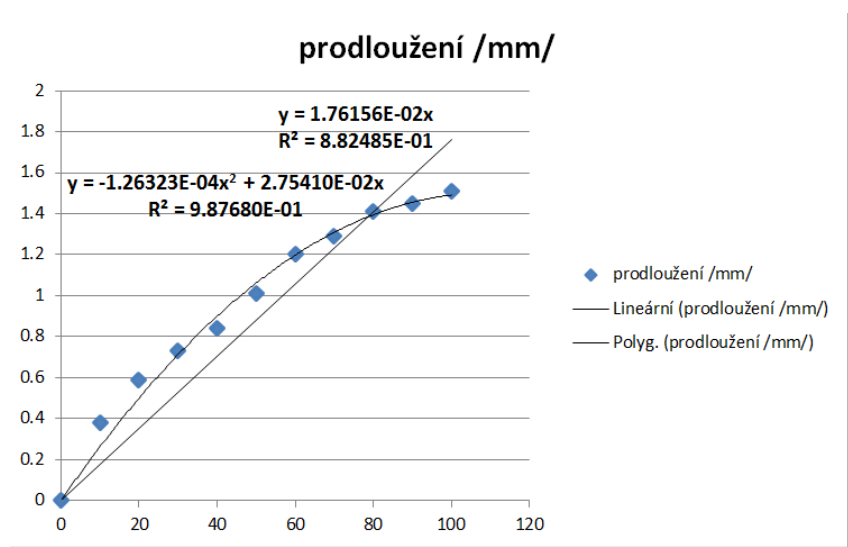


Obr. 24.25 Řešení Příkladu 24.1 (nalezení kvadratické aproximace výsledků).



Obr. 24.26 Řešení Příkladu 24.1 (nalezení kvadratické aproximace výsledků).

Postup nastavení zobrazení počtu desetinných míst je stejný jako na Obr. 24.22. Získaný výsledek je pak vidět na Obr. 24.27.



Obr. 24.27 Řešení Příkladu 24.1 (nalezená lineární a kvadratické aproximace výsledků).

Z Obr. 24.27 je patrná rovnice kvadratické rovnice vzniklá proložením naměřených výsledky ve tvaru

$$\Delta_{L2} = \Delta_{L2(F)} = 2.7541 \times 10^{-2}F - 1.26323 \times 10^{-4}F^2 = \left. \begin{aligned} &= (2.7541 \times 10^{-2} - 1.26323 \times 10^{-4}F)F. \end{aligned} \right\} \quad (24.7)$$

Aproximace kvadratickou rovnicí, tj. Δ_{L2} , se ve zkoumaném intervalu jeví jako přesnější než aproximace lineární rovnicí Δ_{L1} .

Tuhosti $k_{1,2}$ /Nm⁻¹/ pro příslušné aproximace se stanovují podle vztahu (24.1). Potom platí

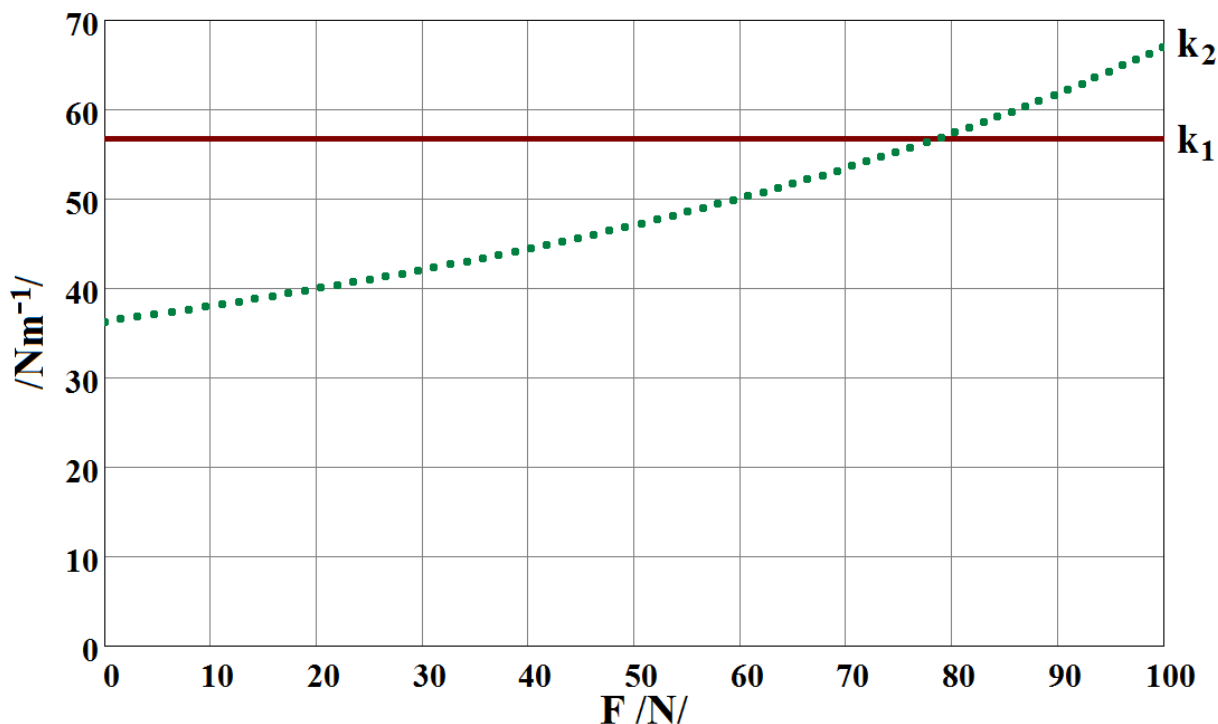
$$F_{1,2} = k_{1,2} \Delta_{L1,2} \quad (24.8)$$

a

$$k_1 = \frac{F_1}{\Delta_{L1}} = \frac{F}{\Delta_{L1}} = \frac{F}{1.76156 \times 10^{-2} F} = \frac{1}{1.76156 \times 10^{-2}} = 56.7679 \text{ Nm}^{-1}, \quad (24.9)$$

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{F_2}{\Delta_{L2}} = \frac{F}{\Delta_{L2}} = \frac{F}{(2.7541 \times 10^{-2} - 1.26323 \times 10^{-4} F) F} = \\ &= \frac{1}{2.7541 \times 10^{-2} - 1.26323 \times 10^{-4} F} \text{ Nm}^{-1}. \end{aligned} \quad (24.10)$$

Odvozené vztahy pro tuhosti k_1 a k_2 jsou vykresleny na Obr. 24.28.



Obr. 24.28 Tuhosti k_1 a k_2 v závislosti na síle F

Hodnoty prodloužení pro sílu $F = 55$ N lze odhadnout např. ze vztahů (24.6) a (24.7). Tedy

$$\Delta_{L1(F=55 \text{ N})} = 1.76156 \times 10^{-2} \times 55 \approx 0.97 \text{ mm},$$

$$\Delta_{L2(F=55 \text{ N})} = (2.7541 \times 10^{-2} - 1.26323 \times 10^{-4} \times 55) 55 \approx 1.13 \text{ mm}.$$

24.8 Otázky k pochopení látky

1. Co je materiál?
2. Uveďte alespoň tři možnosti členění materiálu?
3. Co je cytotoxicita?
4. Co je virocita?
5. Co je baktericita?
6. Co je alergie?
7. Co je karcinogen?
8. Co je teratogen?
9. Co je mutagen?
10. Co znamená biologicky nekompatibilní?
11. Co je biostabilita?
12. Co znamená nehomogenní materiál?
13. Co znamená izotropní materiál?
14. Co je anizotropie?
15. Co je ortotropie?
16. Vysvětlete pojem pružnost materiálu.
17. Jaký je rozdíl mezi elasticitou a pružností materiálu?
18. Jak se od sebe odlišují elastické a plastické deformace?
19. Vysvětlete, co je pružný materiál.
20. Co je mez kluzu?
21. Za jakých podmínek vznikají v tělese elasto-plastické deformace?
22. Co je tuhost materiálu?
23. Jak je definována poddajnost materiálu?
24. Co je Hookeův zákon?
25. Co je modul pružnosti?
26. Jaký je rozdíl mezi modulem pružnosti a Youngovým modulem?
27. Jaké hodnoty modulu pružnosti má ocel?
28. Jaké hodnoty modulu pružnosti má kost?
29. Součást je zatížena silou 1 kN, která vyvolá průhyb 1 mm. Je tuhost součásti při těchto hodnotách $= 10^{-6} \text{ Nm}^{-1}$?
30. Co je sypká hmota?
31. Jak se liší od sebe kapaliny a sypké hmoty?
32. Jak je definován sypný úhel?
33. Co je polymerní scaffold a jak může být používán v léčení?

24.9 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Přečtěte si zajímavý netradiční článek o materiálech, viz [19], Jaromír Kopeček *Miroslav Raab: Materiály a člověk, Netradiční úvod do současné materiálové vědy* <https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2000/cislo-9/miroslav-raab-materialy-clovek-netradicni-uvod-do-soucasne-materialove-vedy.html>.

24.10 Reference ke kapitole 24

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Definice a význam materiál (vyznam-slova.com), <https://www.vyznam-slova.com/materi%C3%A1l>.
- [3] Co je Materiál?, Slovníček účetních pojmů, Testy z účetnictví (testyzucetnictvi.cz), <http://www.testyzucetnictvi.cz/slovnicek-ucetnich-pojmu.php?pojem=material>.
- [4] Úřední věstník L 353/31. (europa.eu), <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/CS/TXT/HTML/?uri=OJ:L:2008:353:FULL&from=EN>.
- [5] CLP – klasifikace, označování a balení látek a směsí, Safety and health at work EU-OSHA (europa.eu), <https://osha.europa.eu/cs/themes/dangerous-substances/clp-classification-labelling-and-packaging-of-substances-and-mixtures>.
- [6] Biostabilita, Velký lékařský slovník On-Line (slovníky.cz) <https://lekarske.slovníky.cz/pojem/biostabilita>.
- [7] 10 nejdražších materiálů na Zemi, euro.cz, 2019, <https://www.euro.cz/clanky/10-nejdrazsich-materialu-1449377/>.
- [8] Obchod se slonovinou – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Obchod_se_slonovinou.
- [9] Pružnost – WikiSkripta, <https://www.wikiskripta.eu/w/Pru%C5%BEnost>.
- [10] Frydrýšek, K.: *Basic Strength and Elasticity of Materials*, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Department of Applied Mechanics, Ostrava, Czech Republic, 2015, pp. 1-264.
- [11] Pešat, Z. *Manipulace s materiálem v hutích*. ES VŠB – Technická univerzita Ostrava, 1992. ISBN 80-7078-107-6.
- [12] European Materials Handling Federation – Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/European_Materials_Handling_Federation.
- [13] Dratan, F., Jeřábek, K. *Manipulace s materiálem*, SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1979.
- [14] Polák, J. Pavliška, J. Slíva, A. *Dopravní a manipulační zařízení I*, ES VŠB – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2001. ISBN 80-248-0043-8.
- [15] Zegzulka, J. *Mechanika sypaných hmot*. ES VŠB – Technická univerzita Ostrava, Ostrava, 2004, ISBN 80-248-0699-0.
- [16] Grain boundary strengthening – Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Grain_boundary_strengthening.

- [17] Kaučukovník brazilský – Wikipedie (wikipedia.org)
https://cs.wikipedia.org/wiki/Kau%C4%8Dukovn%C3%ADk_brazilsk%C3%BD.
- [18] Basu, P. *Studie polymerních hydrogelových scaffoldů plněných vápníkem pro regeneraci kostní tkáně*, Univerzita Tomáše Bati ve Zlíně, Fakulta technologická, Centrum polymerních materiálů, Zlín, 2020, pp. 1-54, ISBN 978-80-7454-952-6,
<http://hdl.handle.net/10563/45938>.
- [19] Jaromír Kopeček Miroslav Raab: *Materiály a člověk, Netradiční úvod do současné materiálové vědy*, Vesmír 79, 530, 2000/9, <https://vesmir.cz/cz/casopis/archiv-casopisu/2000/cislo-9/miroslav-raab-materialy-clovek-netradicni-uvod-do-soucasne-materialove-vedy.html>.
- [20] Materiálové vědy – Wikipedie (Wikipedia.org),
https://cs.wikipedia.org/wiki/Materi%C3%A1lov%C3%A9_v%C4%9Bdy.
- [21] Kvar-gluonové plazma – Wikipedie (Wikipedia.org),
https://cs.wikipedia.org/wiki/Kvar-gluonov%C3%A9_plazma.

25. NAMÁHÁNÍ TAHEM A TLAKEM (ÚVOD, STATICKY URČITÉ ÚLOHY)

Tato kapitola rozvíjí poznatky z předchozích kapitol této knihy a prvního dílu této knihy, viz [1], kde jsou již vysvětleny základy statiky a pojem materiál. Stejně jako v přechodných kapitolách, je uvedeno, že pro hlubší studium problematiky je třeba blíže se seznámit s pružností a pevností, kde existuje mnoho vhodných učebnic i s řešenými příklady, viz např. [2] až [4]. Tato kniha totiž není učebnicí pružnosti a pevnosti ☺, ale **pružnost a pevnost je základem pro řešení mnoha úloh mechaniky/biomechaniky**. Jednoosá napjatost (namáhání tahem nebo tlakem), je právě pro svou jednoduchost a srozumitelnost, tím nejvhodnějším, osvědčeným a základním způsobem, jak pochopit základy pružnosti a pevnosti. Tématem této kapitoly jsou základní staticky určité úlohy v tahu a tlaku. Staticky neurčité úlohy jsou vysvětleny v dalším dílu této knihy.

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek.

25.1 Stručně o mechanickém napětí a historii pružnosti a pevnosti

Mechanické napětí¹⁴⁵ σ /Pa/, které má fyzikální jednotku pascal¹⁴⁶, slouží k vyhodnocování fyzikálního stavu, který vznikne v reálném tělese, pokud na něj působí účinky zatížení či okrajových nebo počátečních podmínek. Lze také říci, že napětí je míra či intenzita rozložení vnitřních sil na jednotku plochy tělesa. Zjednodušeně řečeno, je to vnitřní tlak působící v materiálu ☺.

Analýzou napětí a deformací pružných těles a jejich využití v mechanice, biomechanice a technice, se zabývá vědní obor **pružnost**¹⁴⁷ a **pevnost**¹⁴⁸. Na pružnosti a pevnosti jako základu, staví i další obory jako jsou plasticita, lomová mechanika, únava materiálu, creep¹⁴⁹, koroze, inženýrský design, posudek a návrh konstrukcí, strojních částí a implantátů, materiálůvé inženýrství atp. Obecně, pružnost a pevnost je velmi těžké oddělit od statiky a někteří autoři dokonce pružnost a pevnost nazývají jako mechaniku materiálu.

¹⁴⁵ Anglicky **stress**. Pozor, neplést s elektrickým napětím U /V/! Elektrické napětí je definováno jako rozdíl elektrických potenciálů mezi dvěma body prostoru nebo obecněji, dle Michaela Faradaye, zákonem elektromagnetické indukce.

¹⁴⁶ **Blaise Pascal** (1623–1662) slavný francouzský matematik, fyzik, spisovatel a křesťanský filosof. Je po něm nazvána fyzikální jednotka tlaku a napětí $\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$, $\text{MPa} = \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$.



Portrét Blaise Pascala a jeho mechanický počítací stroj Pascalina (zdroj obrázků internet)

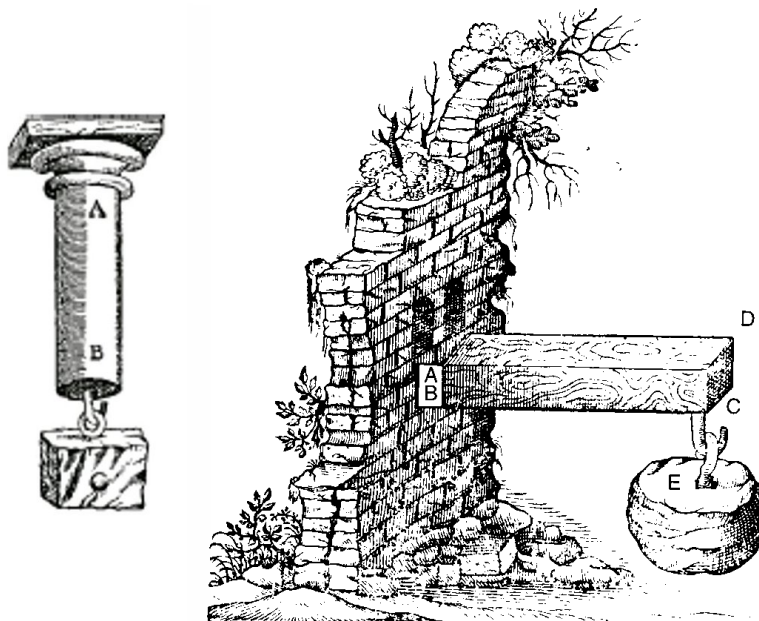
¹⁴⁷ **Pružnost (elasticita)** studuje souvislosti mezi deformacemi těles, zatížením, vnitřními silovými účinky a materiálovými vlastnostmi. Primárně se zaměřuje na pružná tělesa.

¹⁴⁸ **Pevnost** (anglicky **strength**) je důležitá fyzikální vlastnost pevných látek, vyjadřující míru porušení celistvosti materiálu v souvislosti se zatížením a deformacemi.

¹⁴⁹ **Creep** (česky **tečení materiálu**) souvisí s časově závislou plastickou deformací materiálů v závislosti na vyšší teplotě.

Vývoj pružnosti a pevnosti je úzce spjat s vývojem lidské společnosti. Podle zachovaných písemných dokladů, byl jedním z prvních otců pružnosti a pevnosti ital **Leonardo da Vinci**, viz také poznámka pod čarou v Kapitole 23.

Dalším významným průkopníkem byl ital **Galileo Galilei**¹⁵⁰, který byl první, kdo systematicky studoval pevnosti nosníků teoreticky i experimentálně a výsledky uvedl v knize „Discorsi e Dimostrazioni matematiche“, která byla vydána v roce 1638, viz Obr. 25.1.



Obr. 25.1 Galileo Galilei „Discorsi e Dimostrazioni matematiche“ (a) obálka knihy, (b) zkouška tahem, (c) zkouška ohybem.

Na pracích Galilea Galilei v průběhu času stavěli mnozí další významní vědci, kde mnoho z nich je uvedeno v této knize, a vznikla tak nauka o pružnosti a pevnosti, tak jak ji známe dnes.

Napětí v obecném případě (tj. prostorová úloha) je popsáno tenzorem napjatosti¹⁵¹ (s rozměry matice 3×3) nebo příslušným vektorem, blíže další díly této knihy.

¹⁵⁰ **Galileo Galilei** (1564–1642) byl významný italský astromom, filosof, fyzik a vynálezce.



(zdroj obrázku internet)

¹⁵¹ **Tenzor napjatosti (tenzor napětí)** $\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$, je tenzorem 2. řádu, kde σ_x , σ_y a σ_z /Pa/ jsou normálová napětí a τ_{xy} , τ_{yz} a τ_{zx} /Pa/ jsou smyková napětí, blíže další díly této knihy nebo učebnice mechaniky či pružnosti a pevnosti.

Existují napětí normálová působící ve směru normály plochy a napětí smyková (tečná) působící ve směru tečny plochy. Dále jsou také napětí ekvivalentní či redukovaná¹⁵², hlavní, fiktivní, únavová¹⁵³, zbytková¹⁵⁴, limitní, mezní, dovolená atd. Tyto pojmy jsou běžně používané mezi inženýry a v dalších kapitolách či dalších dílech této knihy jim bude také věnován prostor.

Podobně jako zatížení, napětí mohou být deterministické¹⁵⁵ či stochastické¹⁵⁶ povahy a v závislosti na čase mohou být statické či dynamické, respektive stacionární nebo

¹⁵² **Redukované (ekvivalentní) napětí** se běžně a nejčastěji používají při posudcích bezpečnosti součástí či návrhu součástí. Stručně řečeno z obecné (prostorové) napjatosti se, dle zvolené teorie (kritéria, hypotézy), stanoví ekvivalentní (redukované) jednoosé napětí. Existuje velké množství vzorců pro stanovení redukovaných napětí. Mezi nejznámější a hojně používané je například redukované napětí dle teorie maximálních smykových napětí (Guest, Tresca, Guest-Tresca-Coulomb, hypotéza τ_{MAX}) nebo redukované napětí maximální hustoty deformační energie na změnu tvaru (známá také jako hypotéza Huber-Mises-Hencky, Maxwell, HMM, von Mises, oktaedrických smykových napětí nebo Maxwell-Huber-Hencky-von Mises). Většina sw MKP jednoduše umožňuje, z výsledků výpočtů, stanovit několik typů redukovaných napětí.

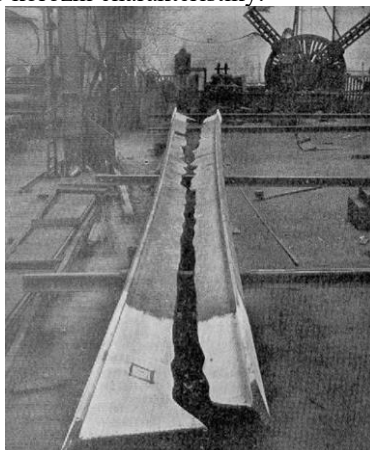
¹⁵³ **Únava materiálu** (anglicky **fatigue**) je degradační proces cyklického zatěžování těles. Je to „pomalu“ postupující kumulované poškození materiálu, které výrazně ovlivňuje životnost. Proces může vést až k náhlému únavovému lomu. Průběh únavového poškození je závislý na zatížení a počtu zatěžovacích cyklů.



Typický únavový lom, hliníková slitina (zdroj fotografie [6])

Určitým fenoménem v lékařství je **únavová zlomenina**, která vzniká bez zjevného výrazného vyvolávacího traumatu a přichází nečekaně (opakovaná mikrotraumata při přetěžování). Příkladem únavové zlomeniny jsou zlomeniny zánártních kostí po dlouhých pochodech či dlouhodobém tréninku. Únavové zlomeniny bývají „noční můrou“ sportovců.

¹⁵⁴ **Zbytková (residuální) napětí** jsou mechanická napětí, která se vyskytují v materiálu v podstatě bez působení vnějších sil a jsou parametrem celkového stavu materiálu. Vznikají v důsledku technologie výroby materiálu a mají vliv na pevnostní, únavové nebo korozní charakteristiky.

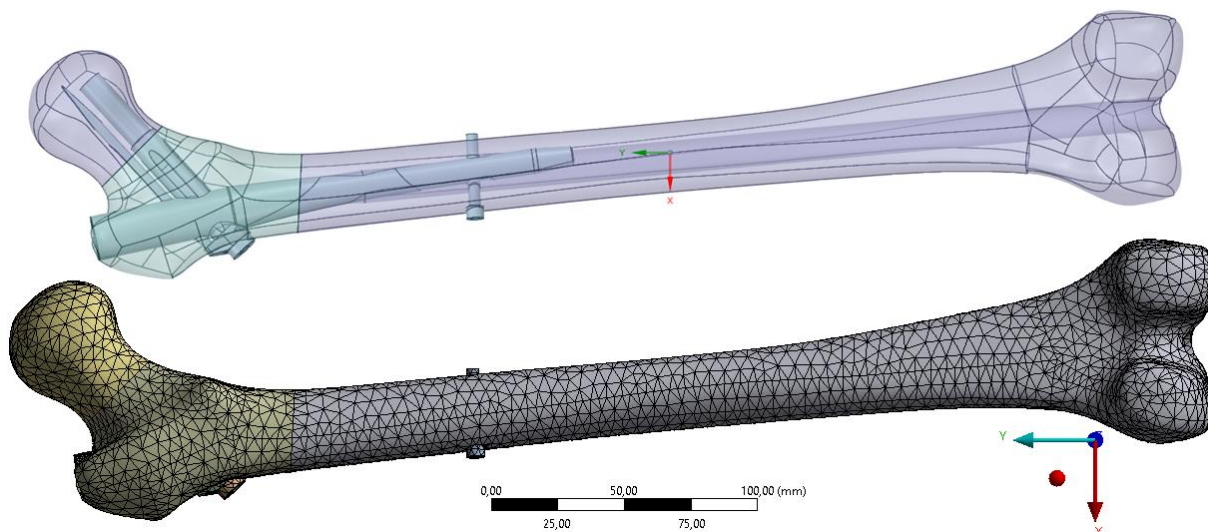


Nosník (I-profil) „samovolně“ prasklý vlivem zbytkových napětí (zdroj obrázku [5])

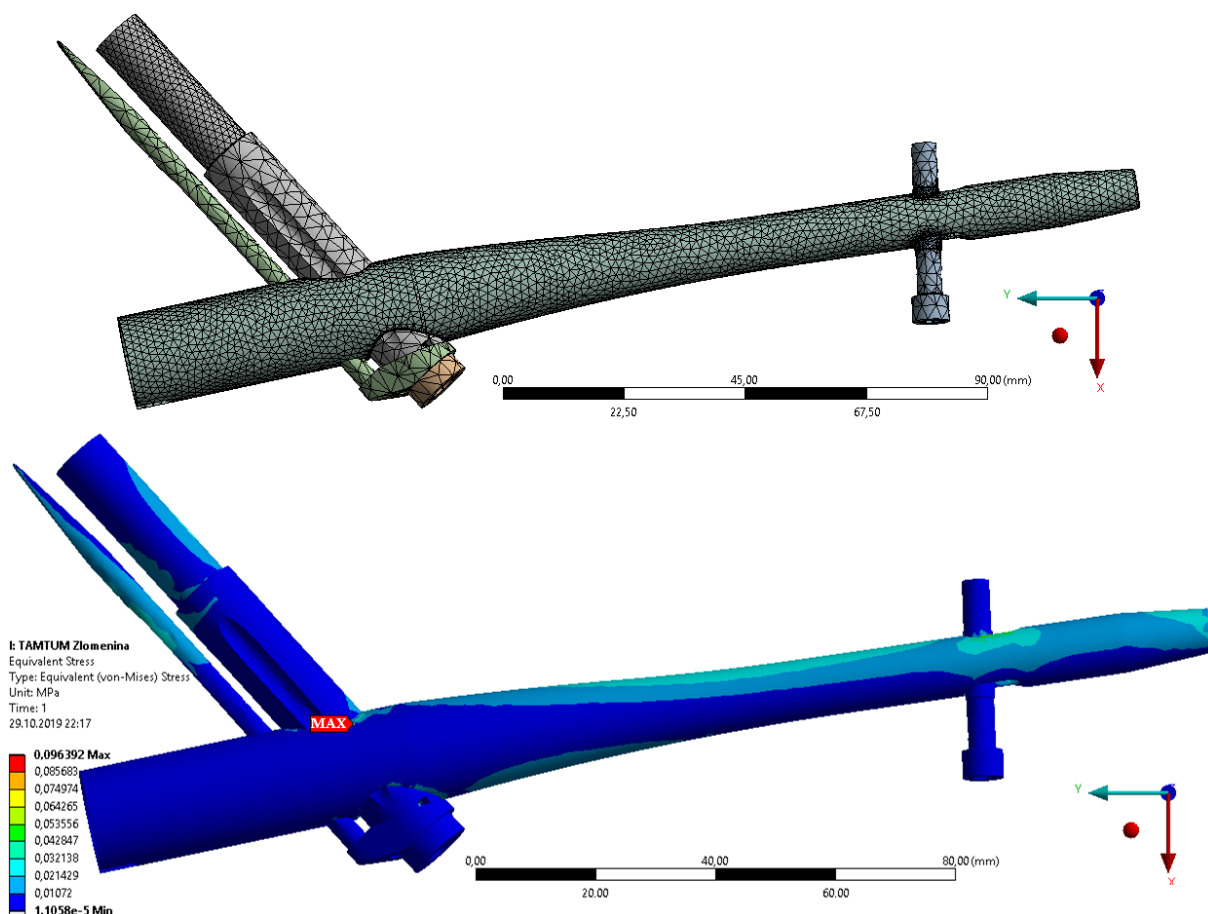
¹⁵⁵ **Deterministický** je opakem stochastického. Hodnota je přesně daná (konstantní) a nemá žádnou stochastickou variabilitu.

¹⁵⁶ **Stochastika** je vědecký obor s velmi širokou aplikovatelností, který se zabývá náhodnými jevy. Spojuje v sobě teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku.

nestacionární. Napětí lze počítat analytickým postupem (to bude nejčastěji předvedeno v této knize) či numerickým postupem, viz Obr. 25.2 a 25.3, anebo nepřímo měřit. Blíže další díly této knihy nebo učebnice mechaniky.



Obr. 25.2 Lidský femur se zlomeninami AO 31B3 (fractura mediocervicalis femoris) a AO 31A3 (fractura subtrochanterica femoris) a s vloženým intramedulárním hřebem Tatum (a) CAD model, (b) zjednodušená síť konečných prvků pro výpočet pomocí metody konečných prvků.

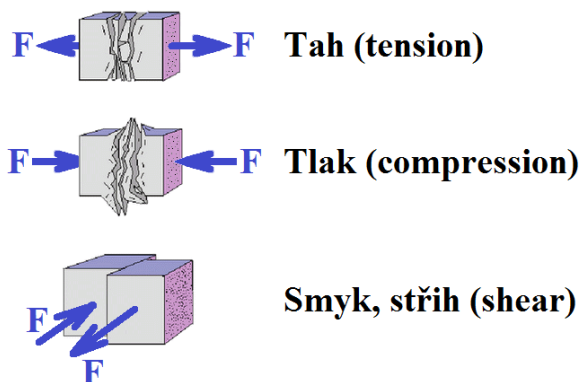


Obr. 25.3 Intramedulární hřeb Tatum (a) zjednodušená síť konečných prvků, (b) průběh redukovaných napětí dle von Misesa při zatížení jednotkovou silou (metoda konečných prvků).

Je vhodné také upozornit na termín **napjatost**¹⁵⁷, který popisuje celkový stav tělesa (charakter napjatosti, povahu složek napětí), přičemž napětí je veličina, přičemž je jasné, že oba termíny spolu souvisí ☺.

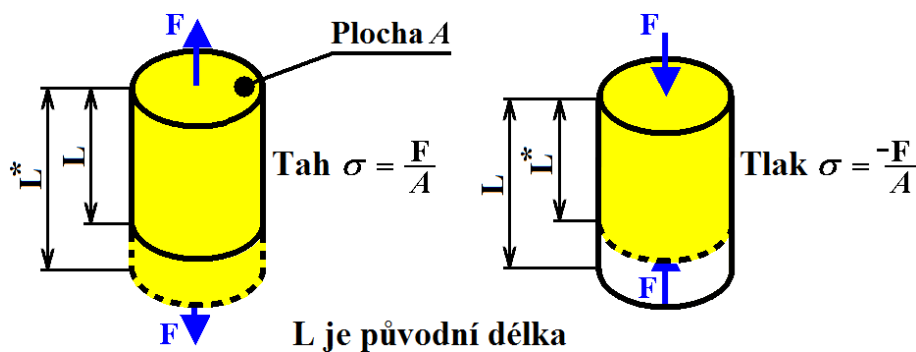
25.2 Jednoosá napjatost (úvod, tah, tlak, normálové síly, napětí a deformace)

Na Obr. 25.4 jsou znázorněny elementy vystavené přímému tahu, tlaku v podélném směru a smyku v příčném směru jako příklady **jednoosé napjatosti**.



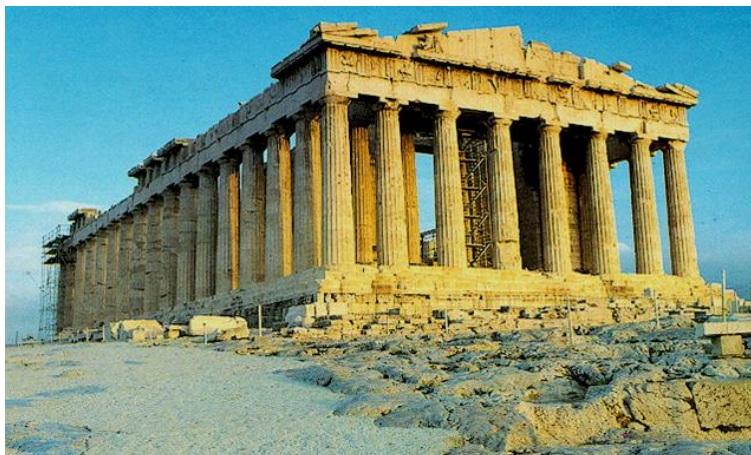
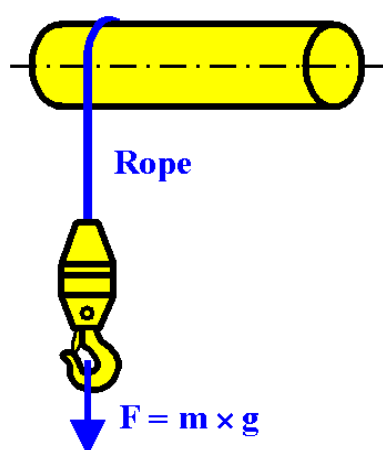
Obr. 25.4 Příklady jednoosé napjatosti - namáhání tahem, tlakem a smykem.

V dalším textu je pozornost zaměřena jen na namáhání tahem/tlakem, viz Obr. 25.5 až 25.7. **Jestliže jediným vnitřním statickým účinkem je normálová síla, pak je těleso namáhané tahem nebo tlakem.**

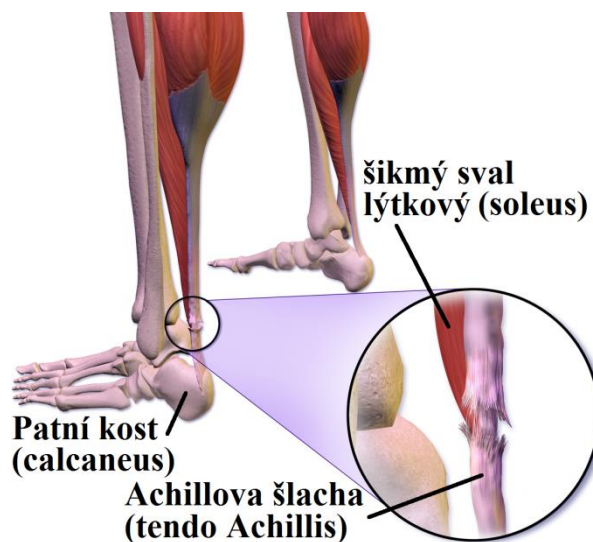


Obr. 25.5 Namáhání (a) tahem, (b) tlakem.

¹⁵⁷ **Napjatost** může být jednoosá, dvouosá (např. rovinná), trojosá (prostorová), elastická, elasto-plastická atp.



Obr. 25.6 (a) Tahové zatížení lana, (b) Tlakové zatížení sloupů (Athény, Řecko).



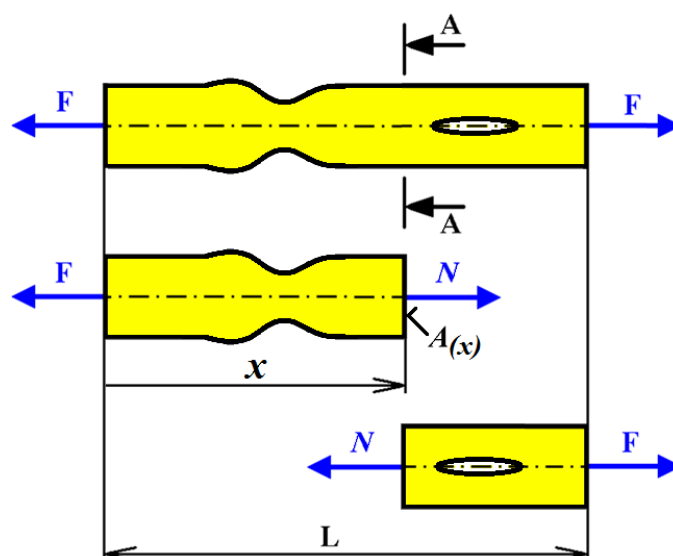
Obr. 25.7 Tah (a) přetahování psů, (b) Ruptura tendinis Achillis¹⁵⁸, tj. přetržení Achillovy šlachy (zdroj obrázku [7] https://en.wikipedia.org/wiki/Achilles_tendon_rupture#/media/File:Achilles_Tendon_Tear.png a autorem následně upraveno a doplněno).

Na atomární úrovni, tah nebo tlak vzniká, když se atomární vzdálenosti zvětšují nebo zmenšují.

Důležité je také definovat pojem **prut**, což je v podstatě tenký a dlouhý nosník, který přenáší pouze normálové síly.

V souladu s Newtonovými zákony mechaniky, tj. v souladu s Kapitolou 23, pokud je tyč (součást, těleso) vystavena působení vnějších axiálních sil, pak se v ní indukují vnitřní (normálové síly) N , což je znovu vysvětleno také na Obr. 25.8. **Normálovou sílu lze definovat jako vnitřní výslednou složkovou sílu působící kolmo na zkoumaný řez A-A.**

¹⁵⁸ **Ruptura tendinis Achillis** je závažné zranění spojené s dlouhodobou léčbou obvykle v délce 3 až 12 měsíců. Ruptura (přetržení) je ve vzdálenosti cca 20–60 mm nad patou. K léčbě se používá konzervativní metoda nebo operativní metody (otevřená nebo endoskopická).



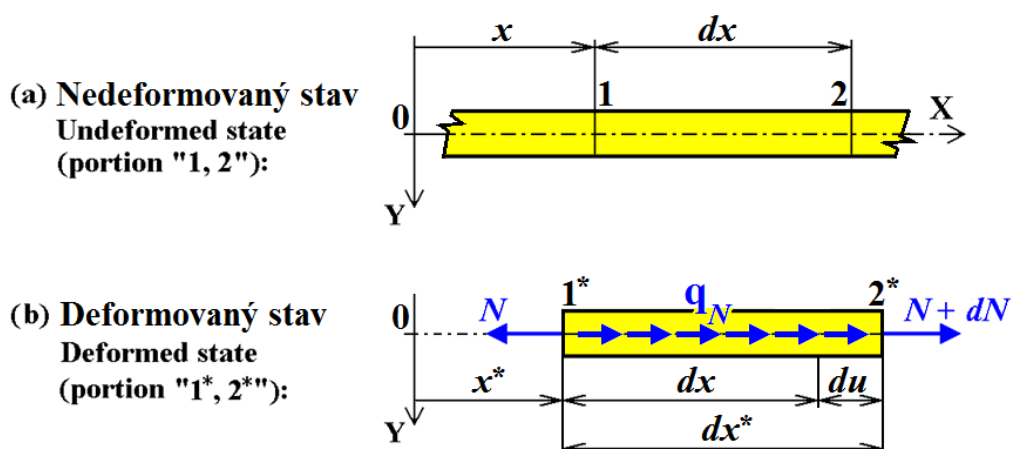
Obr. 25.8 K definici normálových sil N pro tyč proměnlivého průřezu s otvorem (trhlinou), v tomto případě $N_{(x)} = F$ (Eulerova metoda virtuálního řezu, blíže Kapitola 23).

Tahové normálové síly jsou kladné a tlakové normálové síly jsou záporné (viz také znaménková konvence v Kapitole 23). **Tahové normálové síly a napětí způsobují prodloužení délky příslušného úseku tyče (tj. $\Delta_L > 0$), naopak tlakové normálové síly a napětí vyvolávají zkrácení délky úseku tyče (tj. $\Delta_L < 0$).**

Pokud se tyč neprodlouží (tj. $\Delta_L = 0$), tak to obecně nemusí znamenat, že tyč není zatížena tahem nebo tlakem (příkladem mohou být některé staticky neurčité úlohy).

V dalších úvahách se uvažuje teorie 1. řádu, tj. předpokládá se, že deformace tělesa (nosníku, prutu, součásti, biologického orgánu) příliš neovlivní silovou a momentovou rovnováhu tělesa. Teorie 1. řádu je vysvětlena v Kapitole 22.5.

Pro tah a tlak je možno odvodit také **3. Schwedler-Žuravského větu** a rozšířit tak diferenciální vztahy uvedené v rovnicích (23.1) až (23.3). Při odvozování se opět vychází ze dvou souměrných řezů 1 a 2 ve vzdálenosti dx , viz Obr. 25.9.



Obr. 25.9 K dovození 3. Schwedler-Žuravského věty

Oproti úvahám uvedených v Kapitole 23, je zavedeno také navíc **osové (axiální) spojitě zatížení** q_N /Nm⁻¹/, které obecně může být způsobeno vlastní tíhou nebo třecími silami v délkových vazbách či uchycení (např. vrut zavedený do dřeva atp.). **Kladný směr q_N je ve směru orientovaného úseku x či x^* .**

Z rovnováhy sil $\sum_i F_{Xi} = 0$, na elementu délky dx ¹⁵⁹, tj. $N - (N + dN) - q_N dx = 0$, vyplýne

$$\frac{dN}{dx} = -q_N, \quad \text{tj. } N = - \int q_N dx. \quad (25.1)$$

Pro případy, kdy $q_N = 0$ Nm⁻¹, vyplývá z rovnice (25.1), že $N = - \int 0 dx = \text{konstanta}$.

Znaménková konvence (tj. stručně řečeno, proti směru postupu x je kladná normálová síla) je vysvětlena v Kapitole 23.

Pro **normálové (osové, axiální) napětí** σ /Pa/, jak již bylo uvedeno v Kapitole 25.1, platí

$$\sigma = \frac{\text{Normálová síla}}{\text{příčná plocha průřezu}} = \frac{N(x)}{A(x)}, \quad \text{resp. lze značit } \frac{N}{A}, \quad (25.2)$$

kde $A_{(x)}$, resp. A /m²/ značí plochu příčného řezu ve vzdálenosti x , viz Obr. 25.8.

Zobecněná definice osového napětí lze chápat jako aplikaci proměnlivé normálové síly po průřezu vztaženou na proměnlivou plochu průřezu. Potom platí limitní vztah

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta N}{\Delta A} \right) = \frac{dN}{dA}, \quad \text{tj. řešení } N = \int_A \sigma dA. \quad (25.3)$$

Napětí lze definovat také pomocí **Hookeova zákona pro jednoosou napjatost**, viz Kapitola 24 a rovnice (24.3). Platí tedy

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (25.4)$$

kde **modul pružnosti** E /Pa/ v tahu nebo tlaku (Youngův modul) je uveden pro různé materiály v Tab. 24.1, a $\varepsilon = \varepsilon_{\text{ENG}} / 1/$ je v dalším textu inženýrská poměrná deformace, viz Kapitola 22 a rovnice (22.2).

Z výše uvedeného vyplývají vztahy pro řešení úloh tahu a tlaku pro průřezy s konstantní příčnou plochou průřezu, které jsou uvedené v Tab. 25.1.

¹⁵⁹ Také je možno udělat rovnováhu na deformovaném úseku dx^* , to však má smysl jen pro velké deformace nebo pro malé deformace v teorii 2. řádu a vede to ke složitějším vztahům. Pro běžné úlohy této knihy, je dostatečné dělat jednoduchou rovnováhu na úseku v nedeformovaném stavu dx .

Tab. 25.1 Základní vztahy pro řešení jednoduchých úloh tahu a tlaku.

ε - inženýrská poměrná deformace	$\varepsilon = \frac{L^* - L}{L} = \frac{\Delta_L}{L} = \frac{\sigma}{E} = \frac{N}{EA}$	Platí za předpokladu, že parametry A , N , E jsou konstanty, tj. nezávislé na souřadnici $x \in \langle 0; L \rangle$.
σ - napětí	$\sigma = E\varepsilon = E \frac{L^* - L}{L} = \frac{E\Delta_L}{L} = \frac{N}{A}$	
Δ_L - prodloužení celého úseku délky L	$\Delta_L = L^* - L = \varepsilon L = \frac{\sigma L}{E} = \frac{NL}{EA}$	
N - normálová síla	$N = EA\varepsilon = A\sigma = EA \frac{\Delta_L}{L} = EA \frac{L^* - L}{L},$ $\frac{dN}{dx} = 0$	Platí za předpokladu teorie malých deformací a platnosti Hookeova zákona.

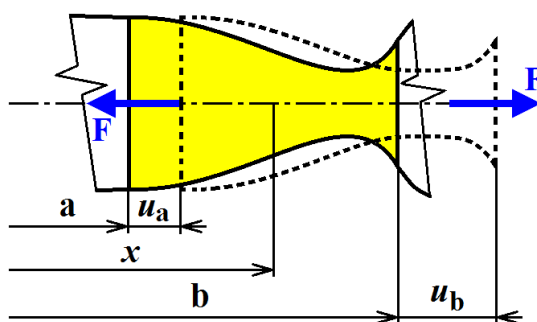
Inženýrskou poměrnost deformaci lze definovat obecným vztahem (22.19), kde u /m/ je posunutí v axiálním směru. Potom, dle Obr. 25.9, platí

$$\varepsilon = \frac{dx^* - dx}{dx} = \frac{du}{dx}. \quad (25.5)$$

Vztah (25.5) je obecněji aplikovatelný a může být použitý také pro úlohy s proměnlivými hodnotami plochy, modulu pružnosti a normálové síly. Integrací vztahu (25.5) na úseku $x \in \langle a; b \rangle$ se získá

$$\int_{u_a}^{u_b} du = \int_a^b \varepsilon dx, \quad \text{tj. } u_b - u_a = \int_a^b \varepsilon dx, \quad \text{nebo obecněji } \int du = \int \varepsilon dx, \quad (25.6)$$

kde u_a , u_b /m/ jsou posunutí (tj. prodloužení nebo zkrácení kót a , b), viz Obr. 25.10.



Obr. 25.10 Tyč s proměnlivým průřezem namáhaná tahem.

Z výše uvedeného vyplývají vztahy pro obecné řešení úloh tahu (tj. pro případy kdy A , N , E nejsou konstantní), které jsou uvedené v Tab. 25.2.

Tab. 25.2 Zobecněné vztahy pro řešení úloh tahu a tlaku.

$\varepsilon_{(x)}$ - inženýrská poměrná deformace ve vzdálenosti x	$\varepsilon_{(x)} = \frac{du_{(x)}}{dx} = \frac{\sigma_{(x)}}{E_{(x)}} = \frac{N_{(x)}}{E_{(x)}A_{(x)}}$	Platí za předpokladu teorie malých deformací a platnosti Hookeova zákona
$\sigma_{(x)}$ – napětí ve vzdálenosti x	$\sigma_{(x)} = E_{(x)}\varepsilon_{(x)} = E_{(x)} \frac{du_{(x)}}{dx} = \frac{N_{(x)}}{A_{(x)}}$	
$u_{(x)}$ - posunutí ve vzdálenosti x	$\frac{du_{(x)}}{dx} = \varepsilon_{(x)} = \frac{\sigma_{(x)}}{E_{(x)}} = \frac{N_{(x)}}{E_{(x)}A_{(x)}},$ $\int du = \int \varepsilon dx$	
N - normálová síla ve vzdálenosti x	$N_{(x)} = E_{(x)}A_{(x)}\varepsilon_{(x)} = A_{(x)}\sigma_{(x)} = E_{(x)}A_{(x)} \frac{du_{(x)}}{dx},$ $\frac{dN_{(x)}}{dx} = -q_N, \text{ kde } q_N \text{ má kladný směr ve směru orientované souřadnice } x$	

Prodloužení a zkrácení součásti lze také počítat podle energetických principů mechaniky, které však nejsou v této knize uvedeny a budou tématem dalšího dílu této knihy.

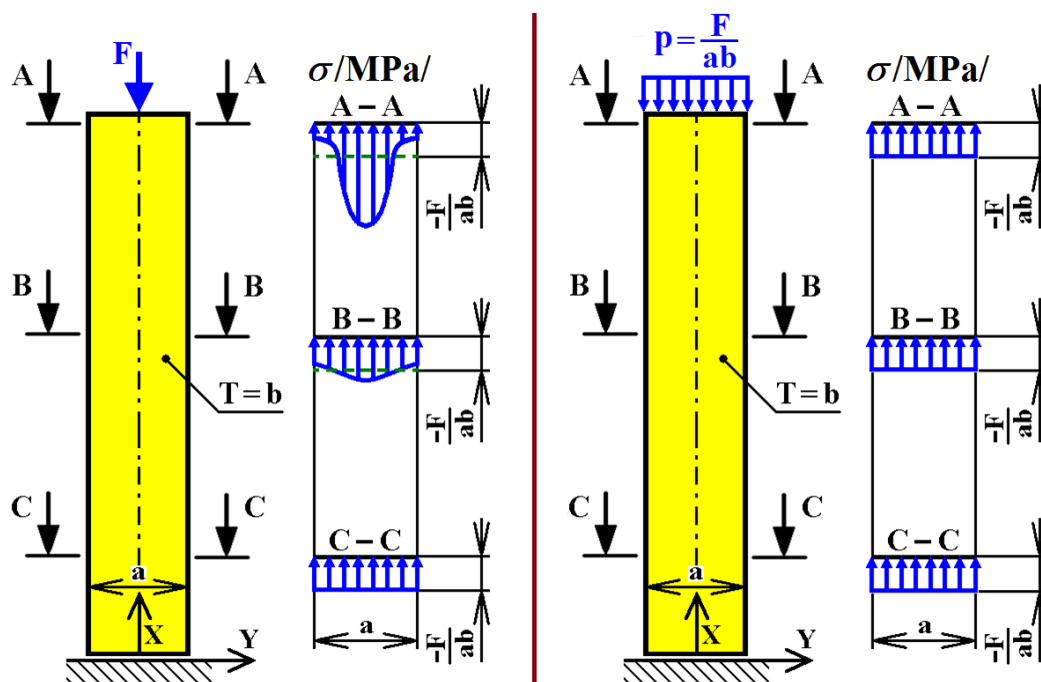
25.3 Saint-Venantův princip

Saint-Venantův¹⁶⁰ princip lokálního účinku zatížení lze stručně vysvětlit následovně. Mějme dvě staticky ekvivalentní zatížení, které působí na plochu hranolu $A = ab$, např. bodovou sílu F a tlakové zatížení $p = \frac{F}{A} = \frac{F}{ab}$ jejichž silové výslednice jsou shodné, viz Obr. 25.11. Potom platí, že **stav napětí a deformací v místech tělesa dostatečně vzdálených od působíště staticky ekvivalentních zatížení, je téměř stejný.**

¹⁶⁰ **Adémar Jeán Claude Barré, Count de Saint-Venant** (1797–1886) byl slavný francouzský matematik, fyzik a inženýr, který je mnohými označován za jednoho z nejslavnějších „pružnostníků“ všech dob. Známa a dodnes používaná je také jeho teorie kroucení nosníků obecných průřezů.



(zdroj fotografie internet)



Obr. 25.11 Vysvětlení Saint-Venantova principu na dvou staticky ekvivalentních zatíženích působících na tyč obdélníkového příčného průřezu $a \times b$.

Saint-Venantův princip umožňuje nahradit složitý způsob zatížení nebo okrajové či počáteční podmínky jednoduššími. To značně zjednodušuje modelování v mechanice či pevnostní analýzu. Vysvětlení leží na faktu, že koncentráty napětí či deformací jsou lokální a s rostoucí vzdáleností od svého působíště mají tyto koncentráty malý efekt na chování celého tělesa. Saint-Venantův princip lze aplikovat také pro víceosou napjatost.

25.4 Designová nerovnice a návrh součástí nebo technických celků

V běžné technické praxi je známá potřeba správně a zodpovědně navrhovat materiály, rozměry a zatížení součástí, lékařských zařízení či implantátů nebo celých technických celků apod. Takový návrh musí být dostatečně přiměřeně spolehlivý a bezpečný po celou dobu stanovené životnosti.

Kritéria návrhu mezního stavu součástí musí být vždy správně zvolena. Nejčastěji se používají **kritéria dle mezního stavu únosnosti** (obvykle zaměřené na vyhodnocování napětí) a **kritéria mezního stavu použitelnosti** (obvykle zaměřené na vyhodnocování posunutí).

V souvislosti s tahem a tlakem, které jsou tématem této kapitoly, je potřebné definovat **mezní stav únosnosti, který souvisí s pojmem dovolené napětí**¹⁶¹ σ_{Dov} /Pa/ a definovat **mezní stav použitelnosti, který souvisí s pojmem dovolené prodloužení** Δ_{Dov} /m/.

Ve většině případů návrhu součástí nelze připustit napětí větší než dovolené, pak lze použít tzv. **designové (návrhové) nerovnice dle mezního stavu únosnosti (podmínka pevnosti)**. Na řešeném úseku součásti, maximální napětí v tahu σ_{MAXTAH} /Pa/ a maximální napětí v tahu $\sigma_{MAXTLAK}$ /Pa/ musí v každém průřezu splňovat podmínky

¹⁶¹ anglicky **allowable working stress** nebo **safe working stress**.

$$\sigma_{\text{MAXTAH}} \leq \sigma_{\text{DOVTAH}}, \quad |\sigma_{\text{MAXTLAK}}| \leq \sigma_{\text{DOVTLAK}}. \quad (25.7)$$

Dovolená napětí jsou definována kladnými hodnotami. Avšak maximální tlakové napětí σ_{MAXTLAK} je záporné, a proto je v nerovnici (25.7) použita absolutní hodnota.

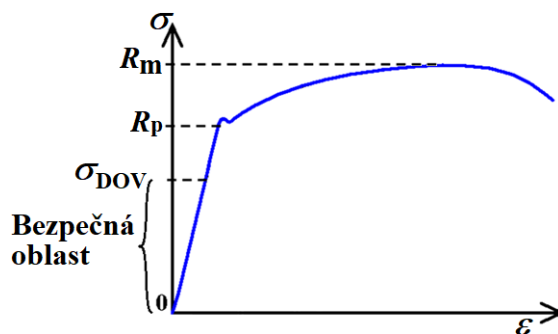
U některých součástí zase nelze připustit posunutí větší než dovolené, pak lze obdobně sestavit **designové (návrhové) nerovnice dle mezního stavu použitelnosti**. Na řešeném úseku součásti, maximální prodloužení Δ_{MAXTAH} /m/ v tahu nebo maximální zkrácení v tlaku Δ_{MAXTLAK} /m/ musí v každém průřezu splňovat podmínky

$$\Delta_{\text{MAXTAH}} \leq \Delta_{\text{DOVTAH}}, \quad |\Delta_{\text{MAXTLAK}}| \leq \Delta_{\text{DOVTLAK}}. \quad (25.8)$$

Analogicky, protože maximální zkrácení Δ_{MAXTLAK} je záporné, tak je v nerovnici (25.8) použita absolutní hodnota.

Designové nerovnice jsou také nazývány **kritérii posuzování a návrhu součástí**.

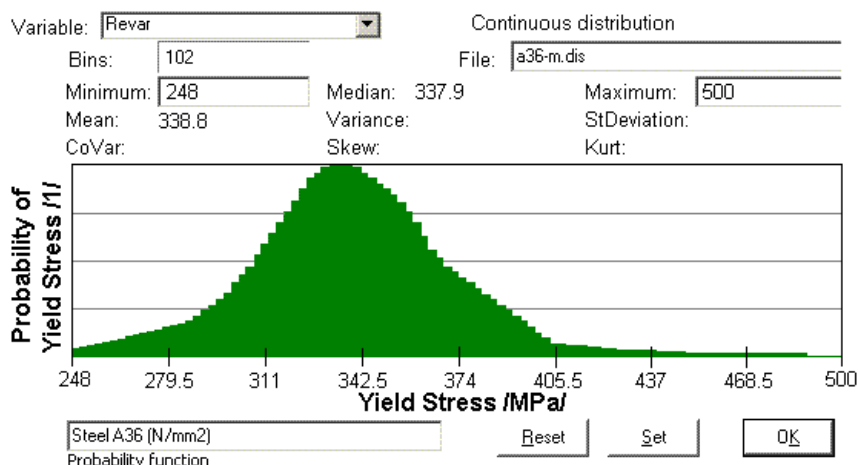
Hodnoty σ_{DOVTAH} , σ_{DOVTLAK} , Δ_{DOVTAH} a Δ_{DOVTLAK} mohou být stanoveny technickými normami či jinými předpisy či dohodami konstruktérů s uživatelem (zákazníkem). Např. σ_{DOVTAH} , σ_{DOVTLAK} jsou obvykle menší nebo rovna mezi kluzu materiálu R_p , viz Obr. 25.12. Nicméně, u hornických strojů bývá často dovolené napětí definované pomocí meze pevnosti¹⁶² R_m , jako $\frac{R_m}{7}$.



Obr. 25.12 Volba dovoleného napětí σ_{DOV} na základě vyhodnocení tahové zkoušky materiálu.

Nicméně, při optimálním návrhu konstrukce je třeba mít na zřeteli, že mez kluzu obvykle vykazuje značný rozptyl, viz např. Obr. 25.13 (histogram meze kluzu, která má rozpětí od 248 MPa do 500 MPa). Jedním z moderních přístupů současnosti je také pravděpodobnostní přístup k řešení těchto úloh (pravděpodobnostní posudek stanovení spolehlivosti nebo bezpečnosti konstrukce), viz např. [8], [9] a [13] a také Kapitola 27 a 28.

¹⁶² **Mez pevnosti** (anglicky **ultimate strength, ultimate stress strength limit**), je nejvyšší hodnota mechanického napětí, kterému dokáže materiál odolat. Často bývá odlišná pro zatěžování v tahu a tlaku.



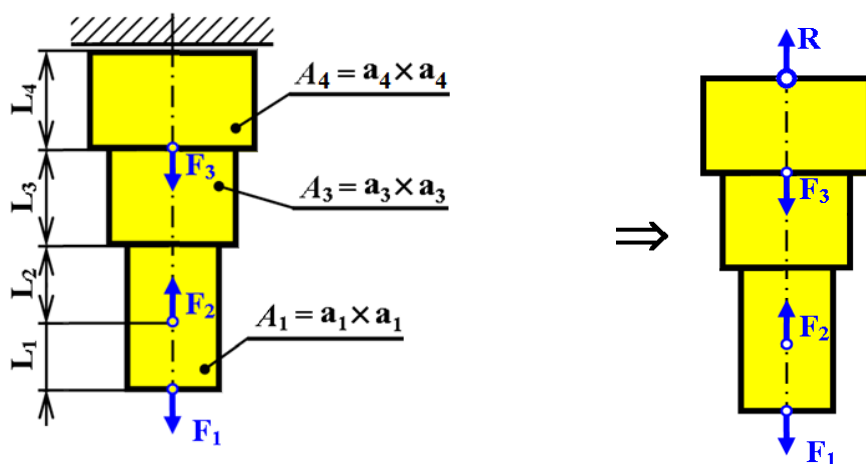
Obr. 25.13 Histogram meze kluzu oceli A36 (statistické vyhodnocení měření, programový vstup pro Anthill software).

Praktické aplikace designových nerovnic jsou vysvětleny v řešených příkladech v následujícím textu.

25.5 Příklady

Příklad 25.1: Určete reakční sílu v uchycení, průběh normálových sil, napětí a celkové prodloužení osazené tyče čtvercového průřezu z Obr. 25.14 (a). Vliv vlastní tíhy a vliv vrubových účinků na napjatost v osazení tyče neuvažujte. Stanovte také dílčí prodloužení nebo zkrácení každého úseku. Zkontrolujte také, zda tyč vyhoví podmínce pevnosti a zda se její celková délka prodlouží nebo zkrátí.

Dáno: Parametry uvedené v Tab. 25.3.



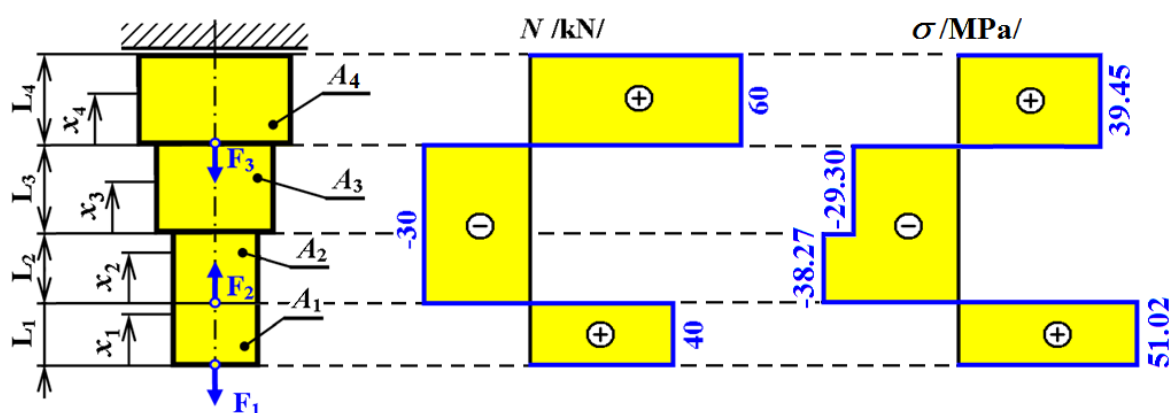
Obr. 25.14 Zadání a stanovení reakční síly a uvolnění tyče.

Tab. 25.3 Zadání Příkladu 25.1.

Rozměry /mm/	$a_1 = 28$	$a_4 = 39$	$L_2 = 100$	$L_4 = 140$
	$a_3 = 32$	$L_1 = 80$	$L_3 = 150$	
Síly /kN/	$F_1 = 40$	$F_2 = 70$	$F_3 = 90$	
Modul pružnosti /MPa/	$E = 2 \times 10^5$			
Dovolené napětí /MPa/	$\sigma_{\text{DOV}} = \sigma_{\text{DOVTAH}} = \sigma_{\text{DOVTLAK}} = 80$			

V uchycení tyče je pouze osová reakční síla R , viz Obr. 25.14 (b), pro kterou vyplývá z podmínky rovnováhy $R = F_1 - F_2 + F_3 = 40 - 70 + 90 = 60$ kN.

Definice čtyř úseků $x_i \in \langle 0; L_i \rangle$ s příslušnými plochami příčných průřezů A_i je znázorněna na Obr. 25.15 (a) a hodnoty jsou uvedené v Tab. 25.4.


 Obr. 25.15 Definice úseků $x_i \in \langle 0; L_i \rangle$ a průběh normálových sil.

Tab. 25.4 Řešení Příkladu 25.1.

	Úsek tyče x_i			
	$x_1 \in \langle 0; L_1 \rangle$	$x_2 \in \langle 0; L_2 \rangle$	$x_3 \in \langle 0; L_3 \rangle$	$x_4 \in \langle 0; L_4 \rangle$
Plocha průřezu /mm²/	$A_1 = a_1^2 = 784$	$A_2 = A_1 = 784$	$A_3 = a_3^2 = 1024$	$A_4 = a_4^2 = 1521$
Normálová síla $N_{(x_i)}$ /N/	$N_{(x_1)} = F_1 = 4 \times 10^4$	$N_{(x_2)} = F_1 - F_2 = -3 \times 10^4$	$N_{(x_3)} = N_{(x_2)} = -3 \times 10^4$	$N_{(x_4)} = F_1 - F_2 + F_3 = 6 \times 10^4$
Napětí $\sigma_{(x_i)}$ /MPa/	$\frac{N_{(x_1)}}{A_1} = 51.02$	$\frac{N_{(x_2)}}{A_2} = -38.27$	$\frac{N_{(x_3)}}{A_3} = -29.30$	$\frac{N_{(x_4)}}{A_4} = 39.45$
Prodloužení Δ_{L_i} /mm/	$\frac{\sigma_{(x_1)} L_1}{E} = 2.041 \times 10^{-2}$	$\frac{\sigma_{(x_2)} L_2}{E} = -1.913 \times 10^{-2}$	$\frac{\sigma_{(x_3)} L_3}{E} = -2.197 \times 10^{-2}$	$\frac{\sigma_{(x_4)} L_4}{E} = 2.761 \times 10^{-2}$

Pak je možno stanovit metodou virtuálního řezu normálové síly $N_{(x_i)}$, viz Tab. 25.4. Průběh normálových sil je znázorněn na Obr. 25.15 (b). Normálové síly jsou na každém úseku konstantní.

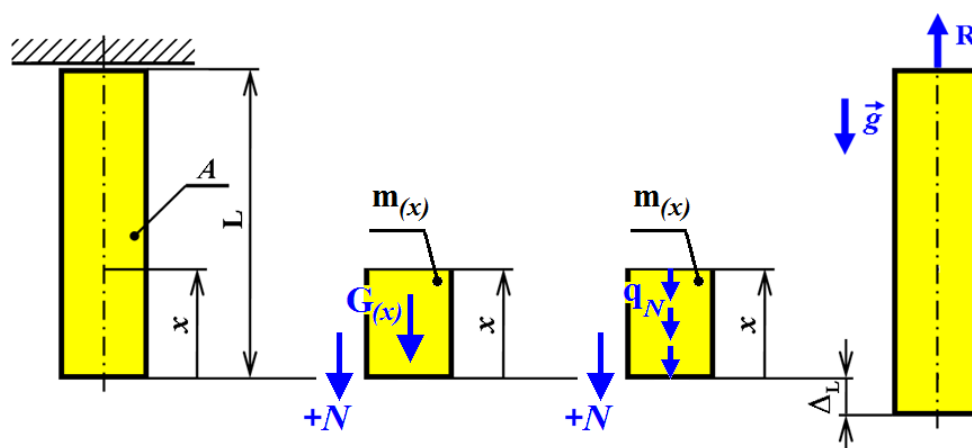
Napětí na každém úseku je dané vztahem $\sigma_{(x_i)} = \frac{N_{(x_i)}}{A_i}$, viz Tab. 25.4. Průběh napětí je znázorněn na Obr. 25.15 (c). Napětí je na každém úseku konstantní.

Podmínka pevnosti (25.7) vede k designové nerovnosti $|\sigma_{(x_i)}| \leq \sigma_{Dov}$, tj. $|\sigma_{(x_i)}| \leq 80$ MPa. Vypočtená napětí $|\sigma_{(x_i)}|$ jsou menší než dovolené napětí, a proto součást pevnostně vyhovuje.

Celkové prodloužení Δ_L tyče je dostatečně přesně dané superpozicí dílčích účinků, tj. $\Delta_L = \sum_i \Delta_{L_i}$, kde dle Tab. 25.1, platí $\Delta_{L_i} = \frac{\sigma_{(x_i)} L_i}{E}$, viz Tab. 25.4. Pak platí $\Delta_L = 6.916 \times 10^{-3}$ mm. Protože, $\Delta_L > 0$, tak se celková délka tyče prodlouží a to i přesto, že se některé úseky zkrátily.

Příklad 25.2: Jednostraně uchycená tyč konstantního příčného průřezu je vystavena působení gravitace, viz Obr. 25.16. Určete hmotnost celé tyče, reakci v uchycení, vyšetřete průběh normálových sil a napětí. Odvoďte také vztah pro výpočet posunutí (prodloužení) v obecné vzdálenosti x a celkové prodloužení tyče Δ_L . Symbolem $\vec{g}$ je značen směr působení gravitačního zrychlení.

Dáno: Délka L /m/, plocha příčného průřezu A /m²/, hustota materiálu ρ /kgm⁻³/, gravitační zrychlení g /ms⁻²/ a modul pružnosti E /Pa/.



Obr. 25.16 Tyč zatížená pouze vlastní tíhou.

Dle [1], platí pro hmotnost m celé tyče vztah $m = \rho V = \rho AL$, kde $V \text{ /m}^3$ je objem tyče.

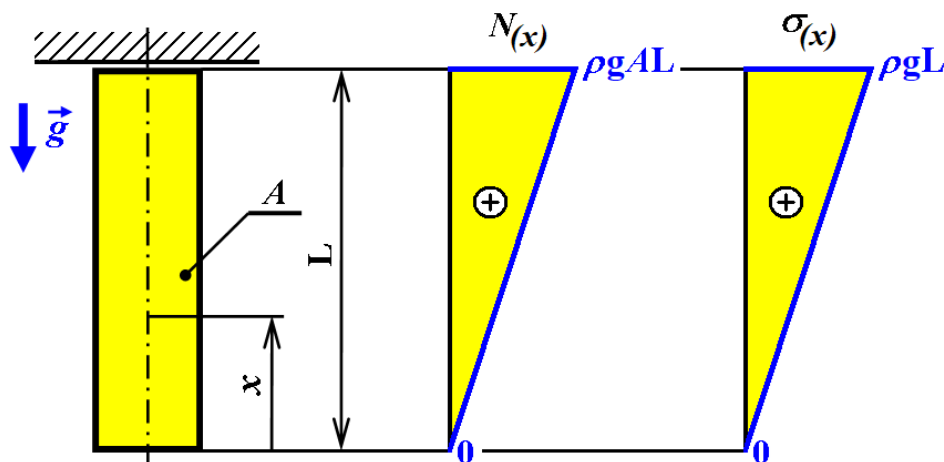
Tyč je v horní části uchycena. Reakční síla $R \text{ /N/}$ v uchycení tyče pak nutně nese celou hmotnost tyče. Potom je zřejmé, že $R = G = mg$, kde $G \text{ /N/}$ je výsledná tíhová síla.

Na Obr. 25.16 je vidět aplikace virtuálního řezu v obecné vzdálenosti $x \in \langle 0; L \rangle$ a také znaménková konvence normálových sil.

Vlastní tíhu celého úseku x lze vyjádřit pomocí tíhové síly $G_{(x)} = m_{(x)}g$, kde $m_{(x)} \text{ /kg/}$ je hmotnost úseku, viz Obr. 25.16 (b). Normálová síla je pak definovaná vztahem

$$N_{(x)} = G_{(x)} = m_{(x)}g = \rho Agx, \quad (25.9)$$

a má lineární průběh znázorněný na Obr. 25.17.



Obr. 25.17 Průběhy normálových sil a napětí při zatížení vlastní tíhou.

Protože má normálová síla kladný průběh, tak je tyč namáhána tahem. Maximální hodnota normálové síly je v uchycení (v bodu $x = L$) $N_{\text{MAX}} = N_{(x=L)} = \rho g AL$.

Alternativní způsob odvození je pomocí 3. Schwedler-Žuravského věty, viz (25.1) a Obr. 25.16 (c). Pro osové spojité zatížení $q_N \text{ /Nm}^{-1}$, pak platí $q_N = -\rho Ag$ (tj. tíhová síla vztažená na délku) a $N_{(x)} = -\int q_N dx = \rho Ag \int dx = \rho Ag(x + C)$, kde $C \text{ /m/}$ je integrační konstanta.

Z okrajové podmínky $N_{(x=0)} = 0$, vyplývá $C = 0$. Normálová síla je pak daná vztahem (25.9).

Tahové napětí je dané vztahem

$$\sigma_{(x)} = \frac{N_{(x)}}{A} = \rho g x, \quad (25.10)$$

má lineární průběh, viz Obr. 25.17, a jeho maximální hodnota je také v uchycení (bod $x = L$)

$$\sigma_{\text{MAX}} = \sigma_{(x=L)} = \rho g L. \quad (25.11)$$

Pro výpočet posunutí $u_{(x)}$, v obecné vzdálenosti x se vychází z Tab. 25.2 a rovnice (25.10), kde platí

$$\frac{du_{(x)}}{dx} = \frac{\sigma_{(x)}}{E} = \frac{\rho g x}{E}, \text{ resp. } \int du_{(x)} = \frac{\rho g}{E} \int x dx. \quad (25.12)$$

Řešením se získá obecné řešení $u_{(x)} = \frac{\rho g}{E} \left(\frac{x^2}{2} + D \right)$, kde D /m/ je integrační konstanta, která se musí určit z okrajové podmínky.

V uchycení, tj. v bodu $x = L$, se tyč nepohne a platí $u_{(x=L)} = 0$, tj. $\frac{\rho g}{E} \left(\frac{L^2}{2} + D \right) = 0$. Odtud vyplývá $D = -\frac{L^2}{2}$. Potom, po úpravě platí kvadratická rovnice

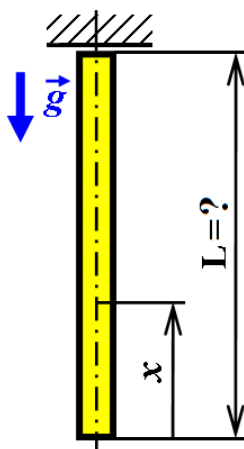
$$u_{(x)} = \frac{\rho g}{2E} (x^2 - L^2). \quad (25.13)$$

Kladné posunutí je v tomto případě ve směru orientované kóty x , viz Obr. 25.16, z tohoto důvodu dává rovnice (25.13) hodnoty ≤ 0 . Tyč je tedy vystavena tahu.

Celkové prodloužení tyče je $\Delta_L = |u_{(x=0)}| = \frac{\rho g L^2}{2E}$, viz Obr. 25.17.

Příklad 25.3: Navrhněte maximální délku L visícího drátu, který je zatížen pouze vlastní tíhou. Při řešení využijte výsledků z Příkladu 25.2.

Dáno: Hustota materiálu $\rho = 7848 \text{ kg m}^{-3}$, gravitační zrychlení $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$ a dovolené napětí $\sigma_{\text{DOV}} = 50 \text{ MPa}$.



Obr. 25.18 Tyč zatížená pouze vlastní tíhou.

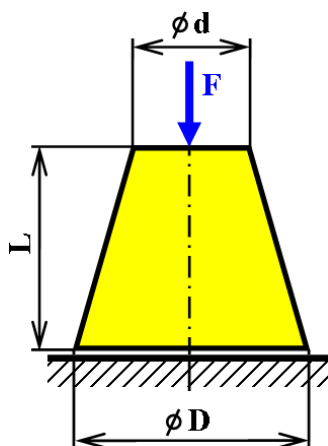
Z výsledků Příkladu 25.2, viz odvozený vztah pro maximální napětí (25.11), vyplývá $\sigma_{\text{MAX}} = \rho g L$.

Délku drátu L je nutné navrhnout z podmínky pevnosti (designové nerovnice), viz (25.7), tj. $\sigma_{\text{MAX}} \leq \sigma_{\text{DOV}}$. Po dosazení a vyjádření se získá

$$L \leq \frac{\sigma_{\text{DOV}}}{\rho g} = \frac{50 \times 10^6}{7848 \times 9.807} = 649.643 \text{ m.}$$

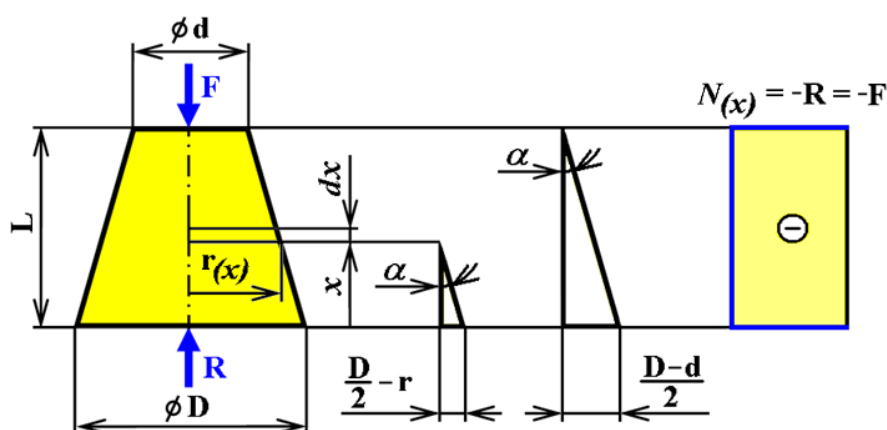
Příklad 25.4: Odvoďte vztahy pro reakci v uložení, normálovou sílu, napětí a celkové prodloužení proměnlivého součásti kruhového průřezu (komolý kužel), viz Obr. 25.19. vliv vlastní tíhy neuvažujte.

Dáno: Síla F /N/, průměry D /m/, d /m/, délka L /m/ a modul pružnosti E /Pa/.



Obr. 25.19 Komolý kužel zatížený silou F .

Z Obr. 25.20 je možno stanovit reakci v uchycení $R = F$, definovat úsek $x \in \langle 0; L \rangle$ a odvodit vztah pro normálovou sílu $N(x) = -R = -F$. Součást je tedy namáhána tlakem.



Obr. 25.20 Uvolnění, odvození změny poloměru r a průběh normálové síly.

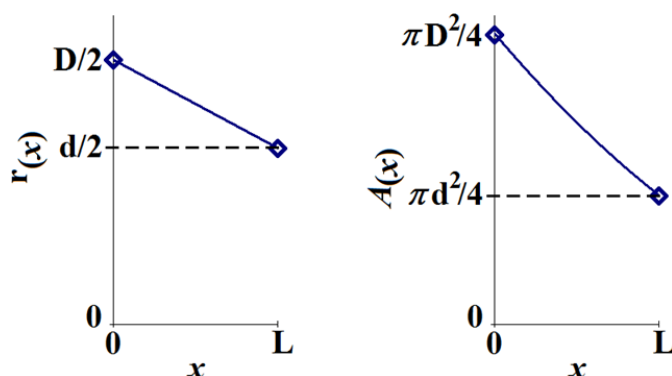
Příčná plocha příčného průřezu $A(x)$ je proměnlivá. Pro její odvození je nejprve vhodné odvodit lineární závislost poloměru $r(x)$ /m/ z geometrie trojúhelníků znázorněných na Obr. 25.20, tj. z podobnosti trojúhelníků, vyplývá

$$\tan \alpha = \frac{\frac{D}{2} - r(x)}{x} = \frac{\frac{D-d}{2}}{L}, \quad \text{tj.} \quad r(x) = \frac{D}{2} - \frac{D-d}{2L} x. \quad (25.14)$$

Potom pro kruhovou plochu příčného průřezu ve vzdálenosti x platí

$$A(x) = \pi r(x)^2 = \pi \left(\frac{D}{2} - \frac{D-d}{2L} x \right)^2 = \frac{\pi}{4} \left(D - \frac{D-d}{L} x \right)^2. \quad (25.15)$$

Průběhy odvozených závislostí (25.14) a (25.15) je vidět na Obr. 25.21

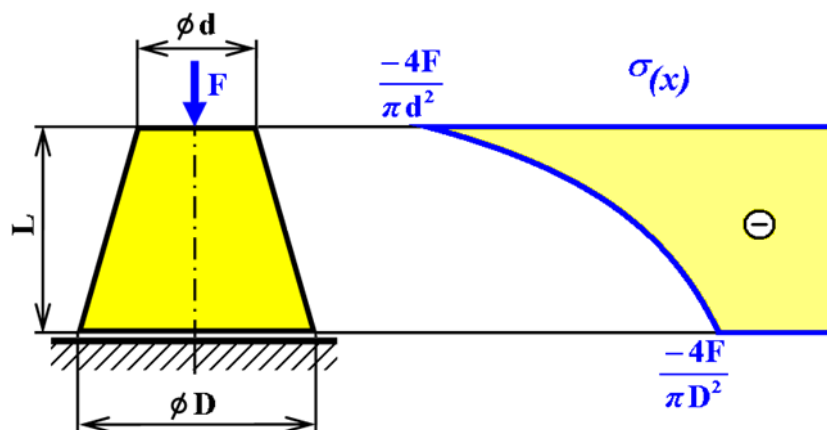


Obr 25.21 Lineární závislost poloměru $r(x)$ a kvadratická závislost plochy příčného průřezu $A(x)$.

Tlakové napětí $\sigma(x)$ je pak dáno závislostí dle hyperboly 2. stupně, tj.

$$\sigma(x) = \frac{N(x)}{A(x)} = \frac{-F}{\frac{\pi}{4} \left(D - \frac{D-d}{L} x \right)^2} = \frac{-4F}{\pi \left(D - \frac{D-d}{L} x \right)^2}. \quad (25.16)$$

Hodnoty napětí v bodech $x = 0$, $x = \frac{L}{2}$ a $x = L$, jsou pak dané vztahy $\sigma_{(x=0)} = \frac{-4F}{\pi D^2}$, $\sigma_{(x=L/2)} = \frac{-4F}{\pi \left(\frac{D+d}{2} \right)^2}$, $\sigma_{(x=L)} = \frac{-4F}{\pi d^2}$, viz Obr. 25.22.



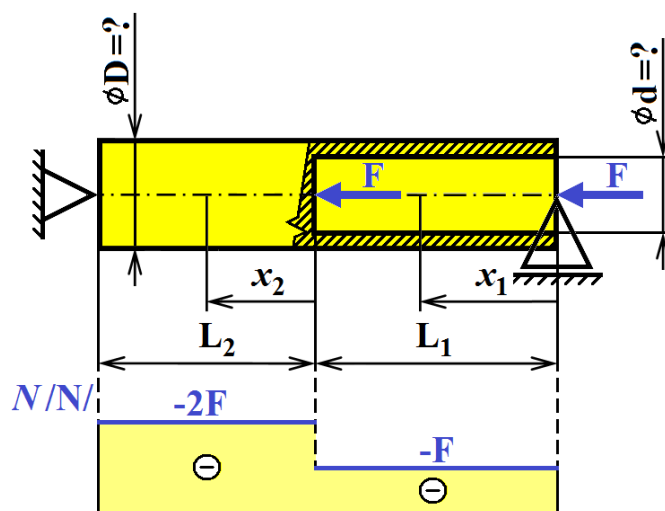
Obr. 25.22 Průběh napětí.

Celkové zkrácení součásti Δ_L lze stanovit dle Tab. 25.2, tj. $\int_0^{\Delta_L} du = \int_0^L \frac{\sigma(x)}{E} dx$,

$$\Delta_L = \frac{-4F}{E\pi} \int_0^L \frac{dx}{\left(D - \frac{D-d}{L}x\right)^2} = \frac{-4FL^2}{E\pi(D-d)} \left[\frac{1}{LD + (d-D)x} \right]_0^L = \frac{-4FL}{E\pi(D-d)} \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{D} \right) = \frac{-4FL}{E\pi Dd}.$$

Příklad 25.5: Navrhněte průměry součásti, Obr. 25.23. Vliv vlastní tíhy neuvažujte. Navržené průměry zaokrouhlete na celé mm.

Dáno: Síla $F = 100$ kN, délky $L_1 = 0.5$ m, $L_2 = 0.45$ m a dovolené napětí $\sigma_{DOV} = 100$ MPa.



Obr. 25.23 Součást namáhaná tlakem.

V Obr. 23.25 jsou uvedené definice úseků $x_1 \in \langle 0; L_1 \rangle$ a $x_2 \in \langle 0; L_2 \rangle$.

Aplikací metody virtuálního řezu, pro normálové síly pak platí $N_{(x_1)} = -F$, a $N_{(x_2)} = -2F$, viz Obr. 25.23.

Při navrhování průměrů se vychází z designové nerovnice (25.7), tj. $\sigma_{MAX} \leq \sigma_{DOV}$.

Pro průměr D pak platí nerovnice $\frac{|N_{(x_2)}|}{A_2} = \frac{2F}{\frac{\pi D^2}{4}} = \frac{8F}{\pi D^2} \leq \sigma_{DOV}$, odkud vyplývá

$$D \geq \sqrt{\frac{8F}{\pi \sigma_{DOV}}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^5}{\pi \times 100}} = \sqrt{\frac{8 \times 10^3}{\pi}} = 50.46 \text{ mm.}$$

Vzhledem k tomu, že průměry mají být zaokrouhleny na celé mm, tak pro splnění nerovnosti je zvolen průměr $D = 51$ mm.

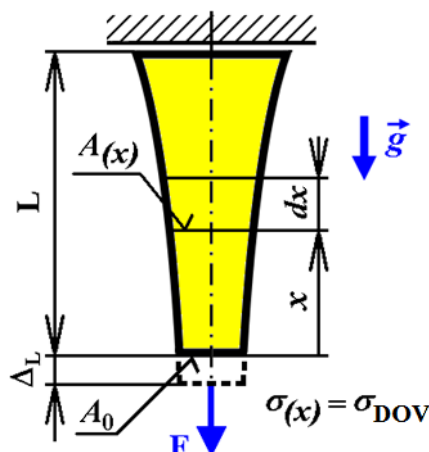
Průměr D je nyní známý a podobně pro průměr d pak platí nerovnice $\frac{|N_{(x_1)}|}{A_1} = \frac{F}{\frac{\pi(D^2 - d^2)}{4}} = \frac{4F}{\pi(D^2 - d^2)} \leq \sigma_{DOV}$, tj. $D^2 - d^2 \geq \frac{4F}{\pi \sigma_{DOV}}$. Dalšími úpravami se získá

$$d^2 \leq D^2 - \frac{4F}{\pi \sigma_{DOV}} \text{ a odtud vyplývá } d \leq \sqrt{D^2 - \frac{4F}{\pi \sigma_{DOV}}} = \sqrt{51^2 - \frac{4 \times 10^5}{\pi \times 100}} = 7.38 \text{ mm.}$$

Protože vypočtený průměr má být zaokrouhlen na celé mm, tak pro splnění nerovnosti je zvolen průměr $d = 7$ mm.

Příklad 25.6: Tyč délky L a neznámého proměnlivého průřezu je zatížena vlastní tíhou a silou F , viz Obr. 25.24. Stanovte průběh závislosti plochy $A(x)$ tak, aby napětí bylo v každém průřezu stejné a rovnalo se dovolenému napětí, tj. $\sigma(x) = \sigma_{DOV}$. Pro navrženou tyč odvoďte také vztah pro celkové prodloužení Δ_L a normálovou sílu.

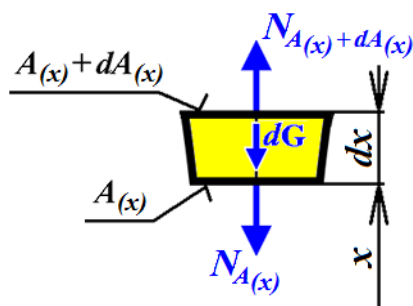
Dáno: Síla F /N/, délka L /m/, modul pružnosti E /Pa/, dovolené napětí σ_{DOV} /Pa/, hustota materiálu ρ /kg m⁻³/ a gravitační zrychlení g /m s⁻²/.



Obr. 25.24 Tyč neznámého proměnlivého průřezu zatížená silou F a vlastní tíhou.

Ze zadání je zřejmé, že se jedná o **tvarovou optimalizaci**¹⁶³, tj. nalezení optimálního tvaru pro definované zatížení, které je spojené s žádanou úsporou hmotnosti a objemu materiálu (nalezení minima).

Aplikací Eulerovy metody virtuálního řezu ve dvou souměrných řezech, které mají mezi sebou vzdálenost dx , viz Obr. 25.25, je možno stanovit rovnici rovnováhy v axiálním směru $N_{A(x)} + dG - N_{A(x)+dA(x)} = 0$.



Obr. 25.25 Aplikace metody Eulerova virtuálního řezu.

¹⁶³ anglicky **shape optimisation**. Úloha nalezení optimálního tvaru součástí, tak aby co nejlépe vyhovovala danému kritériu.

Normálové síly musí po celém úseku $x \in \langle 0; L \rangle$ splňovat podmínku konstantního napětí, tj. $\sigma_{(x)} = \sigma_{\text{DOV}}$. Normálové síly $N_{A(x)}$ a $N_{A(x)+dA(x)}$ musí být tedy vyjádřeny pomocí napětí. Potom platí $\sigma_{\text{DOV}}A(x) + dm_{(x)}g - \sigma_{\text{DOV}}(A(x) + dA(x)) = 0$, kde elementární hmotnost $dm_{(x)} = \rho A_{(x)} dx$.

Po úpravách se získá $\rho A_{(x)} g dx - \sigma_{\text{DOV}} dA_{(x)} = 0$, tj. lineární diferenciální rovnice

$$\frac{dA(x)}{dx} = \frac{\rho g}{\sigma_{\text{DOV}}} A_{(x)}, \text{ resp. } \frac{dA(x)}{dx} = \Lambda A_{(x)}, \text{ kde konstanta } \Lambda = \frac{\rho g}{\sigma_{\text{DOV}}}. \quad (25.17)$$

Řešením diferenciální rovnice (25.17) se získá $\int_{A_0}^{A(x)} \frac{dA(x)}{A(x)} = \Lambda \int_0^x dx$. Integrováním se získá $\ln A_{(x)} - \ln A_0 = \Lambda x$, resp. $\ln \frac{A_{(x)}}{A_0} = \Lambda x$, odkud se získá

$$A_{(x)} = A_0 e^{\Lambda x}, \quad (25.18)$$

kde A_0 / m^2 je integrační konstanta mající význam plochy příčného průřezu na volném konci (tj. plocha ve vzdálenosti $x = 0$).

Z okrajové podmínky $\sigma_{(x=0)} = \frac{N_{(x=0)}}{A_0} = \frac{F}{A_0} = \sigma_{\text{DOV}}$ vyplývá

$$A_0 = \frac{F}{\sigma_{\text{DOV}}}. \quad (25.19)$$

Nalezená plocha příčného průřezu má tedy tvar exponenciální křivky

$$A_{(x)} = A_0 e^{\Lambda x} = \frac{F}{\sigma_{\text{DOV}}} e^{\frac{\rho g}{\sigma_{\text{DOV}}} x}, \quad (25.20)$$

viz Obr. 25.24.

Dle Tab. 25.2, lze stanovit celkové prodloužení z integrační rovnice

$$\Delta_L = \int_0^L \frac{\sigma_{\text{DOV}}}{E} dx = \frac{\sigma_{\text{DOV}} L}{E}. \quad (25.21)$$

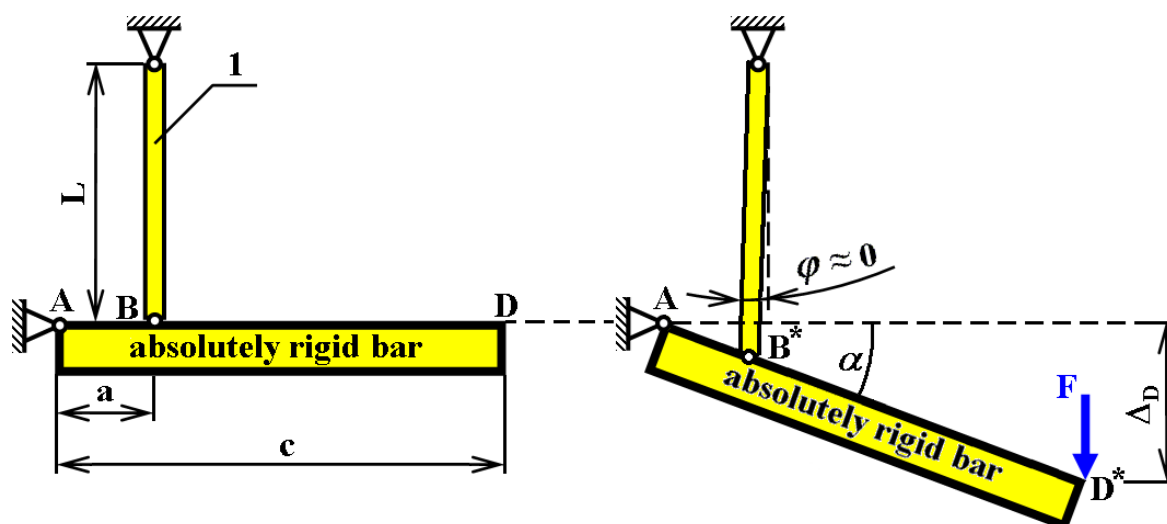
Na závěr je třeba dopočítat normálovou sílu, pro kterou platí

$$N_{(x)} = A_{(x)} \sigma_{(x)} = \frac{F}{\sigma_{\text{DOV}}} e^{\frac{\rho g}{\sigma_{\text{DOV}}} x} \sigma_{\text{DOV}} = F e^{\frac{\rho g}{\sigma_{\text{DOV}}} x}, \quad (25.22)$$

která má také tvar exponenciální křivky.

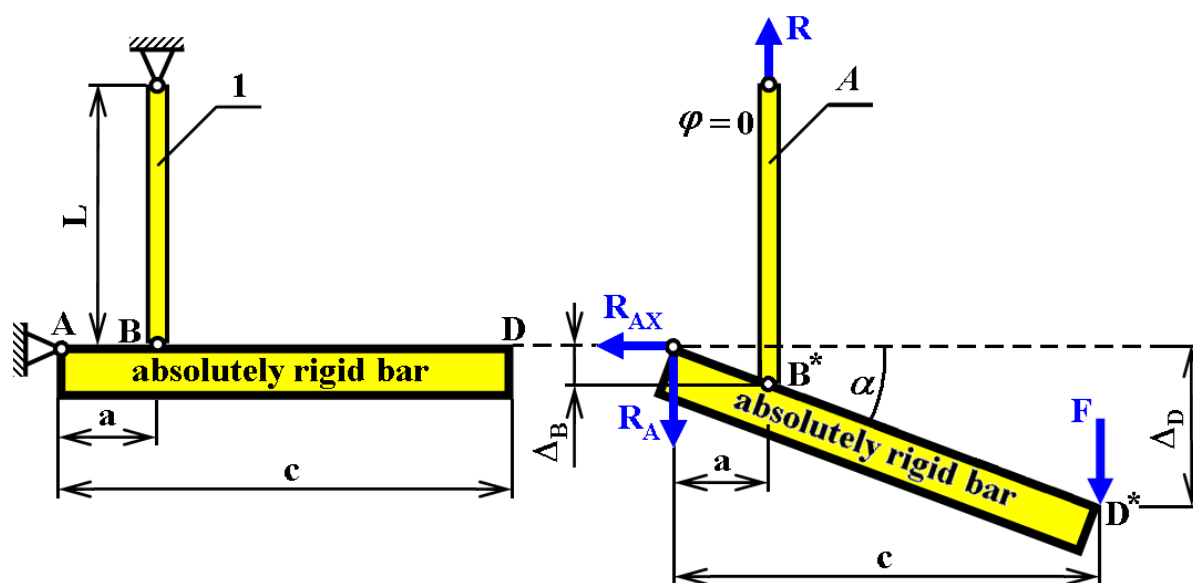
Příklad 25.7: Absolutně tuhý člen „AD“ (absolutely rigid bar), viz Obr. 25.26 (a), je uchycen v kloubu „A“ a zavěšen na prutu (tyči) „1“ v místě „B“. Vertikální síla F působí v bodu „D“, viz Obr. 25.26 (b). Určete reakce, normálovou sílu a napětí v prutu „1“. Vypočítejte také prodloužení prutu „1“. Použijte teorii malých deformací. Vliv vlastní tíhy neuvažujte.

Dáno: Síla $F = 40 \text{ kN}$, modul pružnosti $E = E_1 = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$, kóty $a = 1.2 \text{ m}$, $c = 2 \text{ m}$, $L = L_1 = 1 \text{ m}$, $A = A_1 = 400 \text{ mm}^2$.



Obr. 25.26 Řešená soustava, (a) nezatížený stav, (b) stav po zatížení (ve zvětšeném měřítku).

Za předpokladu platnosti teorie malých deformací (tj. úhel α je malý), lze úhel natočení φ považovat za nulový. Nabízí se pak přijatelné a elegantní zjednodušení znázorněné na Obr. 25.27.



Obr. 25.27 Řešená soustava, teorie malých deformací a z ní vyplývající přijatelná zjednodušení, (a) nezatížený stav, (b) stav po zatížení (ve zvětšeném měřítku).

Ze statických rovnic rovnováhy $\sum F_{Xi} = 0$, $\sum M_{Ai} = 0$ a $\sum M_{Bi} = 0$, vyplývají vztahy

$$R_{AX} = 0 \text{ N}, \quad R = \frac{Fc}{a} = 66666.7 \text{ N}, \quad R_A = \frac{F(c-a)}{a} = 26666.7 \text{ N}. \quad (25.23)$$

Kontrolu odvozených reakcí (25.23) je možno provést ze statické rovnice rovnováhy $\sum F_{Yi} = 0$, tj. $R - R_A - F = 0$, což je splněno.

Pro normálovou sílu v prutu „1“, potom platí $N_1 = R = 66666.7 \text{ N}$.

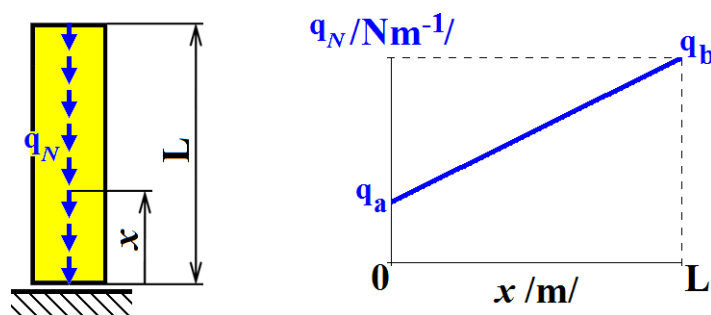
Pro napětí v prutu „1“ pak platí $\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = 166.67 \text{ MPa}$.

Prodloužení prutu „1“, viz Obr. 25.27(b), je definováno vztahem $\Delta_B = \frac{\sigma_1 L}{E} = 0.833 \text{ mm}$.

Pro úhel natočení α platí z pravoúhlého trojúhelníka $\alpha = \arctan\left(\frac{\Delta_B}{a}\right) = 0.0398^\circ$ a následně pro posunutí $\Delta_D = c \tan \alpha = 1.389 \text{ mm}$.

Příklad 25.8: Odvoďte průběh normálových sil pro tyč zatíženou proměnlivým osovým spojitým zatížením q_N , viz Obr. 25.28, které je dané lineární funkcí $q_N = q_a + \frac{q_b - q_a}{L} x$ (lichoběžníkové zatížení). Určete také velikost a polohu výslednice síly od spojitého osového zatížení q_N .

Dáno: Spojité zatížení q_a /Nm²/, q_b /Nm²/ a délka L /m/.



Obr. 25.28 Tyč zatížená proměnlivým osovým spojitým zatížením $q_N = q_a + \frac{q_b - q_a}{L} x$.

Dle Tab. 25.2, průběh normálových sil lze stanovit ze vztahu $\frac{dN(x)}{dx} = q_N$, kde $x \in \langle 0; L \rangle$. Řešením se získá $\int dN(x) = \int \left(q_a + \frac{q_b - q_a}{L} x \right) dx$, tj.

$$N(x) = q_a x + \frac{q_b - q_a}{2L} x^2 + C, \quad (25.24)$$

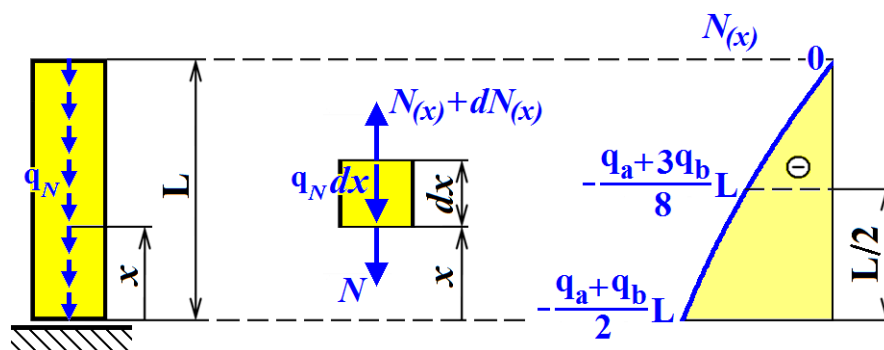
kde C /N/ je integrační konstanta.

Konstantu C je nutno stanovit z okrajové podmínky volného konce, tj. $N_{(x=L)} = q_a L + \frac{q_b - q_a}{2L} L^2 + C = 0$, odkud vyplývá $C = -\frac{q_a + q_b}{2} L$.

Pro normálovou sílu pak platí parabolická závislost

$$N(x) = \frac{q_b - q_a}{2L} x^2 + q_a x - \frac{q_a + q_b}{2} L, \quad (25.25)$$

která je vykreslena na Obr. 25.29 (c).



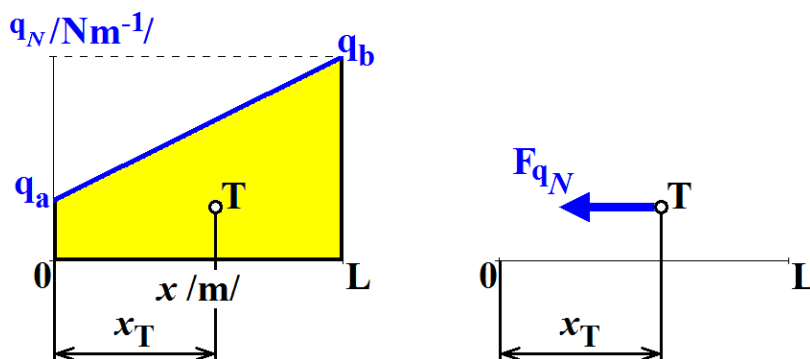
Obr. 25.29 (a) zadání, (b) alternativní způsob odvození normálových sil, (c) průběh normálových sil.

Průběh normálových sil může být také odvozen z Obr. 25.29 (c), kde z rovnováhy na soumezném řezu délky dx , tj. z dvojnásobné aplikace metody Eulerova virtuálního řezu, tj. $N_{(x)} + q_N dx - (N_{(x)} + dN_{(x)}) = 0$, vyplývá rovnice $dN_{(x)} = q_N dx$, tj. $N_{(x)} = \int q_N dx$, což vede na rovnici (25.24) a řešení (25.25).

Velikost výslednice síly F_{q_N} /N/ (exvivalentní síla od účinku spojitého osového zatížení q_N), viz Obr. 25.30, se získá integrací

$$F_{q_N} = \int_0^L q_N dx = \left[q_a x + \frac{q_b - q_a}{2L} x^2 \right]_0^L = \frac{q_b + q_a}{2} L, \quad (25.26)$$

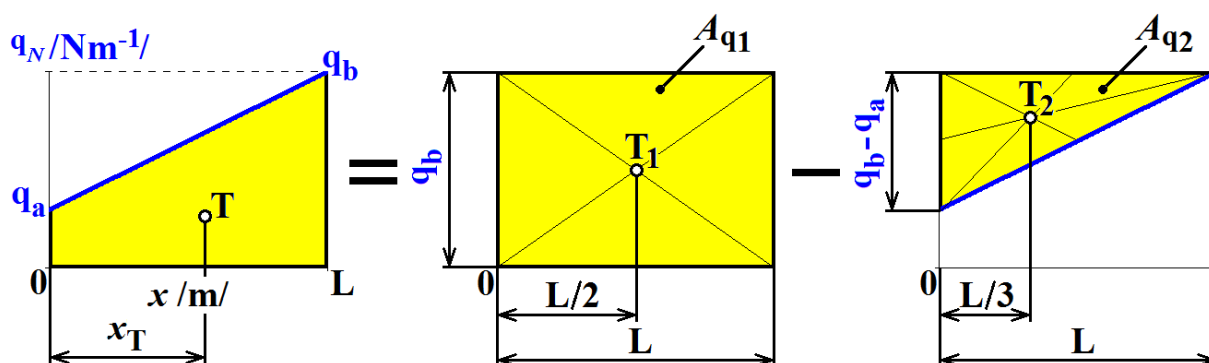
což je záporná hodnota konstanty C v rovnici (25.24).



Obr. 25.30 Statická ekvivalence mezi spojitým zatížením $q_N = q_a + \frac{q_b - q_a}{L} x$ a silou v těžišti $F_{q_N} = \frac{q_b + q_a}{2} L$.

Síla F_{q_N} musí působit v těžišti¹⁶⁴ T spojitého zatížení, viz Obr. 25.30 a 25.31.

¹⁶⁴ Pojem těžiště je dostatečně vysvětlen v prvním dílu této knihy, viz [1].



Obr. 25.31 Výpočet polohy výsledného těžiště osového spojitého zatížení lichoběžníkového tvaru daného rovnicí $q_N = q_a + \frac{q_b - q_a}{L} x$, kde lichoběžník = obdélník – trojúhelník.

$$\text{Souřadnice těžiště } x_T / \text{m/ je dána vztahem } x_T = \frac{A_{q1} \frac{L}{2} - A_{q2} \frac{L}{3}}{A_{q1} - A_{q2}} = \frac{q_b L \frac{L}{2} - (q_b - q_a) \frac{L}{2} \frac{L}{3}}{q_b L - (q_b - q_a) \frac{L}{2}},$$

kde A_{q1} , A_{q2} /N/ jsou úměrné plochám spojitého zatížení. Po úpravách se získá

$$x_T = \frac{(2q_b + q_a)L}{3(q_b + q_a)}. \quad (25.27)$$

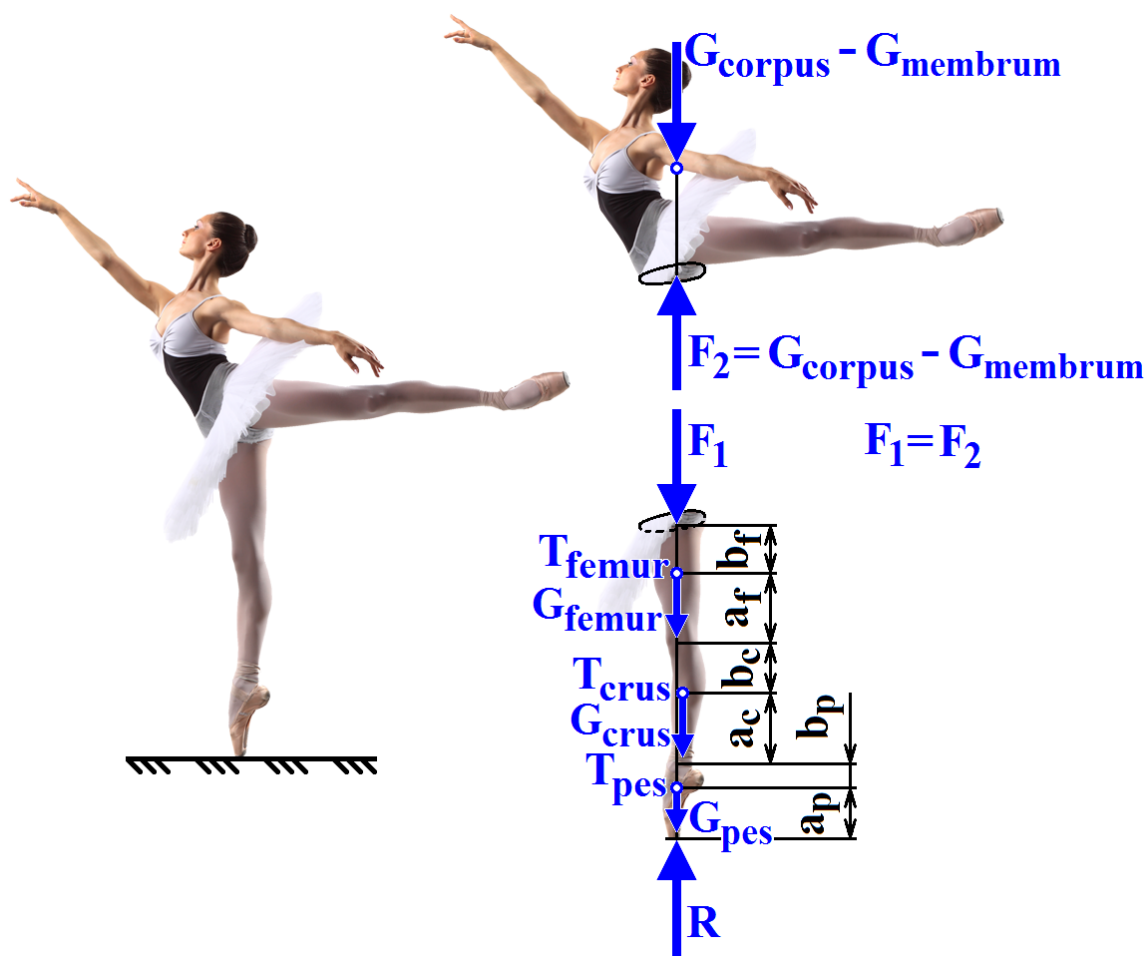
Výsledky tohoto příkladu jsou využity také v řešení Příkladu 25.9.

Příklad 25.9: Baletka při statické atitudě na špičkách (en pointe), viz Obr. 25.32 (a). Z Příkladu 23.8 a antropometrie baletky, jsou známé rozměry, polohy těžišť, tíhových sil a částí končetiny (segmentů) stojné nohy baletky a tíhové síly, viz Obr. 25.32 (b) a Tab. 25.5. Nahraďte bodové tíhové síly v každém segmentu stojné nohy ekvivalentním obecně obdélníkovým zatížením. Úlohu považujte za statickou.

Dáno: gravitační zrychlení $g = 9.807 \text{ ms}^{-2}$ a síly a rozměry uvedené v Tab. 25.5 (výsledky z Příkladu 23.8).

Tab. 25.5 Tíhové síly působící ve stojné končetině při atitudě a geometrie polohy těžiště, výsledky Příkladu 23.8.

Segment i	Tíhová síla G_i /N/	Kóty /m/	
		Distální a_i	Proximální b_i
Stehno (femur)	$G_{\text{femur}} = G_f = 63.34$	$a_f = 0.2334$	$b_f = 0.1782$
Bérec (crus)	$G_{\text{crus}} = G_c = 23.11$	$a_c = 0.2343$	$b_c = 0.179$
Noha (pes)	$G_{\text{pes}} = G_p = 6.63$	$a_p = 0.1485$	$b_p = 0.1115$
Celá dolní končetina (membrum inferius)	$G_{\text{membrum}} = \sum_i G_i = 93.08$	$\sum_i (a_i + b_i) = 1.0849$	
Další vypočtené síly /N/			
$R = G_{\text{corpus}} = 480.54$, $F_1 = F_2 = G_{\text{corpus}} - G_{\text{membrum}} = 387.46$			



Obr. 25.32 Baletka při atitudě (a) zadání, (b) aplikace Eulerovy metody virtuálního řezu, geometrie a zatížení; původní fotografie převzata z volně dostupného díla od autorky Justyna Brozdowska, viz [15] https://www.pngitem.com/middle/bihhRJ_png-images-free-download-ballet-dancer-png-transparent/, a následně autorem této kapitoly upravena a doplněna.

V Příkladu 23.8 je předvedeno, jak jednoduchým způsobem stanovit normálové síly ve stojné končetině baletky při atitudě, kde segmenty končetiny (lat. membrum), tj. stehno (lat. femur), bérce (lat. crus) a noha (lat. pes), byly nahrazeny příslušnými tíhovými silami v těžištích segmentů.

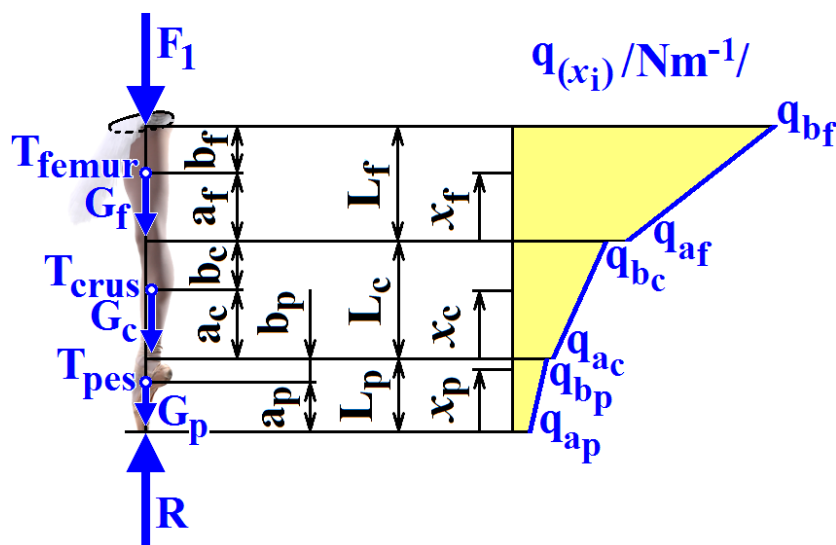
Nicméně, tato úloha je zaměřena na zpřesnění výpočtu normálových sil v těle člověka. Při řešení se vychází z myšlenky nahrazení bodových tíhových sil $G_{segment}$ působících v těžištích (kóty a_i , b_i) pomocí spojitých obecně lichoběžníkových¹⁶⁵ zatížení. Tato myšlenka je opodstatněná, protože lidské tělo má spojitě rozloženou hmotu, kterou nejlépe charakterizuje právě spojitě zatížení.

Z Obr. 25.32 a Tab. 25.5 jsou známé délky, polohy těžišť a tíhové síly v jednotlivých segmentech. Jestliže se předpokládá, že každý segment lze nahradit ekvivalentním obecně lichoběžníkovým spojitým zatížením $q(x_i) = q_{a_i} + \frac{q_{b_i} - q_{a_i}}{L_i} x_i$, pak je možno, dle Obr. 25.33 a výsledků z předchozího Příkladu 25.8, viz rovnice (25.26) a (25.27), sestavit záměnou proměnných následující vztahy

¹⁶⁵ **Lichoběžník (trapezoid)** v sobě ukrývá také trojúhelník (pokud délka 1 strany lichoběžníku je nulová) nebo obdélník (pokud vždy dvě strany protilehlé strany mají stejnou délku a pokud svírají pravý úhel).

$$G_i = \frac{q_{ai} + q_{bi}}{2} L_i, \quad a_i = \frac{(q_{ai} + 2q_{bi})L_i}{3(q_{ai} + q_{bi})}, \quad (25.28)$$

kde $L_i = a_i + b_i$, je délka segmentu končetiny dle výsledků Tab. 25.5, tj. index $i = f, c, p$.



Obr. 25.33 Průběhy spojitého zatížení od vlastní tíhy ve stojné noze při atitudě (index $i = f, c, p$).

Protože z antropometrie baletky jsou známy hodnoty G_i , a_i a L_i , je možno z rovnic (25.28) vypočítat velikosti parametrů spojitého zatížení q_{ai} a q_{bi} . Rovnice (25.28) lze upravit na tvar

$$q_{ai} + q_{bi} = \frac{2G_i}{L_i}, \quad q_{ai} + \frac{3a_i - 2L_i}{3a_i - L_i} q_{bi} = 0,$$

jejichž řešením se získá

$$q_{ai} = \frac{G_i(4L_i - 6a_i)}{L_i^2}, \quad q_{bi} = \frac{G_i(6a_i - 2L_i)}{L_i^2}, \quad (25.29)$$

viz Tab. 25.6.

Tab. 25.6 Definice úseků a vypočtené spojitě zatížení (index $i = f, c, p$).

Segment i	Úsek /m/	Délka úseku (segmentu) L_i /m/	Lichoběžníkové spojitě zatížení $q_{(x_i)}$ /N m ⁻¹ /		
			q_{ai}	q_{bi}	Rovnice
Stehno (femur), $i = s$	$x_i \in \langle 0; L_i \rangle$	0.4116	91.9734	215.8011	$q_{ai} + \frac{q_{bi} - q_{ai}}{L_i} x_i$, viz Obr. 25.33.
Bérec (crus), $i = c$		0.4133	33.471	78.3606	
Noha (pes) $i = p$		0.26	14.6135	36.3865	

Obdobně jako v Příkladu 25.8, průběh normálových sil lze stanovit ze vztahu $\frac{dN_{(x_i)}}{dx_i} = q_{(x_i)}$, kde $x \in \langle 0; L_i \rangle$.

Řešením se získá $\int dN_{(x_i)} = \int \left(q_a + \frac{q_b - q_a}{L_i} x_i \right) dx_i$, tj. obecné řešení je dané kvadratickými rovnicemi

$$N_{(x_i)} = q_{a_i} x_i + \frac{q_{b_i} - q_{a_i}}{2L_i} x_i^2 + C_i, \quad (25.30)$$

kde $C_i / N/$ jsou integrační konstanty. Konstanty C_i je nutno stanovit z okrajových podmínek.

Na spodním úseku nohy, tj. $x_p \in \langle 0; L_p \rangle$, musí být splněna okrajová podmínka $N_{(x_p=0)} = -R = -G_{\text{corpus}}$, tj. $C_p = -R$.

Podobně, na středním úseku bérce, tj. $x_c \in \langle 0; L_c \rangle$, musí být splněna spojitost průběhu normálových sil $N_{(x_c=0)} = N_{(x_p=L_p)}$, tj. $C_c = q_{a_p} L_p + \frac{q_{b_p} - q_{a_p}}{2L_p} L_p^2 + C_p$.

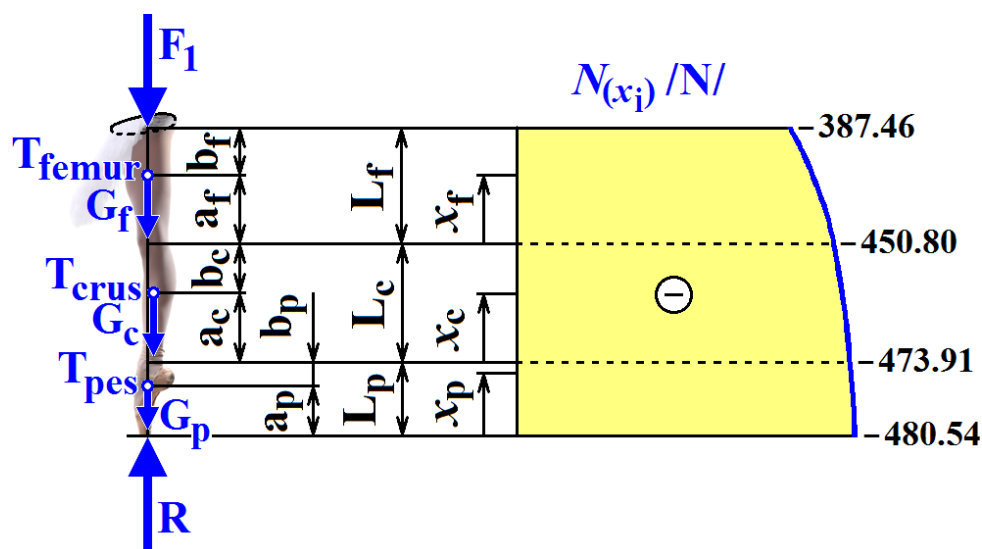
Podobně, na horním úseku stehna, tj. $x_f \in \langle 0; L_f \rangle$, musí být splněna spojitost průběhu normálových sil $N_{(x_f=0)} = N_{(x_c=L_c)}$, tj. $C_f = q_{a_c} L_c + \frac{q_{b_c} - q_{a_c}}{2L_c} L_c^2 + C_c$, viz Tab. 25.7.

Tab. 25.7 Definice úseků a vypočtené spojitě zatížení (index $i = f, c, p$).

Segment i	Úsek /m/	Integrační konstanta $C_i /N/$	Rovnice normálových sil $N_{(x_i)} /N/$
Stehno (femur), $i = f$	$x_i \in \langle 0; L_i \rangle$	$C_f = q_{a_c} L_c + \frac{q_{b_c} - q_{a_c}}{2L_c} L_c^2 + C_c = -450.8$	$q_{a_f} x_f + \frac{q_{b_f} - q_{a_f}}{2L_f} x_f^2 + C_f$
Bérec (crus), $i = c$		$C_c = q_{a_p} L_p + \frac{q_{b_p} - q_{a_p}}{2L_p} L_p^2 + C_p = -473.91$	$q_{a_c} x_c + \frac{q_{b_c} - q_{a_c}}{2L_c} x_c^2 + C_c$
Noha (pes) $i = p$		$C_p = -R = -480.54$	$q_{a_p} x_p + \frac{q_{b_p} - q_{a_p}}{2L_p} x_p^2 + C_p$

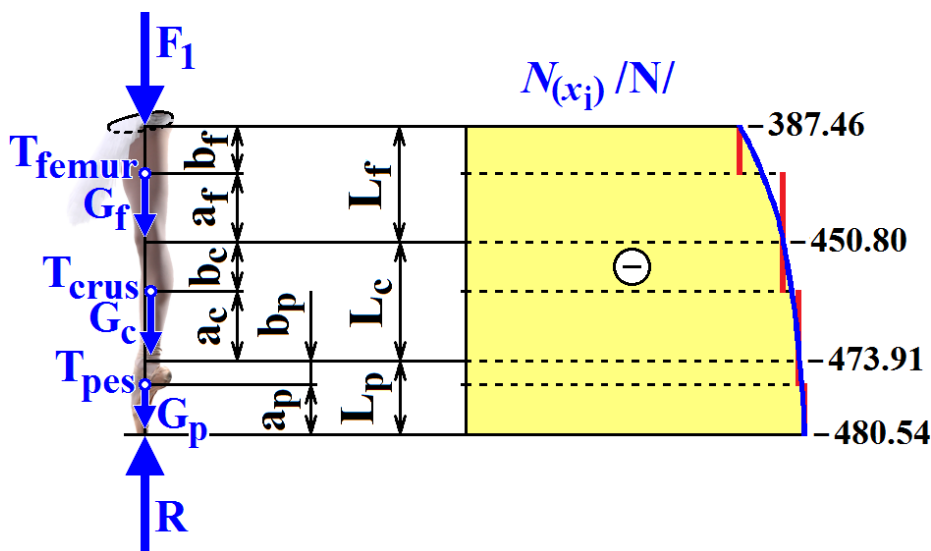
Alternativní postup odvození konstant C_i může být proveden také postupem shora, tj. např. musí být splněna okrajová podmínka $N_{(x_f=L_f)} = -F_1$, tj. $q_{a_f} L_f + \frac{q_{b_f} - q_{a_f}}{2L_f} L_f^2 + C_f = -F_1$, odkud vyplývá $C_f = -F_1 - \frac{q_{a_f} + q_{b_f}}{2} L_f = -450.8 \text{ N}$. To je také dostatečné potvrzení správnosti získaných výsledků.

Průběh normálových sil ve stojné noze baletky je tedy dán kvadratickými rovnicemi, viz Obr. 25.34.



Obr. 25.34 Průběhy normálových sil ve stojné noze při atitudě.

Na rozdíl od výsledků Příkladu 23.8, se normálové síly nemění skokem a mají spojitý průběh, viz porovnání Obr. 25.34 a Obr. 23.32, což se docela dobře shoduje s realitou. Oba porovnávané průběhy, viz Obr. 25.35, jsou však staticky ekvivalentní, tj. např. reakce R či síla F_1 jsou u obou přístupů stejné.



Obr. 25.35 Průběhy normálových sil ve stojné noze při atitudě (porovnání postupů řešení Příkladů 23.8 a 25.9).

Průběh normálové síly je záporný, tj. ve stojné noze je tlakové zatížení.

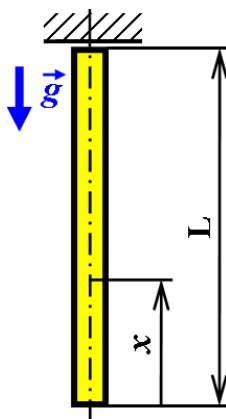
Největší normálová síla působí ve styku baletního střevíce s podlahou.

25.6 Otázky k pochopení látky

1. Jaký je rozdíl mechanickým napětím a elektrickým napětím?
2. Co je mechanické napětí?
3. Je pravda, že $10^5 \text{ Pa} = 1 \text{ MPa}$?
4. Čím se zabývá pružnost a pevnost?
5. Znáte dva „otce zakladatele“ vědního oboru pružnosti a pevnosti?
6. Jaký je rozdíl mezi mechanickým napětím a napjatostí?
7. Uveďte tři příklady jednoosé napjatosti?
8. Jak lze definovat namáhání prostým tahem/tlakem?
9. Je stojná noha Vodouše rudonohého (*Tringa totanus*), viz Obr. 19.2, namáhána tlakem?
10. Co je normálová síla?
11. Je pravda, že tahová normálová síla je záporná?
12. Je pravda, že tlakové normálové síly a napětí vyvolávají zkrácení délky úseku?
13. Jak je definován v mechanice prut?
14. Odvoďte 3. Schwedler-Žuravského větu.
15. Jakou fyzikální jednotku má spojitě osově zatížení q_N ?
16. Jestliže je na úseku nosníku spojitě osově zatížení $q_N = 0$, jaký je půběh normálové síly?
17. Je pravda, že $\frac{dq_N}{dx} = -N$?
18. Napište Hookeův zákon pro tah/tlak.
19. Je pravda, že při tahu/tlaku v teorii malých deformací platí $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$?
20. Vysvětlete Saint-Venantův princip lokálního účinku zatížení.
21. Vysvětlete designové (návrhové) nerovnice dle mezního stavu únosnosti (podmínka pevnosti).
22. Vysvětlete designové (návrhové) nerovnice dle mezního stavu použitelnosti.
23. Jak byste definovali hodnoty σ_{DOVTAH} , σ_{DOVTLAK} , Δ_{DOVTAH} a Δ_{DOVTLAK} ?

25.7 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Odvoďte vztah a vypočítejte prodloužení navrženého drátu, viz Obr. 25.36, pro hodnoty vypočtené v Příkladu 25.3. Modul pružnosti $E = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$.



Obr. 25.36 Tyč zatížená pouze vlastní tíhou.

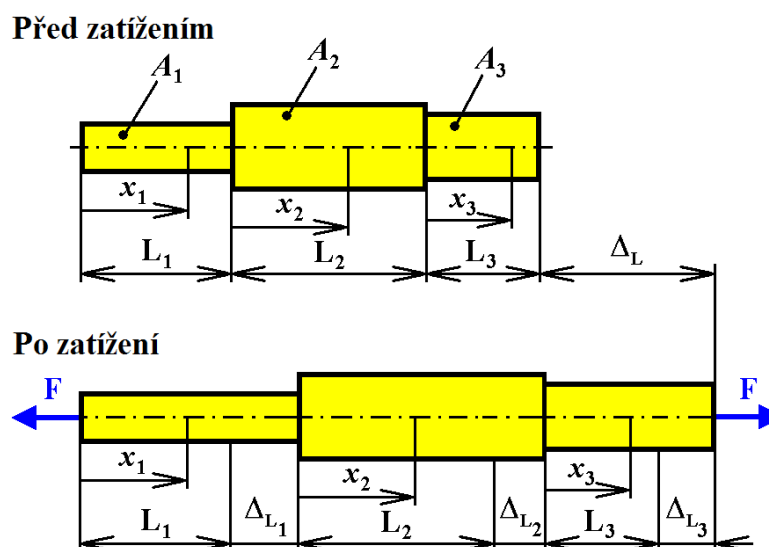
Odpověď: $\Delta_L = \frac{\sigma_{DOV} L}{2E} = 77.34 \text{ mm}.$

2. Shlédněte přednášky od emeritního prof. Fuxy¹⁶⁶ (VŠB – TU Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky), týkající se úvodů do pružnosti a pevnosti a úloh tahu a tlaku, viz [10] <https://www.youtube.com/watch?v=Gx6qs8nnpM> a [11] <https://www.youtube.com/watch?v=WhTkWo3kSH0>.
3. Vypočítejte celkové prodloužení osazeného hřídele, viz Obr. 25.37. Hřídel je zatížen pouze silami F.

¹⁶⁶ **Jan Fuxa** (nar. 1947) je český strojní inženýr, konstruktér, malíř a fotograf. V mechanice se zabýval především pružností a pevností, materiálovými testy, únavou materiálu a kritérii pevnosti materiálů. Blíže také [14] <https://www.youtube.com/watch?v=q3TQq9tNonw>.

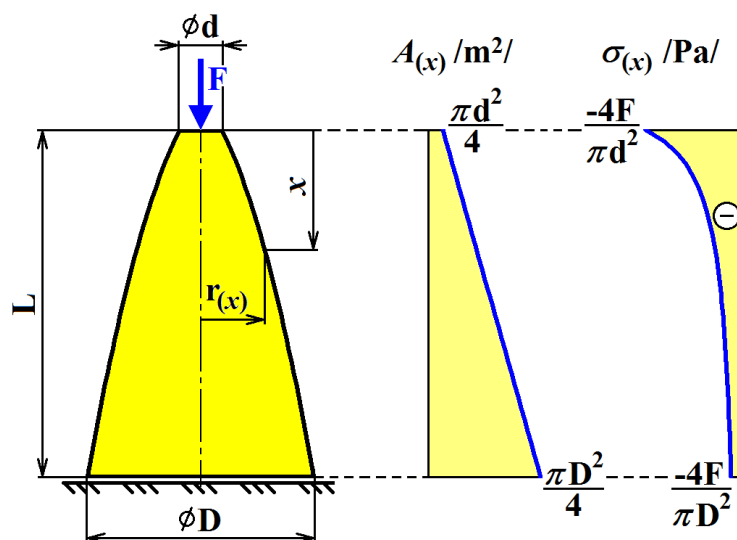


(zdroj fotografie VŠB – Technická univerzita Ostrava)


 Obr. 25.37 Osazený hřídel zatížený pouze silami F .

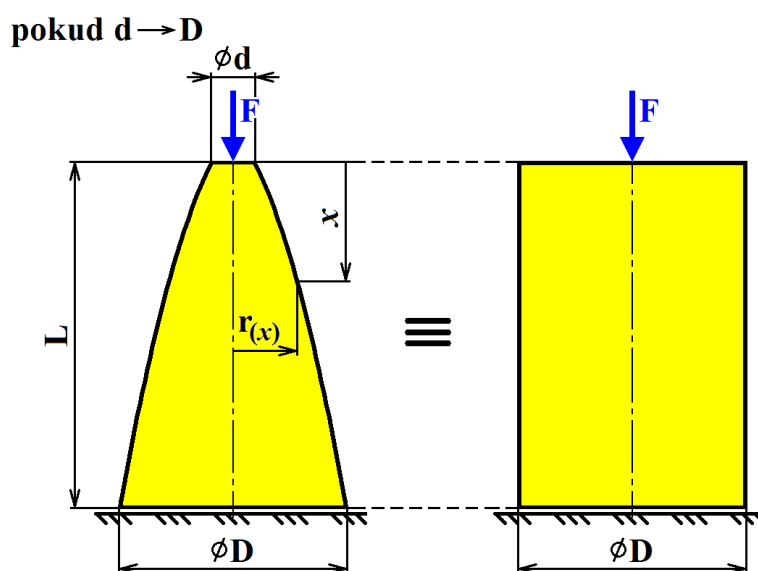
Odpověď: $\Delta_L = \Delta_{L1} + \Delta_{L2} + \Delta_{L3} = \frac{F}{E} \left(\frac{L_1}{A_1} + \frac{L_2}{A_2} + \frac{L_3}{A_3} \right)$.

4. Stanovte průběh napětí v tělese části rotačně symetrického paraboloidu, jestliže je známá jeho geometrie, tj. poloměr $r(x) = \frac{1}{2} \sqrt{d^2 + \frac{D^2 - d^2}{L} x}$ a rozměry D , d , L , a zatížení silou F , viz Obr. 25.38(a). Vliv vlastní tíhy neuvažujte. Určete také celkové zkrácení součásti.


 Obr. 25.38 Část rotačně symetrického paraboloidu zatížená pouze silou F .

Odpověď: Plocha příčného průřezu $A_{(x)} = \frac{\pi}{4} \left(d^2 + \frac{D^2 - d^2}{L} x \right)$ je dána lineární funkcí a je znázorněna na Obr. 25.38(b). Napětí je dané hyperbolou $\sigma_{(x)} = \frac{-4F}{\pi \left(d^2 + \frac{D^2 - d^2}{L} x \right)}$, viz Obr. 25.38(c), a zkrácení $\Delta_L = \frac{1}{E} \int_0^L \sigma_{(x)} dx = \frac{-8FL}{\pi E(D^2 - d^2)} \ln \left(\frac{D}{d} \right)$.

5. Řešení předchozí úlohy v bodu 5 je možno použít také pro řešení rotačně symetrického válce, pokud například $d \rightarrow D$, tj. $r_{(x)} = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 + \frac{0}{L} x} = \frac{D}{2}$, viz Obr. 25.39. Ze znalostí výpočtu zkrácení rotačního paraboloidu, tj. $\Delta_L = \frac{-8FL}{\pi E(D^2 - d^2)} \ln \left(\frac{D}{d} \right)$, odvoďte vztah pro výpočet stlačení válce průměru D .



Obr. 25.39 Válec jako zvláštní případ rotačního paraboloidu.

Odpověď: V limitním přechodu, kde může být využito také l'Hospitalovo pravidlo, které je vysvětleno v řešení Příkladu 22.26 a viz také příslušná poznámka pod čarou,

$$\text{platí } \Delta_L = \frac{-8FL}{\pi E} \lim_{d \rightarrow D} \frac{\ln \left(\frac{D}{d} \right)}{D^2 - d^2} = \frac{-8FL}{\pi E} \lim_{d \rightarrow D} \frac{1}{2d^2} = \frac{-4FL}{\pi E D^2}.$$

6. Shlédněte video o řešení úloh v tahu a tlaku, viz [12]
<https://www.youtube.com/watch?v=x4k1Si2T6Bk>.
7. Podobně jako v Příkladu 25.9, stanovte reakci a odvoďte průběh normálových sil v zavěšené končetině při statickém visu na jedné ruce, viz Obr. 25.40. Na rozdíl od Příkladu 25.9, je v horní končetině tah, ale to asi víte ☺. Dáno: tíhové zrychlení $g = 9.807 \text{ ms}^{-2}$, hmotnost $m_{\text{corpus}} = 35 \text{ kg}$, tělesná výška $h = 1.45 \text{ m}$ a vztahy uvedené v Tab. 23.4 a na Obr. 23.29 a 23.40.



Obr. 25.40 Statický vis na jedné ruce a nástin jeho řešení (fotografie Kristýna Ester Frydrýšková, 4. 4. 2020).

25.8 Reference ke kapitole 25

- [1] Frydrýšek, K.: *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Frydrýšek, K.: *Basic Strength and Elasticity of Materials*, Department of Applied Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, VSB – Technical University of Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, Czech Republic, 2016, pp. 1-264.
- [3] Halama, R., Adámková, L., Fojtík, F., Frydrýšek, K., Šofer, M., Rojíček, J., Fusek, M.: *Pružnost a pevnost*, VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, 2011, <http://mi21.vsb.cz/modul/pruznost-pevnost>
- [4] Höschl, C.: *Pružnost a pevnost ve strojírenství*, SNTL – Státní nakladatelství technické literatury, 1971, pp. 1-376.
- [5] Upshaw, D., Steinzig, M., Rasty, J. (2011). Influence of Drilling Parameters on the Accuracy of Hole-drilling Residual Stress Measurements. In: Proulx, T. (eds) *Engineering Applications of Residual Stress*, Volume 8. Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series. Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-0225-1_12.
- [6] Pedalarm_Bruch.jpg (2316×2129) (wikimedia.org), https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/9/96/Pedalarm_Bruch.jpg

- [7] Achilles tendon rupture – Wikipedia,
https://en.wikipedia.org/wiki/Achilles_tendon_rupture#/media/File:Achilles_Tendon_Tear.png
- [8] Frydrýšek, K.: The probabilistic approach and its practical applications in medical and mechanical engineering, *RISK, RELIABILITY AND SAFETY: INNOVATING THEORY AND PRACTICE, 26th Conference on European Safety and Reliability (ESREL)*, Glasgow, Scotland, 2017, pp. 2345-2460, ISBN:978-1-315-37498-7
- [9] Frydrýšek, K.: *Pravděpodobnostní výpočty v mechanice I*, Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp. 1-149.
- [10] Přednáška č. 1 - Pružnost a pevnost I - Fakulta strojní VŠB - TU Ostrava – YouTube,
<https://www.youtube.com/watch?v=Gx6qs8nnpM>.
- [11] Přednáška č. 2 - Pružnost a pevnost I - Fakulta strojní VŠB - TU Ostrava – YouTube,
<https://www.youtube.com/watch?v=WhTkWo3kSH0>.
- [12] Prostý tah a tlak, 1/9 Tah a tlak, Pružnost a pevnost, Onlineschool.cz - YouTube
<https://www.youtube.com/watch?v=x4k1Si2T6Bk>.
- [13] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar M.: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software*, 2nd edition, ITAM CAS, Prague, 2003, Czech Republic, ISBN 80-386246-08-6, pp. 1-471 (cd attached).
- [14] Cenu sv. Martina získal Jan Fuxa – YouTube,
<https://www.youtube.com/watch?v=q3TQq9tNonw>.
- [15] Png Images Free Download - Ballet Dancer Png, Transparent Png, Transparent Png Image - PNGitem https://www.pngitem.com/middle/bihhRJ_png-images-free-download-ballet-dancer-png-transparent/.

26. ÚVOD DO KINEMATIKY

Tato kapitola rozvíjí poznatky z předchozích kapitol této knihy a prvního dílu této knihy, viz [1], kde jsou již vysvětleny základy mechaniky.

Kinematika má velký význam při analýze pohybu ve fyzice a potažmo také v mechanice a biomechanice.

Obdobně jako v přechozím textu, je znovu připomenuto, že tato kapitola je jen úvodem k celé problematice, vysvětluje základní podstatu kinematiky a její použití.

Zaměření je na kinematiku hmotného bodu, jako nejčastější a nejjednodušší idealizaci skutečnosti, a přímočarý pohyb, který bývá základní nezbytnou probíranou látkou kinematiky. Pro hlubší studium existuje mnoho vhodných učebnic i s řešenými příklady, viz např. [2] až [4]. V dalším dílu této knihy bude hlubšímu studiu kinematiky a dynamiky věnována větší pozornost, zvláště ve spojitosti s kineziologií. Nicméně, některé informace týkající se kineziologie jsou v této kapitole zmíněny také.

Autory této kapitoly jsou Karel Frydrýšek a Dagmar Ličková.

26.1 Definice a historie kinematiky

Rozvoj kinematiky nelze oddělit od rozvoje dynamiky či mechaniky jako celku. Mezi nestory moderní kinematiky patří Galileo Galilei a Issac Newton, o kterých již byla v této knize zmínka. Galileo Galilei jako první zavedl koncept zrychlení a Isaac Newton Newton poukázal na to, že gravitační zrychlení může být považováno za zvláštní typ obecného zrychlení.

Slovo kinematika pochází z řeckého slova kína, což znamená pohyb nebo z řeckého kinein což znamená pohybovat se.

Ottův slovník naučný, viz [5], vysvětluje pojem pohyb a kinematiku starou češtinou takto: „Pohyb jest důležitým pojmem mechanickým. Nauka o pohybu tvoří tedy část mechaniky; pokud nepřihlíží k příčinám pohybu, sluje kinematika či foronomie.

Modernější definice může vypadat takto. **Kinematika je část mechaniky, která se zabývá pohybem a jeho vyhodnocením, ale nezabývá se jeho příčinami.** Naproti tomu, **dynamika zkoumá pohyb z hlediska působení sil (příčiny pohybu).** Laicky řečeno, kinematika „odpovídá“ na otázky, jak se těleso pohybuje a dynamika zase „odpovídá“ na otázky proč se těleso pohybuje.

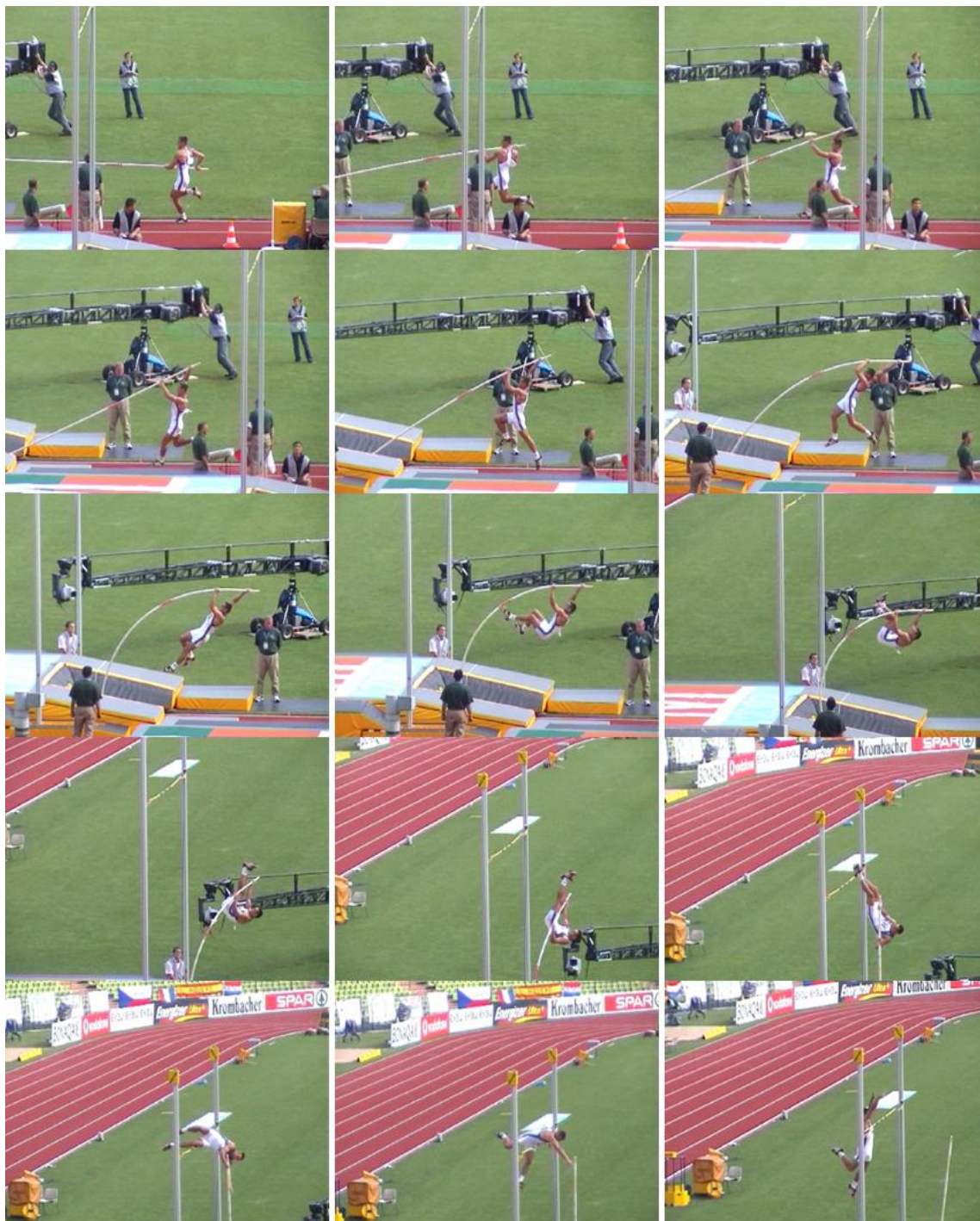
Kinematika může být analytická, numerická či experimentální a dále také teoretická či aplikační. Existuje kinematika tuhých či deformovatelných těles, hmotného bodu, tekutin, sypkých hmot, částic, planet, galaxií, pohybu organismu, stroje, dopravního prostředku, chůze člověka, forenzní atd.

Velmi blízkým, alternativním a mnohdy splývajícím termínem je slovo **kinetika**, které se používá ve spojitosti s vyšetřováním rychlosti chemických reakcí, kinetickou energií atp.

Protože tématem knihy je biomechanika, je důležité také zmínit termín **kineziologie**, viz Obr. 26.1, což je věda o mechanických zákonitostech pohybového ústrojí organismů včetně člověka a zvířat. Studuje anatomické, fyziologické, mechanické, psychologické, patologické, sportovní, fyzioterapeutické, rehabilitační, behaviorální, svalové, kognitivní¹⁶⁷ aj. mechanismy

¹⁶⁷ **Kognitivní** (z latinského cognoscere = poznávat) znamená souvislost s myslí a procesem myšlení. Do kognitivní vědy patří psychologie, umělá inteligence, lingvistika, neurověda, antropologie či filosofie. Předmětem výzkumu kognitivní vědy je tedy mysl.

a podněty. Kineziologie bude samostatnou důležitou látkou dalších dílů této knihy, protože je vhodné se jí zabývat až po kapitolách věnujících se dynamice. Dynamika je také tématem dalšího dílu této knihy.



Obr. 26.1 Kinogram – Roman Šebrle, desetiboj, skok o tyči, 510 cm, ME 2002, Mnichov, Německo; zdroj fotografií [6] <https://www.atletika.cz/clenska-sekce/treneri/biomechanika/kinogramy/skoky/sebrle-roman-tyc-510-cm-me-2002/>).

26.2 Hmotný bod, těleso, klid a pohyb

Hmotný bod je jedna z nejjednodušších představ tělesa nebo části tělesa. Je to myšlený bodový objekt, který má hmotnost, ale jeho rozměry a objem jsou nekonečně malé. Jestliže lze zanedbat rozměry tělesa vzhledem k uvažovaným vzdálenostem či požadavkům výpočtu, pak nahrazení celého tělesa aplikací hmotného bodu v těžišti tělesa je oprávněné. Výhodou je pak výrazné zjednodušení, praktičnost a řešitelnost úloh mechaniky s velmi malou chybou.

Hmotný bod je tedy abstraktním „bezrozměrným“ útvarem a nemá tedy smysl se zabývat jeho deformací, ale pouze jeho hmotností, pohybem či silovým účinkem, elektrickým nábojem atp.

Často se také z praktických důvodů používá pro náhradu tělesa nebo soustavy těles, tzv. **soustava hmotných bodů** (tzn. vhodně zvolené části tělesa/těles jsou nahrazeny hmotnými body).

Jestliže na hmotný bod nepůsobí žádné vazby (okrajové podmínky), označujeme jej jako **volný hmotný bod** a v opačném případě je to **vázaný hmotný bod**.

Pojem tělesa je již vysvětlen v 1. dílu této knihy, viz [1].

Připomenutí, z pohledu statiky, viz [1] a také předchozí text v této knize, volný hmotný bod má 3 stupně volnosti, bod vázaný na plochu má 2 stupně volnosti, bod vázaný na křivku má 1 stupeň volnosti. Avšak volné těleso má v prostoru 6 stupňů volnosti (3 posunutí a 3 rotace kolem os souřadného systému).

Klid nebo pohyb těles je vždy relativní pojem, protože do důsledků nelze určit jednoznačně. Z tohoto důvodu je zavedené vztažné těleso či vztažný souřadný systém (obecně vztažná soustava) vzhledem ke kterému se těleso pohybuje nebo je v klidu.

Pro lepší pochopení, např. na Obr. 26.2, je vidět spící řidič za volantem jedoucího automobilu. Pak lze prohlásit, řidič je v klidu vůči automobilu, ale v pohybu vzhledem k vozovce či jinému vztažnému bodu okolí automobilu. Situace popisu pohybu řidiče se ještě zkomplikuje, pokud za vztažný bod zvolíme hmotný střed planety Země, nebo hmotný střed slunce, hmotný střed naší galaxie nebo ještě komplikovaněji nějaký referenční bod z místní kupy nebo nadkupy galaxií nebo dokonce galaktického clusteru ☺. Pak detailně vyhodnotit pohyb je nemožné ☺. Jinými slovy i když spíte a „nehýbete se“, tak se ve skutečnosti společně s naší planetou, sluneční soustavou ... pohybujete vesmírem ☺.



Obr. 26.2 Spící řidič při jízdě automobilem; zdroj fotografie [7] <https://tn.nova.cz/clanek/unava-za-volantem-je-horsi-nez-alkohol-rady-jak-s-ni-bojovat.html>.

Těleso je vůči jinému tělesu v klidu, když vzhledem k němu nemění svou polohu. Těleso je vůči jinému tělesu v pohybu, když vzhledem k němu mění svou polohu.

Lze tedy prohlásit, že absolutní klid těles neexistuje. Rozhodnout o pohybu nebo klidu tělesa, se musí vždy vzhledem k jakému tělesu či souřadnému systému, ke kterému se pohyb nebo klid vztahuje.

Zajímavé je také zkoumání pohybových schopností nejen člověka a zvířat, ale také hmyzu, což může být chůze, přenášení břemen, hejnové chování, skok, let, plavání, lov, stavba hnízd atp., které se nabízí jako alternativy výzkumu pohybu a schopností robotů, viz např. Obr. 26.3.

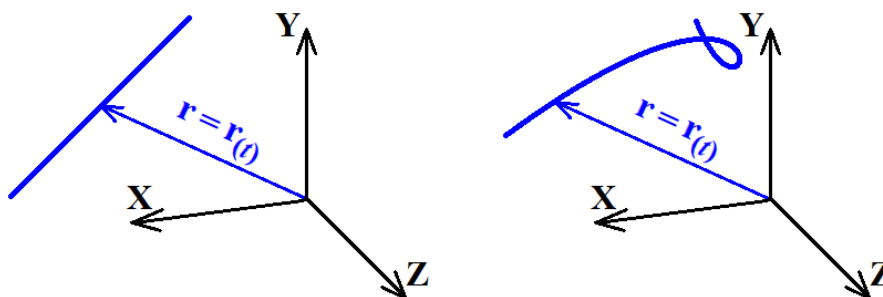


Obr. 26.3 Ohniví mravenci rodu *Solenopsis* dokáží stavět ze svých těl vory a překonávat vodní překážky; zdroj fotografie [8] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fire_Ants_on_water.jpg.

26.3 Trajektorie a dráha

Trajektorie (pohybová křivka) je geometrická křivka v prostoročasu, po které se hmotný bod nebo těleso pohybuje. Je to množina všech poloh bodu tělesa, v nichž se těleso může v různých časových okamžicích t /s/ nacházet.

Trajektorií může být přímka, kružnice, elipsa, parabola, ... či obecná křivka. Podle tvaru trajektorie dělíme **pohyb na přímočarý a křivočarý**, viz Obr. 26.4.



Obr. 26.4 Trajektorie a polohový vektor $r = r(t)$ (a) přímočarý pohyb, (b) křivočarý pohyb.

Trajektorii pohybu lze vyjádřit pomocí polohového vektoru $\mathbf{r}$ /m/ jako funkci času, viz Obr. 26.4. Polohový vektor (průvodič, radius vektor) může být značen např. také jako

$$\{\mathbf{r}\} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = [x, y, z]^T \text{ nebo } \vec{r} = f_i \vec{i} + f_j \vec{j} + f_k \vec{k} = f_i \hat{i} + f_j \hat{j} + f_k \hat{k}, \text{ kde } f_i, f_j \text{ a } f_k \text{ jsou}$$

funkce, $\vec{i}$, $\vec{j}$ a $\vec{k}$, resp. $\hat{i}$, $\hat{j}$ a $\hat{k}$ jsou jednotkové vektory. Podrobnější vysvětlení je v Kapitole 21, viz rovnice (21.1), a také v prvním dílu této knihy, viz [1]. Další parametry vektoru $\{\mathbf{r}\}$, jako jsou velikost, směrové úhly, jednotkové vektory atp., jsou vysvětleny také v Kapitole 21.

Tvar trajektorie je závislý na volbě vztažné soustavy, což lze vysvětlit na příkladu pohybu bodu pneumatiky kola jedoucího automobilu. Je-li vztažná soustava vozovka, potom je trajektorií pohybu bodu pneumatiky cykloida (odvalování kola po vozovce). Pokud je vztažnou soustavou automobil, pak je trajektorií pohybu bodu pneumatiky kružnice (otáčení kolem osy kola).

Je zjevné, že při obecném pohybu se mění velikost i směr polohového vektoru.

Délka úseku trajektorie se nazývá dráha. Dráha $s = s(t)$ /m/ je vzdálenost, kterou urazí bod tělesa za určitou dobu. Dráha je charakteristikou mechanického pohybu a je funkcí času. Dráha se používá k časové analýze odlehlosti poloh pohybu bodu tělesa.

26.4 Rychlost a zrychlení při přímočarém pohybu

Rychlost¹⁶⁸ popisuje změnu polohy za čas.

Nejjednodušším popisem rychlosti je **průměrná (střední) rychlost v_p /m s⁻¹/**, pro kterou platí

$$v_p = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t}, \quad (26.1)$$

kde **počátečními podmínkami¹⁶⁹** je dán počáteční čas t_0 /s/ a počáteční dráha s_0 /m/ (tj. dráha v čase t_0). Je zřejmé, že platí pro přírůstek dráhy $\Delta s = s - s_0$ a přírůstek času $\Delta t = t - t_0$. Stručně řečeno, **průměrná rychlost je podíl přírůstku dráhy a přírůstku času, za který bylo přírůstku dráhy dosaženo.**

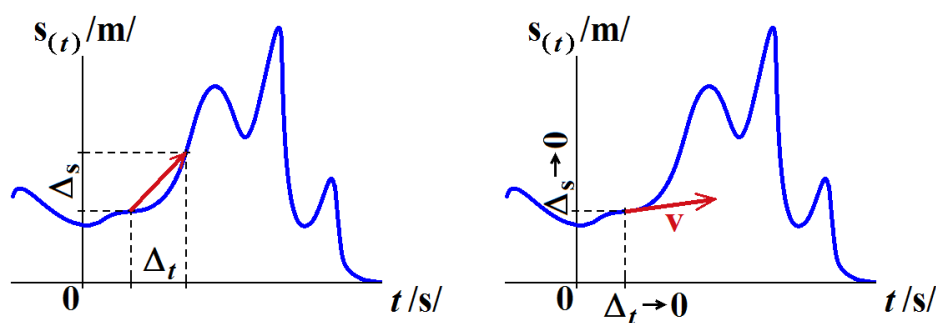
Pokud je třeba zjistit rychlost v obecném časovém okamžiku, pak je třeba znát **okamžitou rychlost v /m s⁻¹/**, kterou lze získat limitním přechodem ze vztahu (26.1)

$$v = v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}, \quad (26.2)$$

kde tečkou nad veličinou se označuje derivace podle času. Vysvětlení je také na Obr. 26.5.

¹⁶⁸ Anglicky rychlost = **velocity**. Termín rychlost se používá i v jiném než kinematickém významu, např. také jako rychlost přenosu signálů, toku informací, počítačových operací, chemických reakcí atp.

¹⁶⁹ **Počáteční podmínky**, nazývané také **Cauchyho podmínky**. Počáteční podmínka definuje, jaké hodnoty musí mít hledaná funkce či její derivace nebo integrál v referenčním (počátečním) časovém okamžiku.



Obr. 26.5 k odvození okamžité rychlosti $v = v(t)$ (limitní přechod sečny trajektorie k tečně trajektorie).

Okamžitá rychlost v čase t je vektor, který leží ve směru tečny trajektorie v čase t a jehož velikostí je směrnice tečny trajektorie, viz Obr. 26.5(b).

Z pohledu analýzy rychlosti, **pohyb se může klasifikovat jako rovnoměrný** (tj. když rychlost $v = \text{konstanta}$) **a nerovnoměrný** (tj. když $v \neq \text{konstanta}$).

Pro okamžitou rychlost platí, že $v \geq 0$.

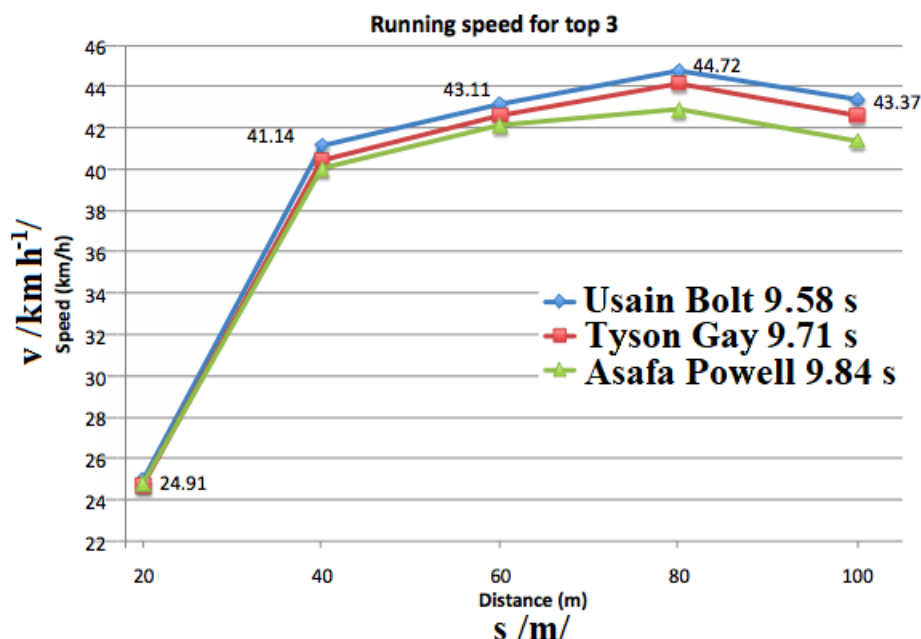
Podle současných představ fyziky, **maximální dosažitelnou rychlostí je rychlost světla ve vakuu (přesněji rychlost elektromagnetického vlnění ve vakuu) $c_0 = 299792.458 \text{ km s}^{-1}$.**

Rychlost některých zvířat je také „ohromující“. Z těch suchozemských vyniká gepard štíhlý (*Acinonyx jubatus*), který krátkodobě může dosáhnout rychlosti snad 113 km h^{-1} či více. Mezi ptáky vyniká sokol stěhovavý (*Falco peregrinus*), který při útoku vyvine rychlost 350 km h^{-1} . Nejrychlejší rybou světa je zřejmě plachetník širokoploutvý (*Istiophorus platypterus*), který dokáže plavat rychlostí přes 110 km h^{-1} , viz Obr. 26.6. Více o kinematice (kineziologii) zvířat bude uvedeno v dalších dílech této knihy ☺.



Obr. 26.6 Rekordmani v rychlostech (a) na zemi – gepard štíhlý (*Acinonyx jubatus*), (b) ve vzduchu – sokol stěhovavý (*Falco peregrinus*), (c) ve vodě – plachetník širokoploutvý (*Istiophorus platypterus*); zdroj fotografií [10] až [12].

Světový rekord v běhu člověka na 100 m je 9.58 s a dosáhl jej Usain Bolt¹⁷⁰ dne 16. srpna 2009 v Berlíně na atletickém mistrovství světa, viz Obr. 26.7.



Obr. 26.7 Průběh rychlosti na dráze $v = v(s)$ pro tři nejlepší světové sprintery; zdroj [18]
<https://sportsscientists.com/2009/08/analysis-of-bolts-9-58-wr/> a autorem upraveno a doplněno.

Orientační hodnoty obvyklé rychlosti chůze člověka a chůze koně s jezdcem v_{walk} /ms⁻¹/, jsou dle Waldo Toblera především závislé na úhlu sklonu svahu θ /rad/ nebo /°/ dané vztahem

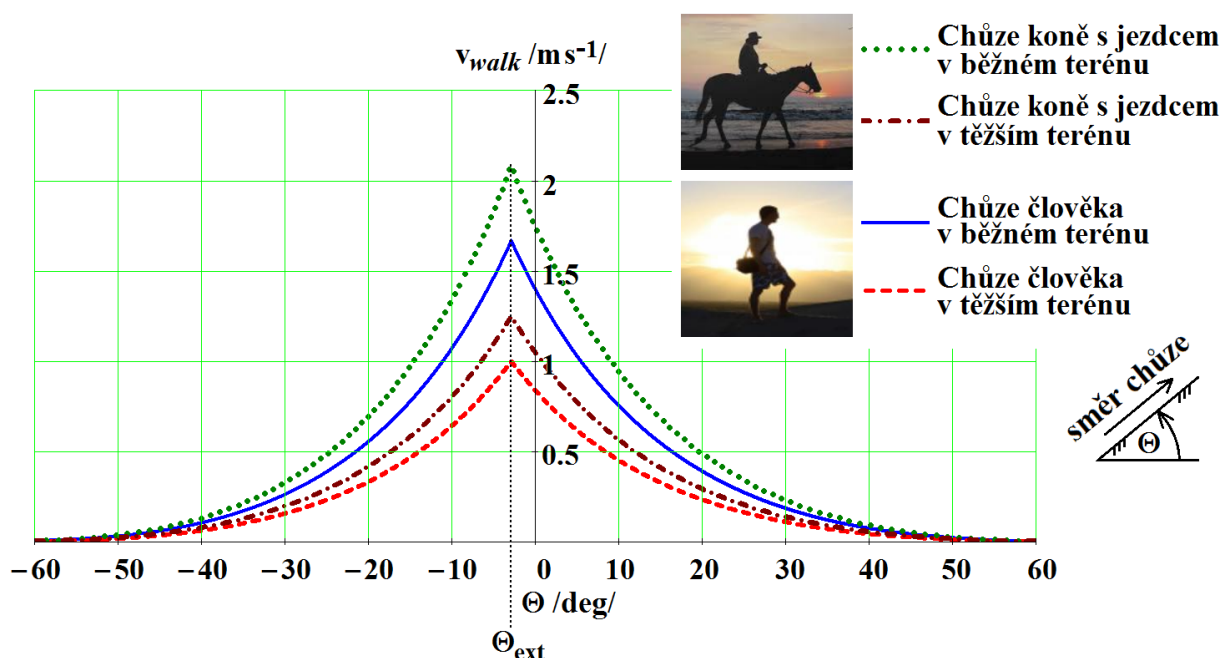
$$v_{walk} = v_{terén} \frac{5e^{-3.5|\tan(\theta)+0.05|}}{3}, \quad (26.3)$$

viz Obr. 26.8, Tab. 26.1 a reference [19].

¹⁷⁰ **Usain St. Leo Bolt** (nar. 21. srpna 1986) je slavný jamajský sprinter, který ukončil v roce 2017 sportovní kariéru. V současnosti je držitel tří světových rekordů v olympijských disciplínách běhu na 100 metrů s časem 9.58 s, běhu na 200 metrů s časem 19.19 s a štafetě na 4×100 metrů s časem 36.84 s.



(zdroj fotografie [17] <https://www.flotrack.org/articles/6552231-looking-back-on-usain-bolts-958-100m-world-record>)

Obr. 26.8 Závislost rychlosti chůze v_{walk} na úhlu sklonu svahu θ .

Vztah (26.3) je použitý pro řešení Příkladu 26.2.

Tab. 26.1 Koeficient orientační hodnoty chůze.

	$v_{terén} / \text{ms}^{-1}$	
	Běžný terén	Těžší terén
Chůze člověka	1	0.6
Chůze koně s jezdcem	1.25	0.75

Rychlost typické chůze (26.3) dosahuje maximální hodnoty (extrému) pro $e^{-3.5|\tan(\theta_{ext})+0.05|} = 1$, tj. pokud $\tan(\theta_{ext}) + 0.05 = 0$. Odtud potom vyplývá

$$\theta_{ext} = \text{atan}(-0.05) \cong -0.05 \text{ rad} \cong -2.86^\circ, \quad (26.4)$$

viz Obr. 26.6.

Rychlost chůze ovlivňuje obecně mnoho faktorů, kterými jsou zdravotní stav, věk, motivace, kvalita a sklon terénu, psychika aj. Nicméně, dle rovnice (26.4), obvykle nejrychleji chodíme při klesání se sklonem svahu cca -3° a to rychlostí $\approx 1.67 \text{ ms}^{-1} = 6 \text{ kmh}^{-1}$.

Obdobným způsobem jako rychlost, lze také definovat **zrychlení**¹⁷¹ (**okamžité zrychlení, akcelerace**) a ms^{-2} , což je změna rychlosti za čas (časová derivace rychlosti). Zaměření této kapitoly je pouze na přímočarý pohyb¹⁷² a proto

¹⁷¹ Anglicky zrychlení = **acceleration**.

¹⁷² V případě křivočarého pohybu lze také definovat tečné zrychlení, které umožňuje posun ve směru tečném k trajektorii a posun ve směru normálovém k trajektorii. Výsledné zrychlení je pak dáno vektorovým součtem tečného a normálového zrychlení.

$$a = a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}, \quad (26.5)$$

a také **průměrné (střední) zrychlení** a_p /ms⁻²/

$$a_p = \frac{v-v_0}{t-t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}, \quad (26.6)$$

kde přírůstek dráhy $\Delta v = v - v_0$ a v_0 /ms⁻²/ je počáteční rychlost v čase t_0 . Stručně řečeno, **průměrné zrychlení je podíl přírůstku rychlosti a přírůstku času, za který bylo přírůstkem rychlosti dosaženo.**

Pro zrychlení platí, že $a \geq 0$. Je-li $a < 0$, pak se také nazývá **zpomalení (decelerace, retardace)**. V obecném případě je zrychlení vektor.

Z pohledu analýzy zrychlení, **pohyb se může klasifikovat jako rovnoměrně zrychlený** (tj. když $a = \text{konstanta}$) a **nerovnoměrně zrychlený** (tj. když $a \neq \text{konstanta}$).

Nejznámějším zrychlením je **tíhové zrychlení**, které má v České republice na povrchu Země hodnotu $g \cong 9.807 \text{ ms}^{-2}$, blíže Kapitola 14.4 v prvním dílu této knihy [1].

Z pohledu biomechaniky je faktem, že **menší zvířata mohou vyvinout a vydržet větší zrychlení než větší zvířata**. Blíže však další díly této knihy.

Podle [9], u člověka způsobuje přetížení $20 \times g$ fraktury obratlů. Nicméně, pěnodějky (Cercopoidea)¹⁷³, viz Obr. 26.9 a reference [13], [14], dokáží vyvinout zrychlení kolem $400 \times g$ při svých skocích, a protože mají malou hmotnost, tak k tomu potřebují jen sílu $\approx 0.04 \text{ N}$. Dle zákonů dynamiky, síla 0.04 N by u dospělého člověka vyvolala přibližně zrychlení $\approx 0.00005 \times g$, které je zanedbatelné.



Obr. 26.9 Pěnodějky (Cercopoidea); zdroj fotografií [15]

https://en.wikipedia.org/wiki/Froghopper#/media/File:Prosapia_bicincta_Kaldari.jpg a [16]
<https://www.ireceptar.cz/zahrada/chomacky-slin-na-steblech-aneb-tajemstvi-penodejky.html>.

¹⁷³ Pěnodějky (Cercopoidea, anglicky froghopper) jsou hmyz, který během svého stadia nymfy žije uvnitř pěnové hmoty na rostlinách. Živí se vysáváním rostlinných šťáv. Nymfa produkuje pěnový obal tak, že vypouští konečником vzduch do tekutiny (analogie bublifuku). Dospělí jedinci mají vynikající schopnost skákat stylem připomínající žabí skok, viz <https://en.wikipedia.org/wiki/Froghopper>.

26.5 Vztahy mezi dráhou, rychlostí a zrychlením při přímočarém pohybu

V některých úlohách mechaiky je výhodné hledat zrychlení $a = \frac{dv}{dt}$ nebo rychlost v v závislosti na dráze s , viz např. Obr. 26.7. Jednoduchým rozšířením o člen $\frac{ds}{ds}$ a následnými úpravami, tj. $a = \frac{ds}{ds} \times \frac{dv}{dt} = \frac{ds}{dt} \times \frac{dv}{ds}$, se získá

$$a = v \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right). \quad (26.5)$$

Protože integrace je inverzní úkon k derivování, platí souvislosti uvedené v Tab. 26.2.

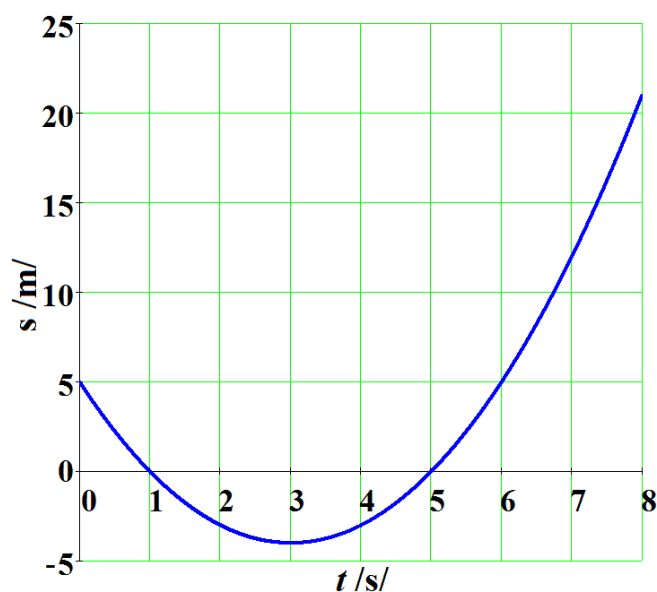
Tab. 26.2 Využití integrování a derivování při řešení úloh kinematiky při přímočarém pohybu.

	Derivace	Integrace
Výpočet zrychlení	$a = a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = \dot{v} = \ddot{s}$ $a = a_{(t)} = v \frac{dv}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{v^2}{2} \right)$	
Výpočet rychlosti	$v = v_{(t)} = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$	$v = \dot{s} = \int dv = \int a dt$ $\int v dv = \int a_{(s)} ds$ resp. $\int \frac{v dv}{a_{(v)}} = \int ds$
Výpočet dráhy		$s = s_{(t)} = \int v dt$ $s = s_{(t)} = \int \left(\int a dt \right) dt$ $s = \int \frac{v dv}{a_{(v)}}$

26.6 Příklady

Příklad 26.1: Přímocaráy pohyb hmotného bodu. Ze zadané kvadratické závislosti dráhy na čase dle rovnice $s = s_{(t)} = At^2 + Bt + C$, viz Obr. 26.10. Stanovte rovnici rychlosti $v = v_{(t)}$ a rovnici zrychlení $a = a_{(t)}$. Zjistěte jaká je dráha v čase $t = 0$ s a $t = 8$ s. Určete také časové okamžiky, kdy je dráha nulová a kdy nabývá svého minima. Vyjádřete také dráhu jako funkci rychlosti $s = s_{(v)}$.

Dáno: Konstanty $A = 1 \text{ m s}^{-2}$, $B = -6 \text{ m s}^{-1}$, $C = 5 \text{ m}$, čas $t \in \langle 0; 8 \rangle \text{ s}$, dráha $s = s_{(t)} = At^2 + Bt + C$.

Obr. 26.10 Závislost dráhy s na čase t .

Příklad je vhodný také pro zopakování matematické analýzy ☺.

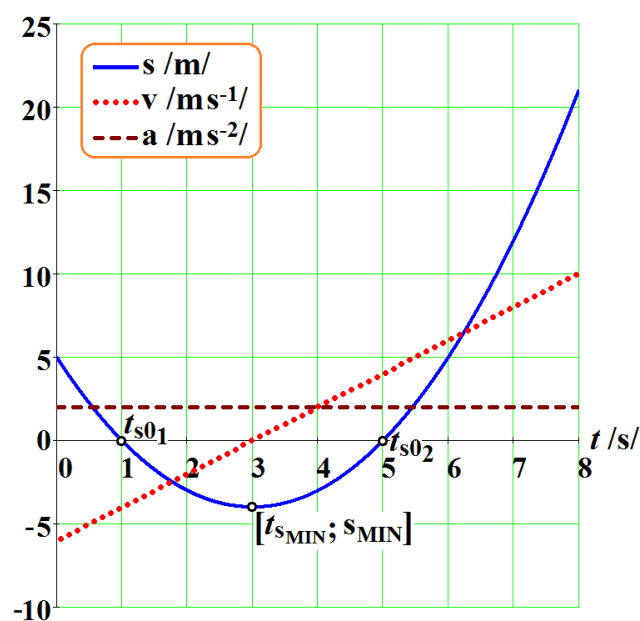
Dráha v časech $t = 0, 4, 8$ s, se určí ze vztahu $s(t) = At^2 + Bt + C$, potom platí
 $s_{(t=0)} = C = 5$ m, $s_{(t=4)} = A4^2 + B4 + C = -3$ m, $s_{(t=8)} = A8^2 + B8 + C = 21$ m.

Ze vztahů uvedených v Tab. 26.2, vyplývá pro rovnici rychlosti v a zrychlení a

$$v = v_{(t)} = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(At^2 + Bt + C) = 2At + B = 2t - 6, \quad (26.6)$$

$$a = a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2At + B) = 2A = 2,$$

které jsou vykresleny na Obr. 26.11.

Obr. 26.11 Závislosti dráhy s , rychlosti v a zrychlení a na čase t .

Je zřejmé, že rychlost je dána lineární funkcí a zrychlení je kladné a konstantní s hodnotou 2 m s^{-2} , což znamená, že se jedná o rovnoměrně zrychlený pohyb.

Z podmínky extrému dráhy (tj. přesněji z podmínky minima dráhy – tj. když je rychlost nulová), lze zjistit čas $t_{s\text{MIN}}$, kde platí $v_{(t=t_{s\text{MIN}})} = 2At_{s\text{MIN}} + B = 0$, potom vyplývá $t_{s\text{MIN}} = \frac{-B}{2A} = \frac{6}{2} = 3 \text{ s}$, viz Obr. 26.11.

Pro minimální dráhu potom platí $s_{\text{MIN}} = s_{(t=t_{s\text{MIN}})} = At_{s\text{MIN}}^2 + Bt_{s\text{MIN}} + C = -4 \text{ m}$, viz Obr. 26.11.

Dráha je nulová v hledaném čase $t = t_{s0}$, který se získá řešením kvadratické rovnice $s_{(t=t_{s0})} = At_{s0}^2 + Bt_{s0} + C = 0$, tj. ze základní školy je znám vztah pro nalezení kořenů $t_{s01,2} = \frac{-B \mp \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{6 \mp \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \mp \sqrt{16}}{2} = 3 \mp 2 \text{ s}$. Potom platí $t_{s01} = 1 \text{ s}$ a $t_{s02} = 5 \text{ s}$, viz Obr. 26.11.

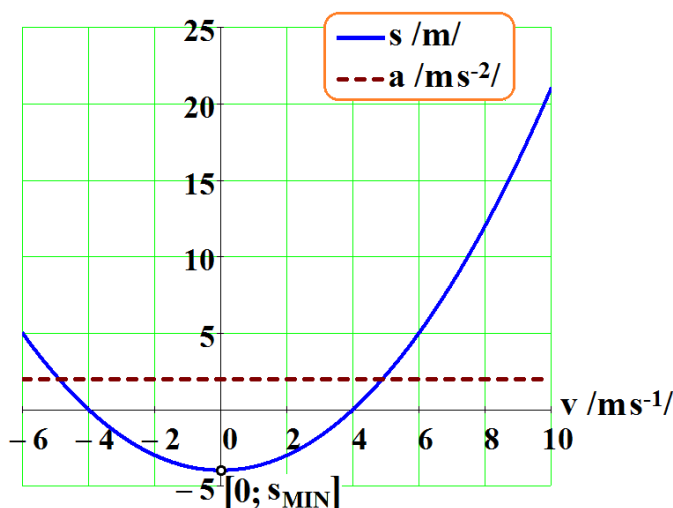
Pro vyjádření závislosti dráhy na rychlosti, lze použít diferenciální rovnici $v \frac{dv}{ds} = a$, tj. integrace $\int v dv = a \int ds$. Řešením se získá obecné řešení $\frac{v^2}{2a} = s - s_0$, tj.

$$s = s_{(v)} = \frac{v^2}{2a} + s_0,$$

kde s_0 /m/ je (integrační konstanta), která se určí např. z podmínky $s_{(v=0)} = s_{\text{MIN}}$, tj. $s_0 = s_{\text{MIN}} = -4 \text{ m}$. Platí tedy

$$s = s_{(v)} = \frac{v^2}{2a} + s_{\text{MIN}} = \frac{v^2}{4} - 4, \quad (26.7)$$

viz Obr. 26.12.



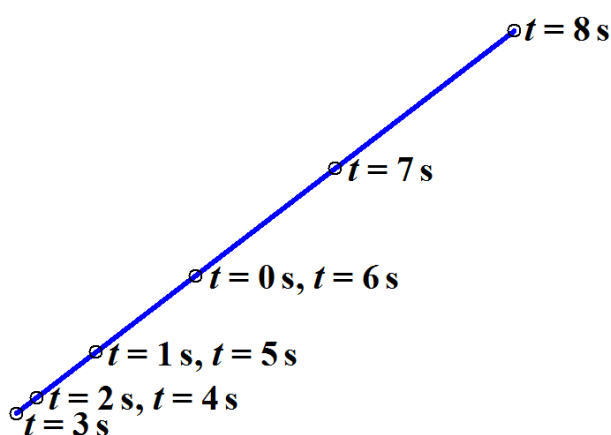
Obr. 26.12 Závislost dráhy s a zrychlení a na rychlosti v .

Alternativní odvození závislosti $s = s_{(v)}$, je možné také využitím rovnice (26.6), tj. $v = 2At + B$, odkud se vyjádří čas $t = \frac{v-B}{2A}$, který se dosadí do zadaného vztahu pro dráhu $s = s_{(t)}$. Pak platí $s = s_{(v)} = A \left(\frac{v-B}{2A} \right)^2 + B \frac{v-B}{2A} + C$, odkud se dalšími úpravami získá

$$s = s_{(v)} = \frac{A}{2A^2} \left(\frac{B^2}{2} - Bv + \frac{v^2}{2} \right) + B \frac{v-B}{2A} + C = \frac{v^2 - B^2}{4A} + C = \frac{v^2}{4} - 4,$$

což je rovnice (26.7).

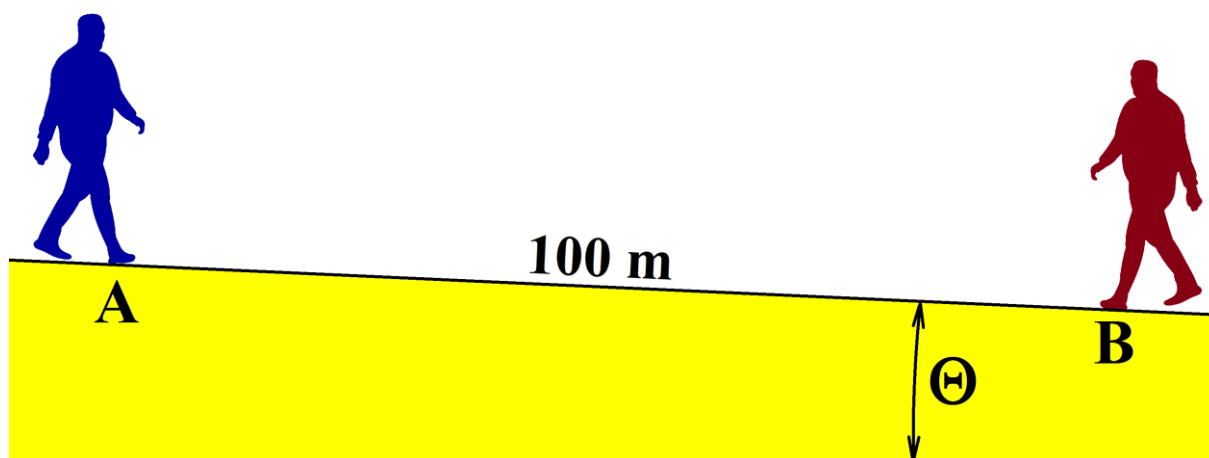
Pro ujasnění řešeného přímočarého pohybu je vhodné vykreslit trajektorii (polohu hmotného bodu v řešeném časovém intervalu $t \in \langle 0; 8 \rangle$ s, například jako na Obr. 26.13.



Obr. 26.13 Trajektorie přímočarého pohybu (řešení Příkladu 26.1).

Příklad 26.2: Dva muži, označení jako „A“ a „B“, se nacházejí na silnici se sklonem Θ , viz Obr. 26.14. Vzdálenost mezi oběma muži je 100 m. Muži proti sobě výjdou ve stejný okamžik. Na základě předchozího textu knihy, proveďte odborný odhad rychlosti mužů, vztah pro dráhu, kterou ujdou v závislosti na čase t a čas $t_{\text{setkání}}$ kdy se oba muži setkají.

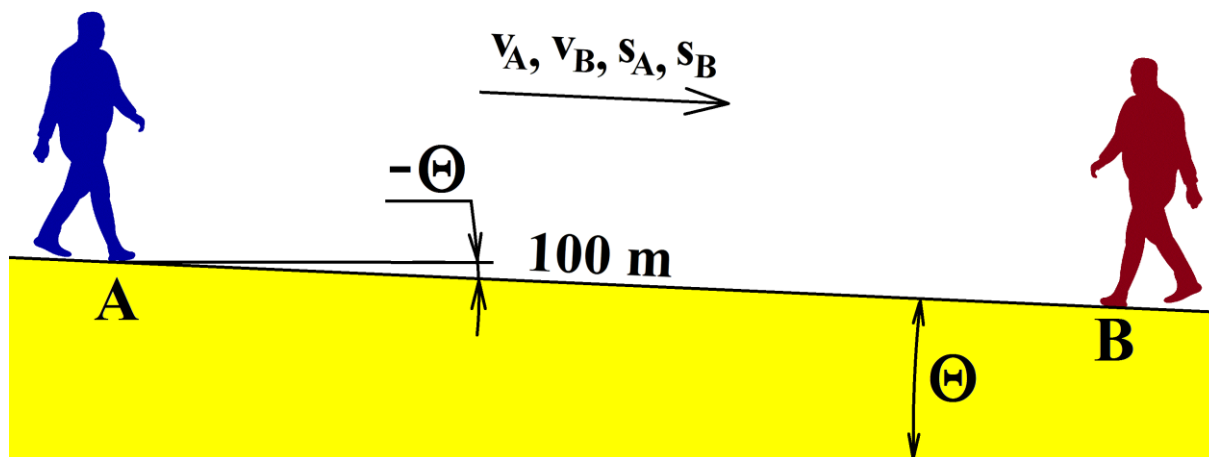
Dáno: Úhel $\Theta = 2.6^\circ$, počáteční vzdálenost mezi muži $L = 100$ m,



Obr. 26.14 Dva muži na nakloněné rovině ve vzdálenosti $L = 100$ m (zadání Příkladu 26.2, není nakresleno ve skutečném měřítku).

Pro odborný odhad se zdá být vysoce pravděpodobné, že obě postavy se budou proti sobě pohybovat rovnoměrným pohybem. Pak lze pro odborný odhad rychlosti pohybu využít vztah (26.3) a Tab. 26.1 s vysvětlením definice úhlu na Obr. 26.8.

Na úvod je vhodné definovat kladné směry rychlosti mužů v_A , v_B a příslušné kladné směry dráhy mužů s_A , s_B a také blíže specifikovat sklon silnice, viz Obr. 26.15.



Obr. 26.15 Dva muži na nakloněné rovině definice kladných směrů rychlosti a dráhy a definování úhlů sklonu (není nakresleno v měřítku).

Terén se zdá být běžný (silnice) a proto lze, dle Tab. 26.1 zvolit kontantu $v_{\text{terén}} = 1 \text{ ms}^{-1}$.

Pro odhad rychlosti pohybu muže „A“ pak, dle (23.3) platí

$$v_A = \frac{5e^{-3.5|\tan(-\theta)+0.05|}}{3} = \frac{5e^{-3.5|0.05-\tan(\theta)|}}{3} = 1.6404 \text{ ms}^{-1}, \quad (26.8)$$

Analogicky, pro odhad rychlosti pohybu muže „B“, s přihlédnutím ke kladným směrům rychlosti na Obr. 26.14, pak platí

$$v_B = -\frac{5e^{-3.5|\tan(\theta)+0.05|}}{3} = -1.1935 \text{ ms}^{-1}. \quad (26.9)$$

Opačná známénka v rovnicích (26.8) a (26.9) souvisí se vzájemně opačným směrem pohybu obou mužů (kladné směry jsou zakresleny v Obr. 26.15). Také je zřejmý přirozený rozdíl v rychlostech mužů způsobený chůzí z kopce a chůzí do kopce.

Jako počáteční čas lze zvolit $t_0 = 0 \text{ s}$ a počáteční dráhy $s_{A0} = s_{B0} = 0 \text{ m}$. Pak v souladu s Tab. 26.2 lze stanovit vztahy pro závislost dráhy obou mužů na čase pomocí integrálů $\int_{s_{A0}}^{s_A} ds = v_A \int_{t_0}^t dt$ a $\int_{s_{B0}}^{s_B} ds = v_B \int_{t_0}^t dt$. Řešením se získá

$$s_A = s_{A(t)} = v_A t = 1.6404 t, \quad s_B = s_{B(t)} = v_B t = -1.1935 t. \quad (26.10)$$

Při pohybu obou mužů dojde k setkání v čase $t_{\text{setkání}}$. Prostou úvahou je zřejmé že velikost vzdáleností, kterou oba muži ujdou se musí rovnat velikosti $L = 100 \text{ m}$. Platí tedy $L = s_{A(t_{\text{setkání}})} + |s_{B(t_{\text{setkání}})}| = s_{A(t_{\text{setkání}})} - s_{B(t_{\text{setkání}})}$. Po dosazení ze vztahů (26.10) vyplyne $L = v_A t_{\text{setkání}} - v_B t_{\text{setkání}} = (v_A - v_B) t_{\text{setkání}}$, Tj.

$$t_{\text{setkání}} = \frac{L}{v_A - v_B} \approx 35.3 \text{ s.} \quad (26.11)$$

Oba muži se tedy setkají v čase 35.3 s.

Příklad 26.3: Vektorová rovnice $\vec{r}_{(t)} = (2t - 6)\vec{i} - 2(t - 1)\vec{j} + \frac{1}{3}(t + 3)\vec{k}$ určuje pohyb hmotného bodu. Určete souřadnice a vzdálenost od počátku v čase t . Dále vektor rychlosti a zrychlení, včetně jejich velikosti. Celou situaci zkoumejte v čase t a $t_1 = 5$ s. Určete, o jaký typ pohybu se jedná.

Dáno: $\vec{r}_{(t)} = (2t - 6)\vec{i} - 2(t - 1)\vec{j} + \frac{1}{3}(t + 3)\vec{k}$, $t_1 = 5$ s.

Vektorovou rovnici hmotného bodu lze přepsat do parametrických rovnic trajektorie hmotného bodu. Vektor $\vec{i}$ udává polohu na souřadnicové ose x , vektor $\vec{j}$ udává polohu na ose y a vektor $\vec{k}$ udává polohu na ose z . Čili určení souřadnice hmotného bodu je dáno zápisem $[(2t - 6); -2(t - 1); \frac{1}{3}(t + 3)]$. Je to tedy rovnice přímky v prostoru.

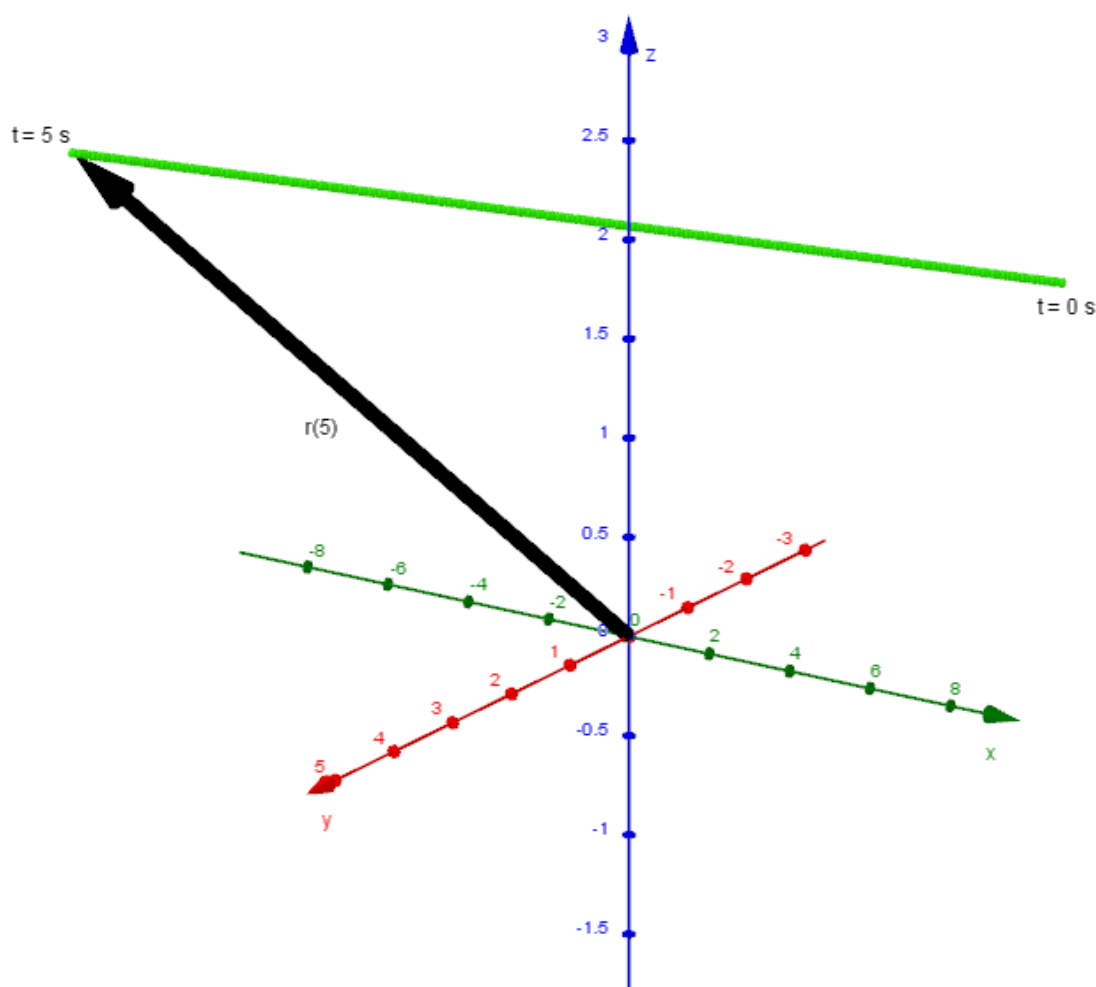
Pro určení polohy hmotného bodu v čase $t_1 = 5$ s, lze dosazením určit $[2 \times 5 - 6; -2(5 - 1); \frac{1}{3}(5 + 3)] = [4 \text{ m}; -8 \text{ m}; 2.67 \text{ m}]$.

Aplikací Pythagorovy věty se určí vzdálenost hmotného bodu od počátku:

$$|\vec{r}_{(t)}| = \sqrt{(2t - 6)^2 + [-2(t - 1)]^2 + \left(\frac{1}{3}(t + 3)\right)^2}, \quad |r_{(t)}| = \frac{1}{3}\sqrt{73t^2 - 282t + 369}$$

a $|r_{(t_1=5 \text{ s})}| = \frac{1}{3}\sqrt{73 \cdot 5^2 - 282 \cdot 5 + 369} = 9.33 \text{ m}.$

Na obrázku 26.16 je znázorněna světlezeleně trajektorie hmotného bodu od času 0 s do 5 s a také polohový vektor ve zkoumaném čase 5 s.



Obr. 26.16 Trajektorie hmotného bodu a polohový vektor.

Ze vztahů uvedených v Tab. 26.2, vyplývá pro rovnici rychlosti $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{(t)} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\left[(2t - 6); -2(t - 1); \frac{1}{3}(t + 3) \right] \right) = [2; -2; \frac{1}{3}], \text{ tj.}$$

$$\vec{\mathbf{v}}_{(t)} = 2\vec{\mathbf{i}} - 2\vec{\mathbf{j}} + \frac{1}{3}\vec{\mathbf{k}}.$$

Pro vektorovou rovnici zrychlení $\mathbf{a} = \mathbf{a}_{(t)} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left([2; -2; \frac{1}{3}] \right) = [0; 0; 0], \text{ tj.}$

$$\vec{\mathbf{a}}_{(t)} = 0\vec{\mathbf{i}} + 0\vec{\mathbf{j}} + 0\vec{\mathbf{k}}.$$

Velikost rychlosti a zrychlení lze získat opět pomocí Pythagorovy věty

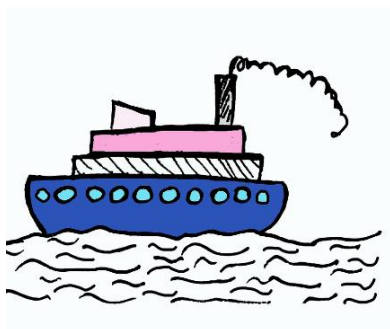
$$|\vec{\mathbf{v}}_{(t)}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = 2.85 \text{ m s}^{-1}, \text{ která je konstantní v každém čase, tj.}$$

$$|\vec{\mathbf{v}}_{(t_1=5 \text{ s})}| = 2.8 \text{ m s}^{-1} \text{ a } |\vec{\mathbf{a}}_{(t)}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 0^2} = 0, \text{ resp. } |\vec{\mathbf{a}}_{(t_1=5 \text{ s})}| = 0.$$

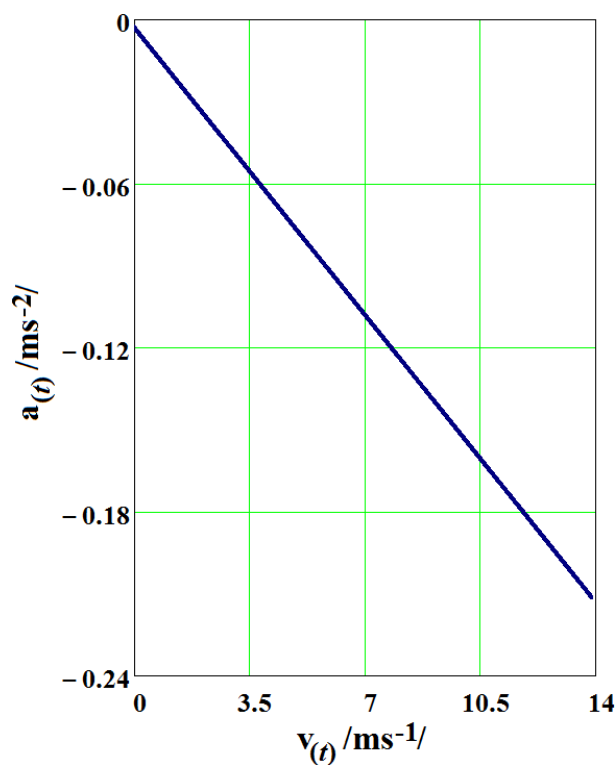
Jelikož velikost rychlosti $|\vec{\mathbf{v}}_{(t)}|$ není funkčně závislá na proměnné t (tj. je konstantní), tak je logické, že zrychlení je nulové, protože přírůstek rychlosti je nulový. Lze tedy říci, že pohyb hmotného bodu je rovnoměrný. Dle Obr. 26.16 je jasné, že se jedná o pohyb přímočarý (zelená trajektorie pohybu má tvar přímky). Řešená úloha je tedy úlohou rovnoměrného přímočarého pohybu.

Příklad 26.4: Trajekt pluje po klidném moři rychlostí v_0 , viz Obr. 26.17. Kormidelník usne a probudí ho posádka, že na obzoru ve vzdálenosti L je skalnatý ostrov. Kormidelník zjistí, že ovládání trajektu je poškozeno a nefunguje. Nicméně trajekt lze zpomalit se zrychlením daným vztahem závislým na rychlosti $a_{(v)} = -Bv - C$, viz Obr. 26.18. Počáteční rychlost trajektu je v_0 . Odvoďte vztah pro rychlost, zrychlení a dráhu trajektu v závislosti na čase. Zjistěte, zda trajekt narazí či nenarazí na ostrov. Pokud trajekt narazí na ostrov, tak určete, v jakém čase, jakou rychlostí a s jakým zrychlením.

Dáno: $B = 0.015 \text{ s}^{-1}$, $C = 0.003 \text{ m s}^{-1}$, $v_0 = 50 \text{ km h}^{-1}$, $a_{(t)} = -Bv - C$, $L = 250 \text{ m}$.



Obr. 26.17 Trajekt na moři a zkáza lodi Doña Paz, viz [20] <https://globe24.cz/revue/60565-zkaza-lodi-dona-paz-pri-nejhorsihorilodnikatastrofezemrelotrikratvice-lidinez-na-titanicu>.



Obr. 26.18 Trajekt na moři, závislost zrychlení na rychlosti.

Jelikož je zadáno zrychlení v závislosti na rychlosti, viz Obr. 26.18, tak je nutné využít v tabulce 26.2 sloupec pro integrování a následně vyřešit separovatelnou diferenciální rovnici

$$a_{(v)} = a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = -Bv - C. \quad \text{Integrací} \quad \int_{v_0}^v \frac{dv}{Bv+C} = - \int_0^t dt, \quad \text{se} \quad \text{získá}$$

$$\left[\frac{\ln(Bv+C)}{B} \right]_{v_0}^v = - [t]_0^t \quad \text{a následnými úpravami} \quad \ln(Bv+C) - \ln(Bv_0+C) = -Bt,$$

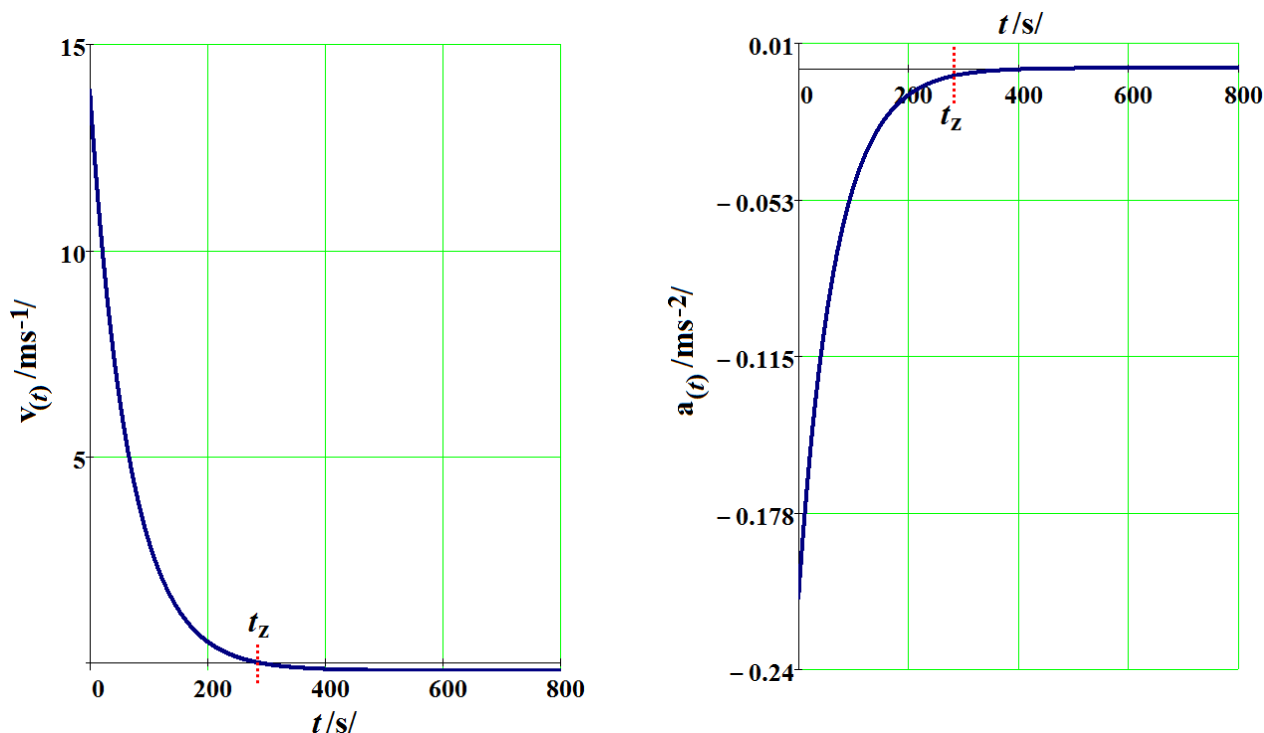
$\ln\left(\frac{Bv+C}{Bv_0+C}\right) = -Bt, \quad \frac{Bv+C}{Bv_0+C} = e^{-Bt} \quad \text{a} \quad Bv+C = (Bv_0+C)e^{-Bt}.$ Pak pro rychlost trajektu platí vztah

$$v = v_{(t)} = \left(v_0 + \frac{C}{B}\right)e^{-Bt} - \frac{C}{B} = 14.0889 e^{-0.015t} - 0.2. \quad (26.12)$$

Při dosazování do vztahu (26.12) je nutné dosazovat konzistentní jednotky a to nejlépe metry a sekundy, tj. $v_0 = 50 \text{ km h}^{-1} = \frac{50}{3.6} = 13.8889 \text{ m s}^{-1}.$

Kontrolu správnosti vztahu (26.12) lze provést testem na splnění rovnice $v_{(t=0)} = v_0$, což je splněno.

Rovnice (26.12) vyjadřuje funkční závislost rychlosti trajektu v závislosti na čase. Z obrázku 26.19(a) názorně vyplývá, že trajekt se pohybuje nerovnoměrně zpomaleným pohybem.



Obr. 26.19 Závislost rychlosti a zrychlení trajektu na čase t .

Zrychlení trajektu, v tomto případě je to zpomalení, je dáno derivací rovnice (26.12), tj.

$$a = a_{(t)} = \frac{d}{dt} \left[\left(v_0 + \frac{C}{B}\right)e^{-Bt} - \frac{C}{B} \right] = -(Bv_0 + C)e^{-Bt} = -0.2113 e^{-Bt}, \quad (26.13)$$

viz Obr. 26.19(b).

Dráha trajektu je určena integrací rychlosti (26.12). Porom platí

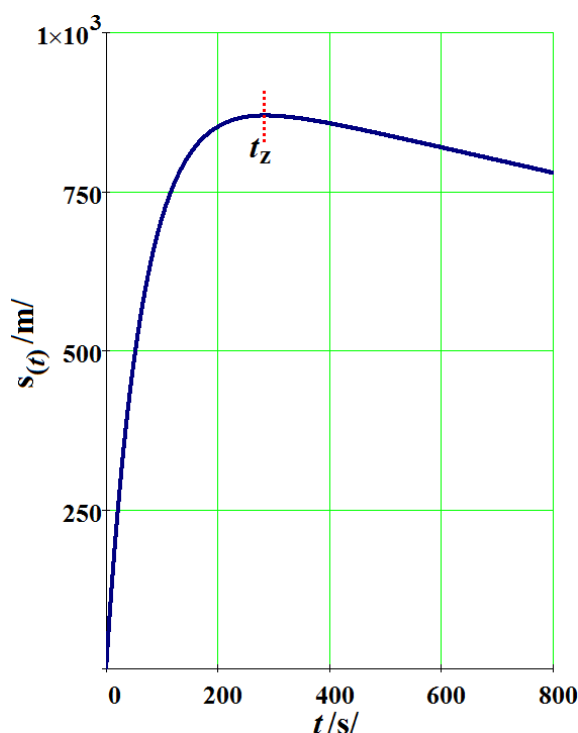
$$s = s(t) = \int v dt = \int \left[\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) e^{-Bt} - \frac{C}{B} \right] dt = D - \frac{1}{B} \left[\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) e^{-Bt} + Ct \right],$$

kde D /m/ je integrační konstanta.

Z počáteční podmínky v čase zahájení zpomalení trajektu v čase $t = 0$ s, tj. $s_{(t=0)} = 0$ m, vyplývá $D - \frac{1}{B} \left[\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) + 0 \right] = 0$, tj. $D = \frac{1}{B} \left(v_0 + \frac{C}{B} \right)$. Pak pro dráhu trajektu platí

$$\begin{aligned} s = s(t) &= \frac{1}{B} \left(v_0 + \frac{C}{B} \right) - \frac{1}{B} \left[\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) e^{-Bt} + Ct \right] = \frac{1}{B} \left[\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) (1 - e^{-Bt}) - Ct \right] = \\ &= 939.259259 (1 - e^{-Bt}) - 0.02t. \end{aligned} \quad (26.14)$$

Graf závislosti dráhy trajektu na čase t je znázorněn na obrázku 26.20.



Obr. 26.20 Graf závislosti dráhy trajektu na čase t .

Trajekt zastaví v čase t_z když má nulovou rychlost, tj. $v_{(t=t_z)} = 0$. To znamená položit rovnici (26.12) rovnu nule. Potom platí $\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) e^{-Bt_z} - \frac{C}{B} = 0$. Dalšími úpravami se získá $e^{-Bt_z} = \frac{C}{Bv_0 + C}$, $-Bt_z = \ln \left(\frac{C}{Bv_0 + C} \right)$, $Bt_z = \ln \left(\frac{Bv_0 + C}{C} \right)$ a odkud vyplývá

$$t_z = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{Bv_0 + C}{C} \right) = \frac{1}{B} \ln \left(\frac{Bv_0}{C} + 1 \right) = 66.6667 \ln(69.4444 + 1) = 283.66 \text{ s}. \quad (26.15)$$

Vypočtený čas t_z je zakreslen v Obr. 26.19 až 26.20. Je zřejmé, že čas $t > t_z$ již nemá fyzikální význam, protože řešená úloha a její rovnice se vztahují jen do času zastavení lodi na volném moři.

Dráha v čase zastavení $s_z = s_{(t=t_z)}$, se stanoví z rovnice (26.14), tj.

$$s_z = \frac{1}{B} \left[\left(v_0 + \frac{C}{B} \right) (1 - e^{-Bt_z}) - Ct_z \right] = 869.195 \text{ m}. \quad (26.16)$$

Protože dráha v čase zastavení je větší než vzdálenost od ostrova, tj. $s_z > L$ ($869.195 > 250$), pak trajekt do ostrova narazí.

Pro vyšetřování charakteristik nárazu trajektu do skalnatého ostrova je nutné nejprve stanovit čas nárazu $t_{\text{náraz}}$. Je zřejmé, že je známa velikost dráhy L , kterou trajekt urazí k místu nárazu. Rovnice má tvar $s_{\text{náraz}} = s_{(t=t_{\text{náraz}})} = L$, tj. ze vztahu (26.14) vyplývá nelineární rovnice

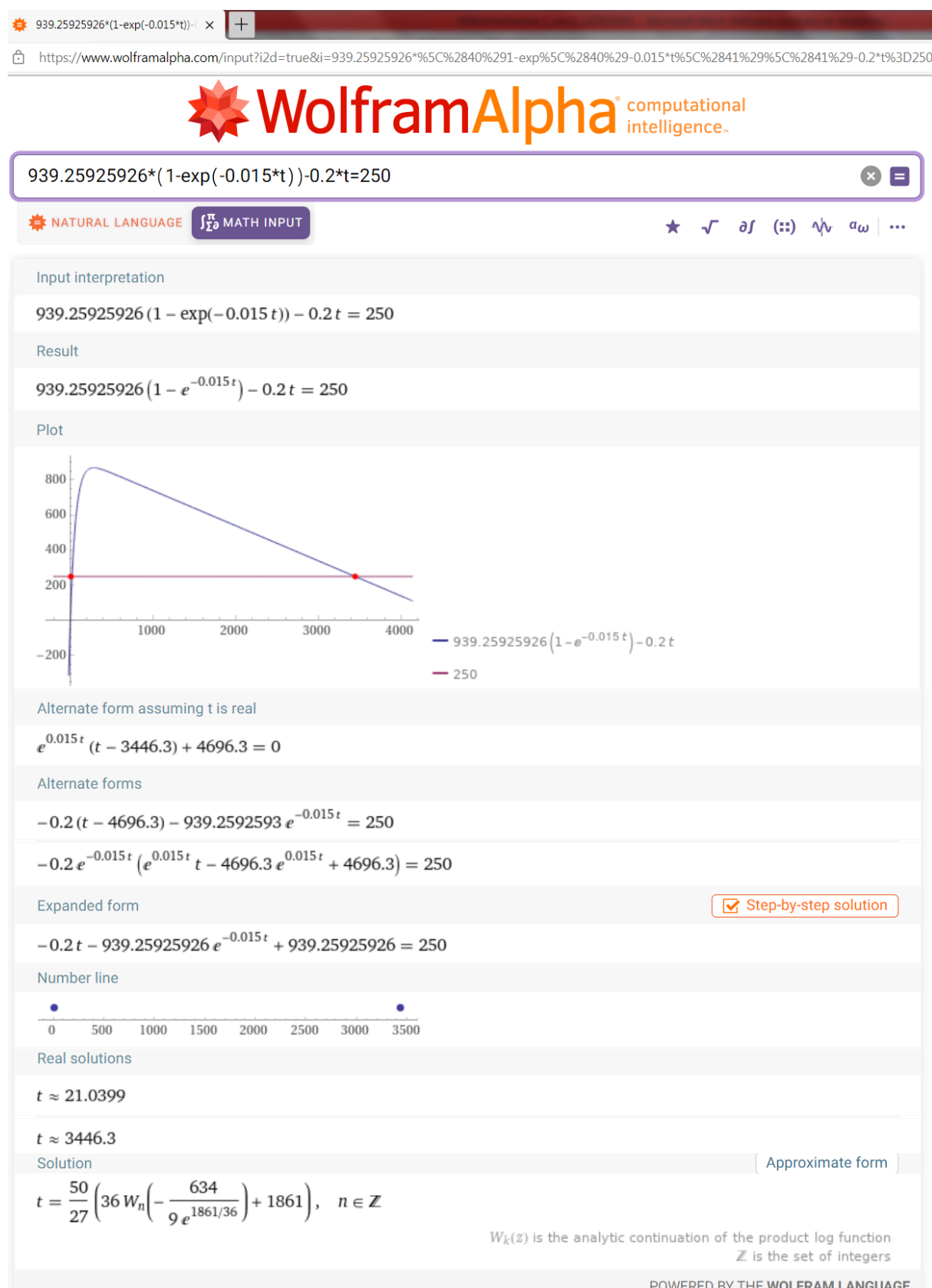
$$939.25925926 (1 - e^{-Bt_{\text{náraz}}}) - 0.02t_{\text{náraz}} = 250. \quad (26.17)$$

Řešení rovnice (26.17) lze získat numerickými postupy, protože analytické řešení není dostupné. Aplikace numerické matematiky je v tomto případě jediný možný postup. Podrobnější vysvětlení numerických postupů je tématem dalšího dílu této učebnice.

Nicméně, pro vyřešení (nalezení kořene) lze použít také dostupné online internetové rozhraní, kde v tomto případě je použitý Wolfram Alpha¹⁷⁴

[21] https://www.wolframalpha.com/input?i2d=true&i=939.25925926*%5C%2840%291-exp%5C%2840%29-0.015*t%5C%2841%29%5C%2841%29-0.2*t%3D250, viz Obr. 26.20. V okně je třeba zapsat řešenou rovnici a pak je dostupné řešení.

¹⁷⁴ **Wolfram Alpha** je tzv. odpovídající rozhraní/stroj, který je vytvořen společností Wolfram Research. Nabízí službu na přímé on-line dotazy uživatele. Na rozdíl od vyhledávacích služeb, jež poskytnou pouze seznam webovských odkazů, tak Wolfram Alpha je vytvořen na základě výpočetního softwaru Mathematica, který je využíván pro řešení široké škály úloh výpočtů a jejich vizualizaci a někdy je přiložen i postup řešení.



Obr. 26.20 Nalezení řešení rovnice (26.17) pomocí internetového rozhraní.

Z obrázku 26.20 vyplývá řešení $t_{\text{náraz}} = 21.03984$ s. Trajekt tedy narazí do ostrova za cca 21.04 s.

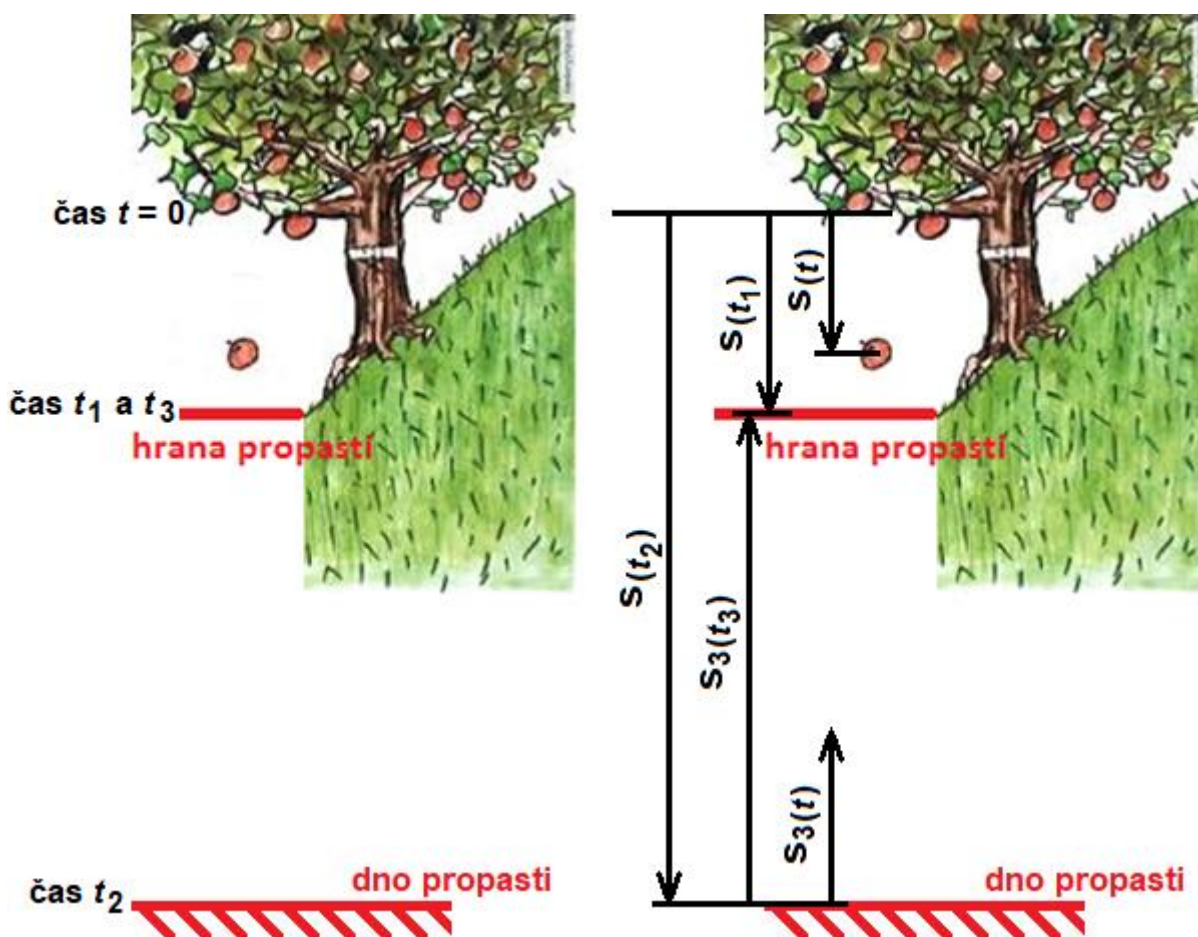
Výpočet nárazové rychlosti a nárazového zrychlení je podle vztahů (26.12) a (26.13)

$$v_{\text{náraz}} = v_{(t=t_{\text{náraz}})} = 10.0758 \text{ m s}^{-1}, \quad a_{\text{náraz}} = a_{(t=t_{\text{náraz}})} = -0.1541 \text{ m s}^{-2}. \quad (26.18)$$

Nárazové zrychlení souvisí s dynamickým účinkem sil, který bude probíráán v dalším dílu této knihy.

Příklad 26.4: U propasti leží Arnošt a Blažej. Oba pozorují jablko, které každou chvíli spadne ze stromu dolů. Větev se sledovaným jablkem je nad propastí. Jakmile začne jablko padat, viz Obr. 26.21 (a), zmáčne Arnošt stopky. Jablko za změřený čas t_1 proletí kolem hrany propasti. Blažej poté nastraží svůj sluch. Jablko za neznámý čas t_2 dopadne na dno propasti a za celkový čas t_3 (měřeno od počátku pádu jablka) uslyší ozvěnu dopadu jablka na dno propasti. Určete nejprve rychlost jablka u hrany propasti, výšku větve nad hranou propasti. Pak určete čas dopadu jablka, celkovou hloubku propasti a rychlost dopadu jablka. Odpor vzduchu zanedbejte. Uvažujte také rychlost zvuku c_{zvuk} a tíhové zrychlení g .

Dáno: konstanty $c_{\text{zvuk}} = 330 \text{ m s}^{-1}$, $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$, $t_1 = 0.5 \text{ s}$, $t_3 = 4 \text{ s}$.



Obr. 26.21 k zadání Příkladu 26.4.

Na začátku je nutné si uvědomit, že jablko padá snulovou počáteční rychlostí $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$ a se zrychlením, které se rovná tíhovému zrychlení Země g . Opět se využije Tab. 26.2 (sloupec integrace). Postup řešení je naznačen na Obr. 26.21 (b). Potom platí

$$a_{(t)} = g, \quad v_{(t)} = g \int dt = gt + v_0, \quad s_{(t)} = \int (gt + v_0) dt = \frac{gt^2}{2} + v_0 t + s_0, \quad (26.19)$$

Rovnice popisují pád jablka na dno propasti. Jedná se tedy o volný pád, pohyb zrychlený a rovnoměrně přímočarý.

Z okrajových podmínek rychlosti $v_0 = v_{(t=0)} = 0$ a dráhy $s_0 = s_{(t=0)} = 0$ a ze vztahu (26.19) vyplyne

$$a_{(t)} = g, \quad v_{(t)} = gt, \quad s_{(t)} = \frac{gt^2}{2}. \quad (26.20)$$

Pro rychlost nad hranou propasti $v_{(t_1)}$ a výšku větve nad hranou propasti $s_{(t_1)}$ pak platí po dosazení do rovnic (16.20)

$$v_{(t_1)} = gt_1 = 9.807 \cdot 0.5 + 0 = 4.904 \text{ m s}^{-1}, \quad s_{(t_1)} = \frac{gt_1^2}{2} = \frac{9.807 \cdot 0.5^2}{2} = 1.226 \text{ m}.$$

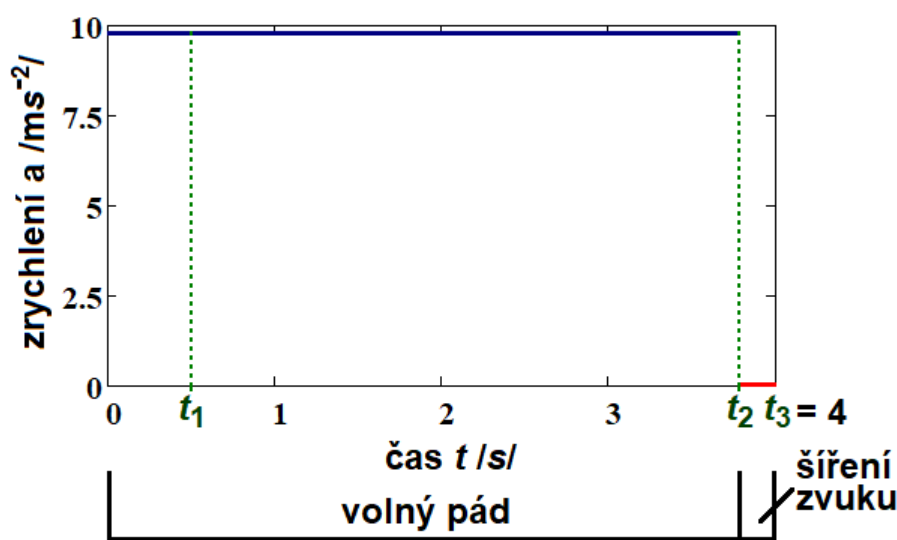
Větev je tedy 1.226 m nad hranou propasti a jablko kolem hrany propasti proletí rychlostí 4.904 m s^{-1} .

Dále jablko padá až na dno propasti dle stejných vztahů (26.20), čili volným pádem až do okamžiku t_2 , kdy dopadne na dno propasti. Vztahy (26.20) pak platí pro interval $t \in \langle 0; t_2 \rangle$. V souladu s Obr. 26.21 (b) platí pro rychlost $v_{(t_2)}$ a dráhu dopadu jablka $s_{(t_2)}$ vztahy

$$v_{(t_2)} = gt_2, \quad s_{(t_2)} = \frac{gt_2^2}{2}, \quad (26.21)$$

kde čas t_2 je zatím neznámý a je nutné jej určit.

Po dopadu jablka se začne propastí šířit zvuk dopadu (ozvěna) a to rychlostí zvuku c_{zvuk} (rovnoměrně přímočaře a nezrychleně) od času t_2 až do známého času t_3 , kdy jej Blažej uslyší, viz Obr. 26.22.



Obr. 26.22 Průběh zrychlení v Příkladu 26.4.

V souladu s Obr. 26.21 (b), pro rychlost a dráhu zvuku pak platí vztahy označené dolním indexem „3“ a to pro lokální souřadný systém s počátkem na dně propasti (tj. nulová dráha na dně propasti v čase t_2).

$$v_{3(t)} = c_{\text{zvuk}}, \int_0^{s_3(t)} ds = c_{\text{zvuk}} \int_{t_2}^t dt, \text{ tj. } s_3(t) = c_{\text{zvuk}}(t - t_2), \text{ pro } t \in \langle t_2; t_3 \rangle. \quad (26.22)$$

V okamžiku, kdy zvuk dopadu jablka dosáhne hrany propasti (tj. když jej blažej uslyší a když $t = t_3$), tak z rovnic (26.22) vyplývá

$$s_3(t_3) = c_{\text{zvuk}}(t_3 - t_2). \quad (26.23)$$

V souladu s Obr. 26.21 (b) pak vyplývá, že hloubka propasti je rovna dráze

$$s_{(t_2)} - s_{(t_1)} = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} \text{ a také dráze } s_3(t_3). \text{ Potom platí}$$

$$\frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt_1^2}{2} = c_{\text{zvuk}}(t_3 - t_2), \quad (26.24)$$

odkud po úpravách vyplývá kvadratická rovnice

$$\frac{gt_2^2}{2} + c_{\text{zvuk}}t_2 - \frac{gt_1^2}{2} - c_{\text{zvuk}}t_3 = 0, \text{ která po dosazení zadaných hodnot získá tvar}$$

$$4.9035t_2^2 + 330t_2 - 1321.2259 = 0. \quad (26.25)$$

Ze základní školy je znám vztah pro nalezení kořenů kvadratické rovnice (26.25), tj.

$$t_2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{330 \pm \sqrt{330^2 - 4 \times 4.9035 \times (-1321.2259)}}{2 \times 4.9035} = \begin{cases} t_{2,1} = 3.790 \text{ s} \\ t_{2,2} = -71.089 \text{ s} \end{cases}$$

Je logické, že vyhovuje pouze první, kladný kořen $t_2 = t_{2,1}$. Čili jablko padá do propasti necelé 4 s.

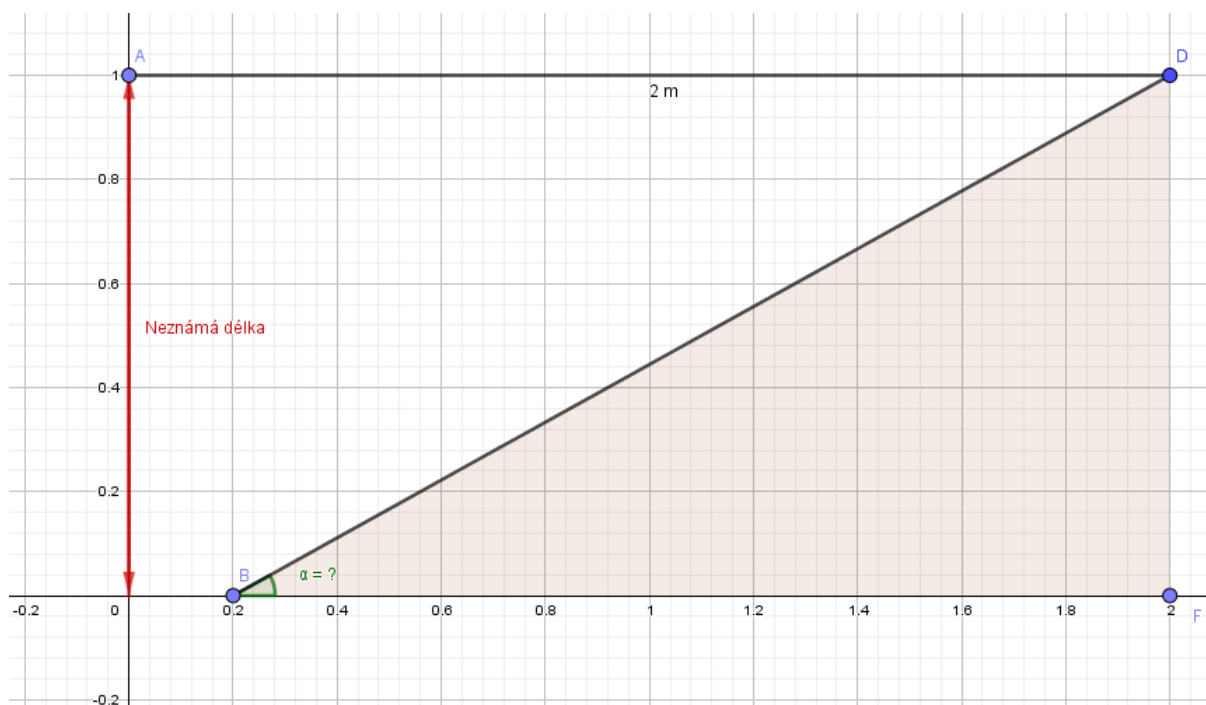
Hloubka propasti $s_3(t_3)$ je pak daná dosazením, např. do rovnice (26.23), kde $s_3(t_3) = c_{\text{zvuk}}(t_3 - t_2) = 330(4 - 3.790) = 69.218 \text{ m}$.

Rychlost $v_{(t_2)}$ dopadu jablka na dno propasti je daná dosazením do vztahu (26.21b), kde po dosazení vyplývá, že $v_{(t_2)} = gt_2 = 9.807 \times 3.790 = 37.171 \text{ ms}^{-1}$.

Příklad 26.5: Kamil a Marcel si hrají s kuličkama. Kamil stojí v bodě $A = [x_A, y_A]$, Marcel je v bodě $B = [x_B, y_B]$, viz Obr 26.23. Důlek je v bodě $D = [x_D, y_D]$. Kamil vypustí svou kuličku počáteční rychlostí v_{0A} a se zrychlením a_A . O čas Δt později cvrkne svou kuličku pod neznámým směrovým úhlem α i Marcel počáteční rychlostí v_{0B} a se zrychlením a_B . Určete úhel α , tak aby se kuličky spadly do důlku ve stejný čas. Za jak dlouho dojde ke srážce a jakou dráhu obě kuličky celkem urazí?

Dáno: konstanty $B = [0.2 \text{ m}, 0 \text{ m}]$, $v_{0A} = 1 \text{ ms}^{-1}$, $v_{0B} = 1.5 \text{ ms}^{-1}$, $a_A = 0.1 \text{ ms}^{-2}$, $a_B = 0.15 \text{ ms}^{-2}$, vzdálenost $|x_A x_D| = 2 \text{ m}$, $x_A = 0 \text{ m}$, $\Delta t = 0.5 \text{ s}$.

Marcelova i Kamilova kulička konají rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb. Celou situaci je vidět na následujícím obrázku 26.23.



Obr. 26.23 Grafické znázornění situace

Dráhu a rychlost zrychleného přímočarého pohybu lze opět vyjádřit za pomoci tabulky 26.2: $v(t) = \int a \, dt = at + v_0$, $s(t) = \int at + v_0 \, dt = \frac{at^2}{2} + v_0 t + s_0$.

Následně je nutno si uvědomit, že $|x_A x_D|$ je dráha Kamilovy kuličky za čas t , Marcelova kulička se pohybuje o Δt méně času:

$$s_A(t) = |x_A x_D| = \frac{a_A t^2}{2} + v_{A0} t + 0 \Rightarrow 0 = 0.05 t^2 + t - 2,$$

tj. ze základní školy je známý vztah pro nalezení kořenů

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 0.05 \cdot (-2)}}{2 \cdot 0.05} = \begin{cases} t_1 = 1.832 \text{ s (reálné)} \\ t_2 = -21.832 \text{ s (nereálné)} \end{cases}$$

$$s_B(t - \Delta t) = \frac{a_{0b}(t - \Delta t)^2}{2} + v_{B0}(t - \Delta t) + 0 = 0.075(1.832 - 0.5)^2 + 1.5(1.832 - 0.5)$$

$$s_B(t - \Delta t) = 2.13 \text{ m}$$

Ke srážce tedy dojde za 1.832 s po vycvrknutí první kuličky a obě kuličky urazí dráhu $2.13 + 2 = 4.13 \text{ m}$.

Další důležitý postřeh je geometrie úlohy. V obrázku 26.17 je hnědý trojúhelník BFD, ve kterém platí:

$$\cos(\alpha) = \frac{|x_A x_D| - x_B}{|BD|} = \frac{|x_A x_D| - x_B}{s_B(t - \Delta t)} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{|x_A x_D| - x_B}{s_B(t - \Delta t)}\right) = \arccos\left(\frac{2 - 0.2}{2.13}\right)$$

$$\alpha = 32.32^\circ$$

Marcel vypustí kuličku pod úhlem 32.32° a obě kuličky se setkají v dolíku ve stejný okamžik.

26.7 Otázky k pochopení látky

1. Co je kinematika?
2. Co je kinetika?
3. Co je kineziologie?
4. Vysvětlete pojem hmotný bod.
5. Vysvětlete pojem vázaný hmotný bod.
6. Co je trajektorie?
7. Napište vztahy pro rychlost.
8. Napište vztahy pro zrychlení.
9. Napište vztahy pro rychlost.
10. Jak se počítá průměrná rychlost?
11. Jak se počítá průměrné zrychlení?
12. Jaká je hodnota tíhového zrychlení?
13. Vysvětlete pojem nerovnoměrně zrychlený pohyb.
14. Je rovnice zrychlení $a = v \frac{d^2v}{ds}$ správně napsaná?

26.8 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Dráha je daná rovnicí $s(t) = e^{-0.5t} \cos(0.5t)$. Odvoďte rovnici rychlosti.
Odpověď: $v(t) = -0.5e^{-0.5t} [\cos(0.5t) + \sin(0.5t)]$.
2. Rychlost je daná rovnicí $v(t) = -0.5e^{-0.5t} [\cos(0.5t) + \sin(0.5t)]$. Odvoďte rovnici zrychlení.
Odpověď: $a(t) = 0.5e^{-0.5t} \sin(0.5t)$.

26.9 Reference ke kapitole 26

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Juliš, K., Brepta, R.: *Mechanika. I. díl, Statika a kinematika*, Praha: SNTL – Nakladatelství technické literatury, 1986.
- [3] Podešva, J., *Základy mechaniky*, skriptum VŠB-TUO, Ostrava 2002.
- [4] Hlaváč, Z., Vimmr, J., *Sbírka příkladů ze statiky a kinematiky*, skripta Západočeská univerzita v Plzni.
- [5] *Ottův slovník naučný*
- [6] Šebrle Roman – tyč - 510 cm (8.8.2002) – Atletika, <https://www.atletika.cz/clenska-sekce/treneri/biomechanika/kinogramy/skoky/sebrle-roman-tyc-510-cm-me-2002/>.

- [7] Únava je za volantem horší než alkohol! RADY, jak s ní bojovat, TN.cz (nova.cz), <https://tn.nova.cz/clanek/unava-za-volantem-je-horsi-nez-alkohol-rady-jak-s-ni-bojovat.html>.
- [8] File: Fire Ants on water.jpg - Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Fire_Ants_on_water.jpg.
- [9] Fysiologie extrémních stavu (archive.org), https://web.archive.org/web/20160304055036/http://fyziologie.lf2.cuni.cz/hampl/teach_mat/extremy/extr_st2.htm.
- [10] UnDisciplined: Superlatives And Survival, UPR Utah Public Radio, <https://www.upr.org/post/undisciplined-superlatives-and-survival>.
- [11] Sokol stěhovavý – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Sokol_st%C4%9Bhovav%C3%BD.
- [12] Úžasné snímky zvířat z dokumentu BBC Život, Týden.cz (tyden.cz), https://www.tyden.cz/fotogalerie/uzasne-snimky-zvirat-z-dokumentu-bbc-zivot_5401/400854/.
- [13] What's the highest G-force an insect can survive? - BBC Science Focus Magazine, <https://www.sciencefocus.com/nature/whats-the-highest-g-force-an-insect-can-survive/>.
- [14] Froghopper – Wikipedia <https://en.wikipedia.org/wiki/Froghopper>.
- [15] Froghopper – Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Froghopper#/media/File:Prosapia_bicincta_Kaldari.jpg.
- [16] Chomáčky slin na stéblech aneb tajemství pěnodějky, iReceptář.cz (ireceptar.cz), <https://www.ireceptar.cz/zahrada/chomacky-slin-na-steblech-aneb-tajemstvi-penodejky.html>.
- [17] Looking Back On Usain Bolt's 9.58 100m World Record – FloTrack, <https://www.flotrack.org/articles/6552231-looking-back-on-usain-bolts-958-100m-world-record>.
- [18] Analysis of Bolt's 9.58 WR, The Science of Sport (sportsscientists.com), <https://sportsscientists.com/2009/08/analysis-of-bolts-9-58-wr/>.
- [19] Tobler, W.: *Three Presentations on Geographical Analysis and Modeling* 1) *Non-Isotropic Modeling*, 2) *Speculations on the Geometry of Geography*, 3) *Global Spatial Analysis*, NATIONAL CENTER FOR GEOGRAPHIC INFORMATION AND ANALYSIS, TECHNICAL REPORT 93-1, University of California, Santa Barbara, USA, 1993, pp. 1-24.
- [20] Zkáza lodi Doña Paz: Při nejhorší lodní katastrofě zemřelo třikrát více lidí než na Titanicu, Globe24.cz, <https://globe24.cz/revue/60565-zkaza-lodi-dona-paz-pri-nejhorsi-lodni-katastrofe-zemrelo-trikrat-vice-lidi-nez-na-titanicu>.
- [21] $939.25925926 \cdot (1 - \exp(-0.015 \cdot t)) - 0.2 \cdot t = 250$ - Wolfram|Alpha (wolframalpha.com), https://www.wolframalpha.com/input/?i2d=true&i=939.25925926*%5C%2840%291-exp%5C%2840%29-0.015*t%5C%2841%29%5C%2841%29-0.2*t%3D250.

27. ÚVOD DO STATISTIKY A PRAVDĚPODOBNOSTI

Tato kapitola slouží jen jako uvedení do problematiky, neklade si za cíl uspokojit matematiky, ale pouze stručně a populárně uvádí význam, základní definice a skutečnosti z oboru statistika a pravděpodobnost. Někteří čtenáři této knihy mohou mít „mlhavé“ znalosti či představy o statistice a pravděpodobnosti. Vzhledem k tomu, že statistika a pravděpodobnost má velký význam i v biomechanice, tak je nezbytně nutné se o nich v této knize zmínit.

Kapitola navazuje na předchozí text této knihy a text jejího 1. dílu [1].

Významným cílem této kapitoly je pokusit se odstranit „mýtus strachu“ (či „fobii“¹⁷⁵ ☺) ze statistiky, pravděpodobnosti a stochastiky, který je docela často vidět mezi studenty i vědeckými pracovníky u nás i v zahraničí.

Svět kolem nás i vesmír je stochastický (plný pravděpodobnosti a statistiky)¹⁷⁶, ale většina lidského přemýšlení a technického myšlení se omezuje jednodušším deterministickým¹⁷⁷ pojetím, a to je v některých případech špatně. Samozřejmě, „hloupá“ a nesmyslná aplikace pravděpodobnosti a statistiky je také chybná.

Nicméně, snad i tato kapitola přispěje pozitivně k posunu v přemýšlení od deterministického pojetí světa k pojetí stochastickému.

V této kapitole, jsou jako obvyklé příklady pro teorii pravděpodobnosti a statistiky použity také příklady hazardních her a sázek. Neznačená to však, že **tato kniha propaguje hazardní hry, ba spíše naopak** ☺. Avšak, hazardní hry nebo běžné hry jsou vždy dobrou atraktivní a pochopitelnou ilustrací obecně velmi složitých problémů statistiky a teorie pravděpodobnosti.

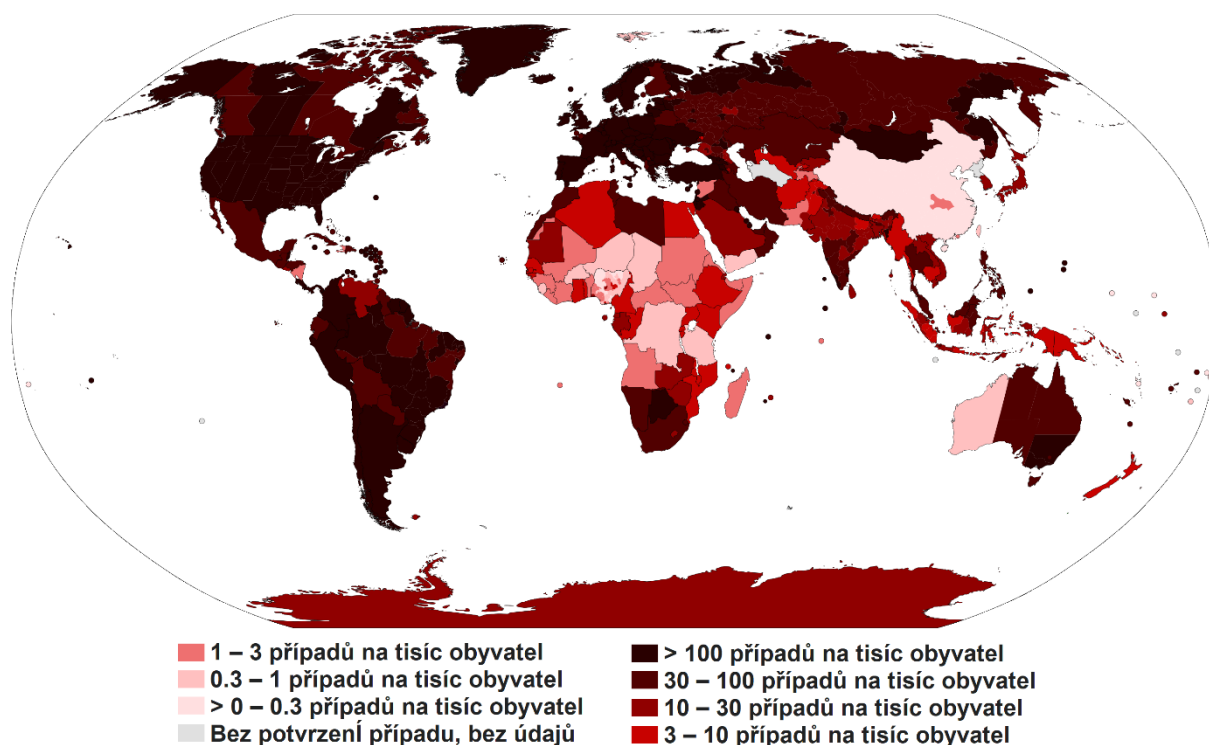
Na některých školách se také vyučuje předmět **biostatistika**, který se promítá převážně do oblasti výzkumu a vývoje v biologických, lékařských a veterinárních oborech, hygieny, epidemiologie, ekologie, potravinářství atp., viz například spojitost s pandemií covid-19¹⁷⁸ na Obr. 27.1.

¹⁷⁵ **Fobie** (z řeckého fobos = strach, latinsky phobus) je úzkostná porucha (anxiety disorder) spojená s chorobným strachem ze situací, okolností, lidí či objektů, která pokud se prohlubuje, může lidi či zvířata paralyzovat nebo v extréměch vést až ke smrti. Je známo obrovské množství fobií a fobie jsou významným předmětem studií psychologů a psychiatrů. Určitě lze tvrdit, že mnoho fobií má život zachraňující smysl, např. obava z výšek. Má se za to, že fobie nejsou vrozené, jak je to jako u jiných úzkostných poruch. Existují však predispozice k fobiím (např. člověk se narodí s citlivější nervovou soustavou) a o rozvoji fobie pak rozhodnou životní zkušenosti, chování lidí z okolí atp.

¹⁷⁶ Například **kvantová teorie**, jako jeden z fyzikálních pohledů na svět, se primárně týká elementárních částic, je založena na teorii pravděpodobnosti.

¹⁷⁷ **Deterministický jev**, při uskutečnění jistých podmínek, vede k jednoznačnému výsledku (bez variability výsledku, tj. vede ke konstantní hodnotě).

¹⁷⁸ **Pandemie virové choroby covid-19** je přetrvávající pandemie koronavirové choroby **covid-19**. Je vyvolaná těžkým akutním respiračním syndromem koronaviru **SARS-CoV-2**, který byl poprvé identifikován v prosinci 2019 v čínském Wu-Chanu (Wu-Hanu), viz také Obr. 27.1.



Obr. 27.1 Pandemie covidu-19 - mapa hustoty všech registrovaných případů podle administrativních jednotek 1. úrovně vztahované na tisíc obyvatel (období prosinec 2019 až únor 2022). Obrázek převzat z [2] https://cs.wikipedia.org/wiki/Pandemie_covidu-19 a následně upraven.

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek.

27.1 Úvod

Autor této kapitoly se domnívá, že problematiku statistiky je vhodné zahájit poučným vtipem ☺.

„Tři statistici jsou na lovu hus. První statistik zamíří, vystřelí a letící husu o metr přestřelí. Druhý statistik také zamíří, vystřelí a pro změnu husu o metr podstřelí. Třetí statistik, který je bez pušky, se zaraďuje a zvolá. Hurá! Dostali jsme ji!“

Pro ty, kteří se nezasmáli, je vtip vysvětlen na Obr. 27.2. Je tedy podstatné, správně aplikovat a interpretovat statistiku a pravděpodobnost a nedělat chybné závěry ☺. Aritmetický průměr je správně spočten, avšak po vyhodnocení střelby je zřejmé, že pravděpodobnost zásahu byla nulová.



Obr. 27.2 Letící husa Berneška (*Branta*) - (a) situace před výstřelem, (b) situace po dvou výstřelech a statistické vyhodnocení střelby (aritmetický průměr značí zásah, avšak skutečnost je úplně jiná ☺).

Plně vystihnout definici náhodnosti asi nelze. Míru náhodnosti udává entropie¹⁷⁹. Pokud je tedy míra náhodnosti maximální (všechny možné posloupnosti se generují se stejnou pravděpodobností), je tedy i entropie maximální. Entropie je míra neurčitosti systému.

Statistika¹⁸⁰ je obor zabývající se teorií, studiem, shromažďováním, interpretací a aplikací dat popisujících existující variabilitu veličin jevů a hodnocením vysvětlujících hypotézy jevů. Ve statistice jsou náhodnost a neurčitost modelovány pomocí teorie pravděpodobnosti. Statistika získává hodnoty realizací náhodného výběru. Statistika má dva vědecké obory, a to popisnou statistiku a matematickou statistiku. Použití statistiky ve všech vědních disciplínách je zřejmé.

Náhodný jev je výsledek náhodného pokusu (měření, pozorování), o kterém lze po provedení pokusu rozhodnout, zda nastal nebo nenastal. Počet náhodných jevů může být konečný nebo nekonečný.

Dle autora této kapitoly, náhodnost určitého jevu je spojena s nedostatečnou nebo spíše nemožnou přesnou znalostí počátečních a okrajových podmínek daného jevu. Náhodnost je tedy do určité míry přirozené chování vesmíru.

¹⁷⁹ **Entropie** (z řeckého entropía, což znamená „směrem k“) je jedním ze základních a nejdůležitějších pojmů ve fyzice, informatice a matematice.

¹⁸⁰ Slovo **statistika** pochází z latinského status, což znamená stav.

Například, hod hrací kostkou¹⁸¹, kdyby hráč byl schopen přesně určit všechny počáteční a okrajové podmínky hodu (poloha a orientace kostky v prostoru, rychlost, zrychlení, interakci ruky a kostky při hodu, vliv odporu vzduchu při pohybu kostky, třecí a rázové síly při dopadu kostky apod. a sestavil by tak spolehlivý fyzikální model), bylo by možné jednoznačně předpovědět, které číslo na kostce padne. Pak by nebylo třeba teorie pravděpodobnosti ☺. Vzhledem k tomu, že zřejmě není v silách člověka takový absolutně spolehlivý model hodu kostkou sestavit, tak nebývá nic jiného než použít k určení předpovědi hodu teorie pravděpodobnosti, protože jiný aparát neznáme.

Pravděpodobnost P náhodného jevu (pokusu) je číslo, které je mírou očekávatelnosti výskytu jevu. Pravděpodobnost události se obecně označuje reálným číslem od 0 do 1. Událost, která nemůže nastat, má pravděpodobnost 0, a naopak jistá událost má pravděpodobnost 1. Občas se pravděpodobnost uvádí v procentech či promile, tedy setinách/tisícinách pravděpodobnostního vyjádření.

V současnosti neexistuje vědní obor, který nepracuje s hromadnými daty a nevyužívá k jejich vyhodnocení statistické metody.

Lidé často odmítají statistiku/pravděpodobnost z obavy, že jde o složitou matematiku. Ve skutečnosti však většinu v praxi používaných statistických metod zvládnete s matematikou středoškolskou ☺. Pozitivní roli odstraňování přemrštěných obav zde sehrává i výpočetní technika (dostupná algoritmizace, zrychlení výpočtů, zpracování a interpretace výsledků atp.) a zkušenosti uživatelů ☺.

Důležité je tedy zachovat si zdravý pohled na statistiku a rozpoznávat statistiku chybnou či úmyslně zkreslenou ☺.

¹⁸¹ **Hrací kostka** je malý mnohostěn (nejčastěji krychle), kterou lze použít pro generování posloupnosti náhodných čísel či znaků. Je to důležitá součást mnoha hazardních a společenských her již od pravěku a je také vděčným tématem teorie pravděpodobnosti a statistiky. Známy je také citát „Alea iacta est“ (Kostky jsou vrženy)“, který v r. 49 př. Kr. prohlásil tehdejší Římský konzul **Gaius Julius Caesar**, když překročil řeku Rubikon. Toto rčení znamená jasné a stručné označení stavu či situace, kdy nelze couvnout či vzít rozhodnutí zpět. Existuje nespočet her, které používají hrací kostky např. Člověče nezlob se!, Vrháby aj. Zajímavostí také je, že **Jan Ámos Komenský** (1592 – 1670), který varoval před hazardními hrami, přesto doporučuje Vrháby jako vhodnou společenskou hru i pro děti, přičemž při popisu této hry zdůrazňoval, že se jedná o hru, kterou hrajeme „Z sstestjm a kunstem“, tj. „Se štěstím a umem“, viz [3].



(a) Římské hrací kostky ze 2. stol. - muzeum ve Vienne, Francie, (b) různé druhy hracích kostek (zdroj obrázků [4]).

Na závěr úvodu je důležité zmínit termín **stochastika**¹⁸², který zkoumá náhodné jevy. Podle autora této knihy je to souhrnný název pro teorii pravděpodobnosti a matematickou statistiku.

27.2 Stručná historie statistiky a pravděpodobnosti

Asi nejstarší doklad statistiky jsou paleolitické¹⁸³ **vrubovky z Věstonic na Moravě** využívané pro číselné záznamy, viz Obr. 27.3.



Obr. 27.3 Radius mladého vlka, na němž je vyryto 55 hlubokých zářezů. Prvních 25 je uspořádáno do skupin po pěti. Po nich následuje dvakrát tak dlouhý zářez, kterým řada končí. Pak začíná opět dvojnásobně dlouhým zářezem nová řada, která obsahuje 30 vrubů, viz [5].

Nejstarší písemné doklady statistiky, které jsou psané protosumerským písmem, pocházející z oblasti Sumeru a jsou to záznamy o časových intervalech, počtech osob a kusů domácího zvířectva a úrodě. Již od starověku tedy vznikala potřeba shromažďování statistických dat za účelem řízení státu, ekonomiky, obchodu, války, politiky atp., což samozřejmě pokračuje i dnes.

Asi neznámější starověký příběh, ve kterém je zmíněno získávání statických dat, jsou **okolnosti vánočního biblického narození Ježíše Krista**¹⁸⁴.

¹⁸² **Stochastický** (řeckého stochastiké techné = umění uhádnout nebo trefit se) znamená náhodný. Protikladem tohoto termínu je deterministický. Známy příklad stochastického jevu je hod hrací kostkou, protože výsledek hodu se nedá exaktně předpovědět, ale velké množství hodů se dá zkoumat statisticky a stanovit pravděpodobnost výsledků hodů.

¹⁸³ **Paleolit** (z řeckého pálios – starý a lithos – kámen) neboli starší doba kamenná je nejdelší období lidské historie.

¹⁸⁴ „Stalo se v oněch dnech, že vyšlo nařízení od císaře Augusta, aby byl po celém světě **proveden soupis lidu**. Tento první majetkový soupis se konal, když Sýrii spravoval Quirinius. Všichni se šli dát zapsat, každý do svého města. Také Josef se vydal z Galileje, města Nazaretu, do Judska, do města Davidova, které se nazývá Betlém, poněvadž byl z domu a rodu Davidova, aby se dal zapsat s Marií, která mu byla zasnoubena a čekala dítě. Když

Statistická šetření však nebyla vždy prováděna jen kvůli ekonomice, ale měly i humánní smysl. Například, za vlády císaře Rudolfa II, vypukla v roce 1583 v českých zemích epidemie moru. Proto bylo zahájeno šetření o „zdraví populace“, které mělo cíleně zmapovat vznik a rozvoj zhoubných epidemií a umožnit přijímání včasných protipatření.

Rozvoj popisné statistiky začal v 16. století společně s teoriemi o řízení státu. Někdy v letech 1666 až 1668 použil Ital **Girolamo Ghilini**¹⁸⁵ poprvé slovo statistika ve své knize. Slovo statistika pochází z latinského status, což znamená stav a byl tím myšlen stav státu. Pojem statistika tedy nejprve označoval činnost a metody pro zjišťování stavu státu.

V 17. století se statistika rozvíjí v Německu a také v Anglii (politická aritmetika – předchůdce demografie, která se z údajů o natalitě¹⁸⁶ a mortalitě¹⁸⁷ pokoušela zkoumat vývoj

tam byli, naplnily se dny a přišla její hodina. I porodila svého prvorozeného syna, zavinula jej do plenek a položila do jeslí, protože se pro ně nenašlo místo pod střechou ...“, viz [6].



Dětství Ježíše Krista – část Vyšebrodského cyklu od Mistra Vyšebrodského oltáře (vytvořeno v letech 1345–1350), který patří k nejvýznamnějším památkám světové gotické malby. (zdroj obrázu internet).

¹⁸⁵ **Girolamo Ghilini** (1589–1668) byl italský historik a kněz.



(zdroj obrázu internet)

¹⁸⁶ **Natalita** znamená růst populace rozmnožováním, blíže [1].

¹⁸⁷ **Mortalita** znamená pokles populace hynutím, blíže [1].

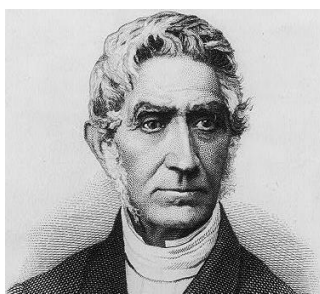
populace obyvatelstva). Z tabulek úmrtnosti se také snažili odhadnout rizika pojišťovnictví a rizik obecně atp.

Významnou osobností evropské statistiky byl **L.A.C. Quételet**¹⁸⁸, který vypracoval zásady moderního sčítání lidu, antropometrie a lehce se zabýval pojmy průměr, střední hodnota, rozptyl, rozdělení atp. Známy je také **Quételetův index (index tělesné hmotnosti, Body Mass Index, BMI)**¹⁸⁹, který se používá také pro stanovení nadváhy, je již vysvětlen a používán v prvním dílu této knihy, viz [1].

Není překvapením, že matematická statistika se vyvíjela paralelně s teorií pravděpodobnosti.

Pomineme-li dřívější práce autorů starověku a středověku, zabývajících se statistikou (zaměřené převážně na kombinatoriku¹⁹⁰ a sázky, viz Obr. 27.4), tak dalšími významnými průkopníky jsou například **Blaise Pascal** (viz poznámka pod čarou v Kapitole 25) a **Pierre de Fermat**¹⁹¹.

¹⁸⁸ **Lambert Adolpe Jacques Quételet** (1796–1874) byl belgický astronom, matematik, statistik a sociolog. Měl vliv na zavedení statistických metod do společenských věd i kriminalistiky.



(zdroj obrázku internet)

¹⁸⁹ $BMI = \frac{m}{h^2}$, kde m /kg/ je hmotnost probanda a h /m/ je výška probanda, blíže [1].

¹⁹⁰ **Kombinatorika (kombinatorická matematika)** se zabývá uspořádáním daných prvků podle jistých pravidel do určitých skupin a výpočtem množství těchto skupin.

¹⁹¹ **Pierre de Fermat** (1601–1665) byl francouzský právník, ale také amatérský a slavný matematik a fyzik.



(zdroj obrázku internet)



Obr. 27.4 Násilný konec hazardní hry - dřevorez ke knize Sebastiana Branta "Lod' bláznů" z roku 1493; zdroj [7].

Pascal a Fermat, v roce 1654 vyřešili zajímavou a populární úlohu o spravedlivém rozdělení sázky (tj. jak spravedlivě rozdělit bank mezi hráče, jestliže série hazardních her musela být z nějakých důvodů předčasně přerušena), která vedla na známý **Pascalův trojúhelník**¹⁹².

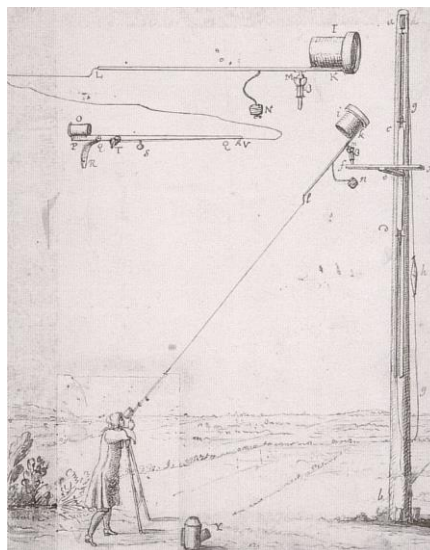
¹⁹² **Pascalův trojúhelník** je geometrické uspořádání binomických koeficientů do tvaru trojúhelníku, které se vyučuje již na základní škole. Pascal však nebyl první, kdo tento trojúhelník sestavil.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 1 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
 & & & & \vdots & & & & & & & & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \binom{0}{0} \\
 \binom{1}{0} \quad \binom{1}{1} \\
 \binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2} \\
 \binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3} \\
 \vdots
 \end{array}$$

Dalšími významnými lidmi, kteří jednoznačně významně přispěli k rozvoji statistiky a pravděpodobnosti byli **Christian Huygens**¹⁹³, **Abraham de Moivre** (1667–1754) a především **Jacob Bernoulli**¹⁹⁴.

Později, na počátku 19. století, významně přispěli ke statickému zpracování dat, vyhodnocování dat a regresní analýze také **Carl Friedrich Gauss**¹⁹⁵

¹⁹³ **Christian Huygens** (1629–1695) byl význačný nizozemský fyzik, mechanik, matematik, astronom, horolog, vynálezce a také autor rané science fiction. Výrazně přispěl k dynamice (zákon zachování hybnosti, moment setrvačnosti, odstředivá síla, ...), teorii pravděpodobnosti, optice a konstrukci hodin. Známy je také Huygensův princip vlnění.



Christian Huygens a jeho teleskop (zdroj obrázků internet)

¹⁹⁴ **Jacob Bernoulli** (1655–1705) byl významný švýcarský matematik a fyzik. Významně přispěl k rozvoji matematické analýzy, teorie pravděpodobnosti, variačního počtu a mechaniky. Patří do vědecky významné rodiny Bernoulliů.



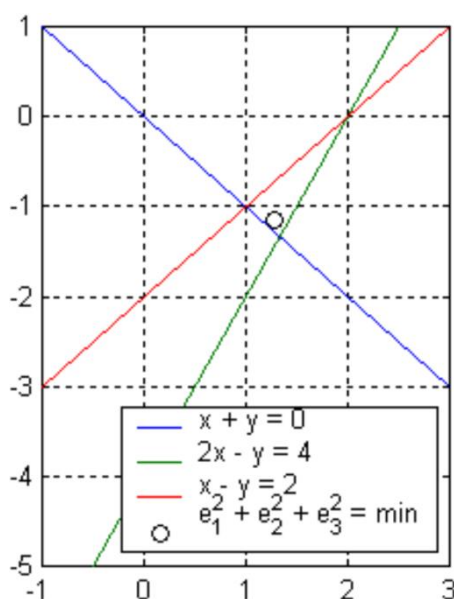
(zdroj obrázku internet)

¹⁹⁵ **Johann Carl Friedrich Gauss** nebo Carolus Fridericus Gavss či Gauß (1777–1855), byl slavný německý matematik, fyzik a vynálezce. Zabýval se převážně geometrií, matematickou analýzou, statistikou, pravděpodobností, teorií čísel, astronomií, elektrostatikou, geodézií a optikou. Silně ovlivnil většinu z těchto oborů vědění.



(zdroj obrázku internet)

a **Adrien-Marie Legendre**.¹⁹⁶ Odvodili důležitou metodu nejmenších čtverců¹⁹⁷, viz Obr. 27.5, která je uvedena v každé učebnici numerické matematiky. Četné aplikace metody nejmenších čtverců jsou také mimo obor statistiky.



Obr. 27.5 Příklad aplikace metody nejmenších čtverců pro nalezení pravděpodobného průsečíku tří přímek zatížených chybami; zdroj [8].

Později se matematické metody statistiky začaly velmi rychle rozvíjet v souvislosti s eugenickým¹⁹⁸ a biologickým výzkumem.

¹⁹⁶ **Adrien-Marie Legendre** (1752–1833 tamtéž) byl francouzský matematik. Významně přispěl k rozvoji statistiky, teorie čísel, abstraktní algebry a matematické analýzy. Zajímavostí je, že se dochovala pouze jeho karikatura ☺, viz níže.



(zdroj obrázku internet)

¹⁹⁷ **Metoda nejmenších čtverců** je matematicko-statistická metoda pro aproximaci řešení přeuročených soustav rovnic (tj. soustav, kde je více rovnic, než neznámých). Výsledné řešení má minimalizovat součet čtverců odchylek vůči každé rovnici.

¹⁹⁸ **Eugenika** (z řeckého eu = dobrý, génos = zrod, rod, plemeno) je sociálně-filosofický směr zaměřený na studium metod, které povedou k dosažení co nejlepšího genetického fondu člověka. Pozitivní eugenikou se myslí snaha o rozšíření žádaných znaků v populaci. Negativní eugenikou je snaha o vymýcení z populace znaků nežádaných (rasismus, nacismus aj.).

Otcem matematické statistiky jako samostatné, moderní a aplikované vědní disciplíny byl biolog **R. A. Fisher**¹⁹⁹.

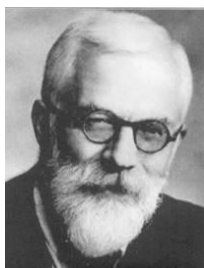
V současnosti se statistika stále rozvíjí a její metody se používají ve všech empirických vědách při získávání nebo interpretaci dat. Rozvoj kvantové mechaniky není bez statistiky vůbec možný ☺.

Rozvoj teorie pravděpodobnosti probíhal od 17. století, zpočátku byl inspirován hlavně hazardními hrami.

V 18. století, **T. Bayes**²⁰⁰ přispěl k tomu, jak podmíněná pravděpodobnost nějakého jevu souvisí s opačnou podmíněnou pravděpodobností (tzv. **Bayesův teorém**).

Nejvýznamnějším a stále inspirativním klasikem teorie pravděpodobnosti je pak **Pierre-Simon Laplace**²⁰¹. V slavném díle o teorii pravděpodobnosti (*Théorie analytique des probabilités*) nejen že zpracoval poznání všech svých předchůdců, ale také je dalekosáhle rozpracoval a aplikoval na téměř všechny oblasti tehdejšího vědeckého poznání (od fyziky až po sociální vědy).

¹⁹⁹ **Ronald Aylmer Fisher** (1890–1962) byl anglický statistik, biolog, eugenik a genetik. Podle mnohých patří mezi největší vědce 20. století, protože téměř sám vytvořil základy moderní statistiky. Známy je také biologický **Fisherův princip**, který vysvětluje, proč je u většiny pohlavně rozmnožujících se druhů poměr pohlaví mezi samci a samicemi $\approx 1:1$. V lidské populaci asi nikdy nebyl poměr pohlaví 1:1. Narodilo se vždy o něco víc mužů (poměr se pohybuje okolo 105:100). Zřejmě je to tím, že muži mají větší šanci zemřít (od pravěku riskují při lovu potravy, válkách a podobně) a že celkově se dožívají nižšího věku. I přesto, že se obecně rodí víc mužů než žen, je v mnoha zemích napříč všemi věkovými kategoriemi víc žen. Zvláště markantní je to v Indii a Číně, kde to bylo spojené se státní politikou jednoho dítěte. Je tedy zřejmé, že do poměru mezi pohlavími vstupují také socio-ekonomické aspekty.



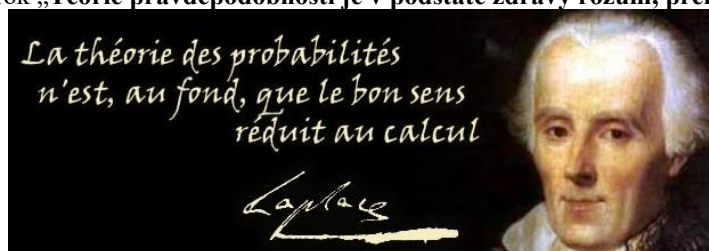
(zdroj fotografie internet)

²⁰⁰ **Thomas Bayes** (170–1761) byl anglický presbyteriánský duchovní a matematik.



(zdroj obrázku internet)

²⁰¹ **Pierre Simon Marquis de Laplace** (1749–1827) byl francouzský matematik, fyzik, astronom a politik. Mimo jiné, je známý jeho výrok „Teorie pravděpodobnosti je v podstatě zdravý rozum, přeměněný na kalkulus“.



(zdroj obrázku internet)

Z dalších velikánů moderní teorie pravděpodobnosti je vhodné uvést jména **A.N. Kolmogorov**²⁰², jehož práce vedly k stochastickému kalkulu a později až ke stochastickým diferenciálním rovnicím.

Na práce Kolmogorova navázal a jeho axiomy pravděpodobnosti rozvinul **A. Rényi**²⁰³, který se zabýval pojmem **podmíněné pravděpodobnosti**²⁰⁴.

Teorii pravděpodobnost dále prohloubili a axiomaticky ujasnili **E.T. Jaynes**²⁰⁵ a **R.T. Cox**²⁰⁶.

Ve 20. století došlo k rozsáhlé „pravděpodobnostní revoluci“ ve všech oblastech vědy, což je způsobeno také masivním využitím počítačů.

Důležité je také připomenout stochastickou mechaniku/biomechaniku, **pravděpodobnostní posudek spolehlivosti**, které často využívají simulační techniky **metody Monte Carlo**²⁰⁷ (MC), viz Kapitola 28, a „plně“ pravděpodobnostní metodu

²⁰² **Andrej Nikolajevič Kolmogorov** (1903–1987) byl sovětský a ruský matematik, fyzik, zakladatel moderní teorie pravděpodobnosti a teorie složitosti algoritmů. Významné jsou **Kolmogorovy axiomy pravděpodobnosti** (nezápornost, normovanost a aditivita na součinu disjunktních množin) založené na teorii míry. Z nezápornosti a normovanosti pravděpodobnosti vyplývá známý fakt, že pravděpodobnost děje leží v intervalu $\{0; 1\}$.



(zdroj fotografie internet)

²⁰³ **Alfréd Rényi** (1921–1970) byl maďarský matematik židovského původu.

²⁰⁴ **Podmíněná pravděpodobnost jevu** se zabývá obecnými situacemi, kdy pravděpodobnost výskytu jevu A je svázaná s podmínkou, že se vyskytl jev B. Pokud se tato podmínka vypustí, pak se jedná o **nepodmíněnou pravděpodobnost** a řešení úlohy je jednodušší.

²⁰⁵ **Edwin Thompson Jaynes** (1922–1998) byl americký fyzik a metodolog, známý přínosem ve statistické fyzice, teorii pravděpodobnosti a spektroskopii. Jaynes interpretuje pravděpodobnost jako zobecněnou logiku.



(zdroj fotografie internet)

²⁰⁶ **Richard Threlkeld Cox** (1898–1991) byl americký fyzik a statistik. Známy je Coxův teorém patřící k základům teorie pravděpodobnosti.



(zdroj fotografie internet)

²⁰⁷ **Metoda Monte Carlo** je stochastická metoda používající pseudonáhodná čísla. Princip této metody je jednoduchý, počítají se veličiny, které jsou výsledkem náhodného děje. Vytvoří se počítačový model toho děje

Simulation-Based Reliability Assessment (SBRA) či jiné simulační techniky, viz např. [9] až [20].

V současnosti jsme mimo jiné také svědky přechodu od původních (původně „předpočítačových“) deterministických metod k novým („počítačovým“) částečně nebo plně pravděpodobnostním metodám posudků spolehlivosti inženýrských struktur, a ne jinak je tomu i v biomechanice, viz Kapitola 29 této knihy.

V této knize je jako hlavní nástroj posudku spolehlivosti použita pravděpodobnostní metoda SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment) založená na metodě MC (Monte Carlo). Autory této pravděpodobnostní metody jsou **Pavel Marek**²⁰⁸, viz také [21] [https://cs.wikipedia.org/wiki/Pavel_Marek_\(stavebn%C3%AD_in%C5%BEen%C3%BDr\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Pavel_Marek_(stavebn%C3%AD_in%C5%BEen%C3%BDr)), a jeho žák a spolupracovník **Milan Guštar**²⁰⁹, viz také Kapitola 29.

27.3 Definice pravděpodobnosti

Kapitola navazuje na poznatky z Kapitoly 27.1.

Existuje několik definic pravděpodobnosti.

Klasická definice pravděpodobnosti, která vychází z logické úvahy. Předpokládejme, že určitý jev může vykázat N_{celkem} různých disjunktních, tj. vzájemně se vylučujících (neslučitelných), možných výsledků. Jestliže počet N_{ω} z těchto výsledků má za následek nevyhnutelně realizaci určitých zkoumaných vlastností jevu ω (např. porucha stroje, počet lidí starších 70 let, kolikrát padla šestka při hodu kostkou atp.) a zbylých ($N_{celkem} - N_{\omega}$) výsledků ji vylučuje, potom pravděpodobnost jevu ω (tj. zápis P_{ω}) je dána vztahem:

$$P_{\omega} = \frac{N_{\omega}}{N_{celkem}}. \quad (27.1)$$

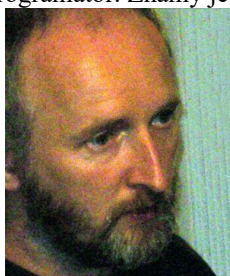
a po proběhnutí dostatečného množství simulací se mohou data zpracovat klasickými statistickými metodami, tj. stanovit průměr, medián, směrodatnou odchylku, maximum, minimum aj. Blíže Kapitola 28 v této knize.

²⁰⁸ **Pavel Marek** (1932–2015) byl český stavební inženýr a konstruktér, který se zasloužil o rozvoj a aplikaci pravděpodobnostního posudku spolehlivosti konstrukcí ve spojitosti s metodou SBRA po celém světě. Svým entuziasmem a nezištnou spoluprací výrazně ovlivnil také autora této kapitoly.



(zdroj fotografie internet)

²⁰⁹ **Milan Guštar** (nar. 1963) je český organolog, skladatel, konstruktér elektronických, elektroakustických, multimediálních a interaktivních systémů a programátor. Známý je také ve spojitosti s metodou SBRA.



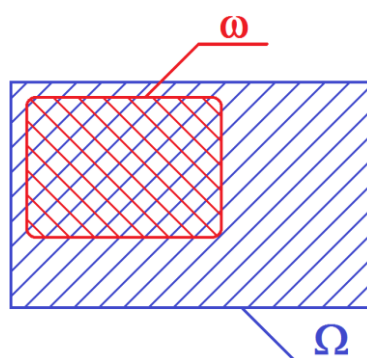
(zdroj fotografie internet)

Vztah (27.1) je absolutně přesný pouze pokud jsou známy konečné počty četností N_{celkem} a N_{ω} . Vztah (27.1) není tedy úplnou definicí pravděpodobnosti.

Geometrická definice pravděpodobnosti, která vychází z možnosti nahradit pojem „počet“ v klasické definici pomocí vhodně zvolené míry (např. délka, plocha, objem, počet obyvatel atp.). Mějme množinu Ω (jevové pole, množinu všech možných jevů), která popisuje celkovou míru realizací jevu a její podmnožinu ω , která značí míru realizace zkoumaných vlastností jevu, viz Obr. 27.6. Potom pravděpodobnost náhodné volby bodu z podmnožiny ω je dána vztahem:

$$P_{\omega} = \frac{|\omega|}{|\Omega|}, \quad (27.2)$$

kde $|\Omega|$ a $|\omega|$ jsou vhodně zvolené míry uvedených množin. Ani definice (27.2) není úplnou definicí pojmu pravděpodobnosti.



Obr. 27.6 K odvození geometrické definice pravděpodobnosti.

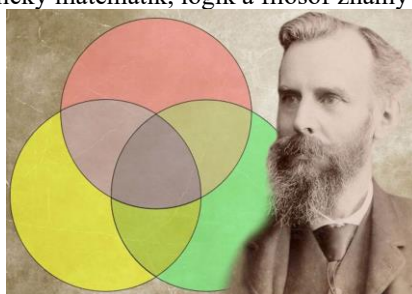
V dalším textu se zdá být praktické a ilustrativní využít při vysvětlení míry $|\Omega|$ a $|\omega|$, tzv. **Vennovy**²¹⁰ diagramy, viz Obr. 27.6 a další obrázky v této kapitole.

Statistická definice pravděpodobnosti sledovaného jevu je také možno definovat jako limitu relativních četností při rostoucím počtu pokusů:

$$P_{\omega} = P_f = \lim_{N_{celkem} \rightarrow \infty} \left(\frac{N_f}{N_{celkem}} \right), \quad (27.3)$$

přičemž ani tato definice není úplnou definicí pravděpodobnosti. Problematické se ve vztahu (27.3) jeví realizovat $N_{celkem} \rightarrow \infty$ simulací ☺. Nicméně, tento vztah je velmi důležitý pro numerickou realizaci náhodných jevů na počítačích, což ještě bude vysvětleno v dalším textu.

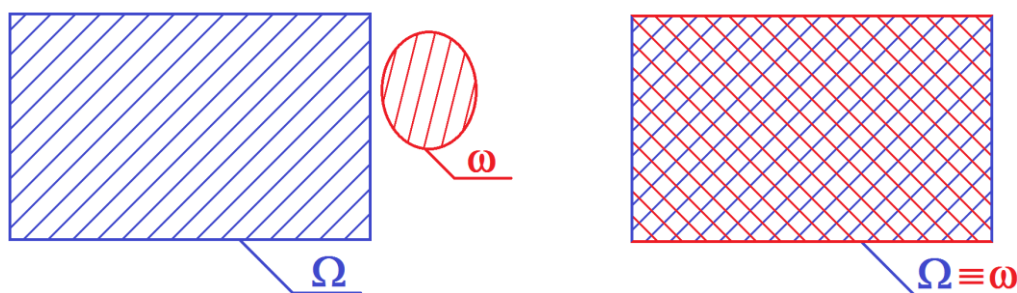
²¹⁰ **John Venn** (1834–1923) byl anglický matematik, logik a filosof známý svými diagramy.



(zdroj obrázku internet)

Výše uvedené definice pravděpodobnosti vznikly z potřeby vymezit a interpretovat tento pojem. V mnoha aplikacích jsou dostačující.

Ve 20. a 30. letech minulého století byl s použitím teorie množin a teorie míry vybudován prvotní **axiomatický systém teorie pravděpodobnosti**, který definoval ruský matematik **A. N. Kolmogorov**, viz poznámka pod čarou v předchozí kapitole. Dle Kolmogorova (axiomy nezápornosti a normovatelnosti) je pravděpodobnost matematické zobrazení, které jevu f přiřadí hodnotu pravděpodobnosti tohoto jevu $P_f \in \langle 0; 1 \rangle$, kde $P_f = 0$ znamená, že jev vůbec nenastal (nemožný jev), viz Obr. 27.7(a), a $P_f = 1$ znamená, že jev určitě nastal (jistý jev), viz Obr. 27.7(b).

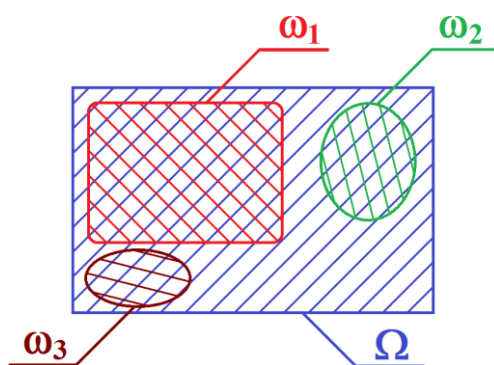


Obr. 27.7 (a) nemožný jev ω (b) jistý jev ω .

Dle Kolmogorova, **pravděpodobnost je objektivní vlastnost náhodného jevu, která nezávisí na tom, zda ji umíme nebo neumíme měřit.**

Dle Kolmogorova axiomu aditivity na systému disjunktních množin jevů platí, že pravděpodobnost sjednocení vzájemně se vylučujících jevů i (tj. když průnik těchto jevů je nemožný jev, viz Obr. 27.8) je rovna součtu jejich pravděpodobností

$$P_{\sum_i f_i} = \sum_i P_{f_i} = \sum_i P_{\omega_i} = \sum_i \frac{|\omega_i|}{|\Omega|} = \frac{\sum_i |\omega_i|}{|\Omega|}. \quad (27.4)$$



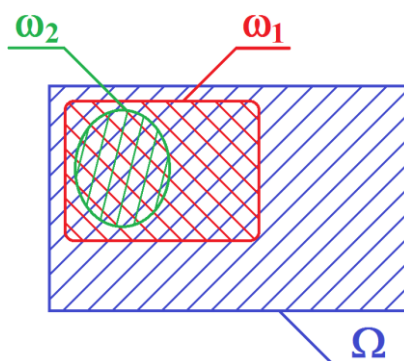
Obr. 27.8 K odvození Kolmogorova axiomu aditivity na systému 3 disjunktních množin jevů ω_i .

Je také zřejmé, že součet pravděpodobností všech možných vzájemně nezávislých jevů f_i je roven 1, tedy

$$P_{\Omega} = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1, \quad (27.5)$$

viz také Obr. 27.7(b).

Z uvedeného je zřejmé, že pokud jev f_2 je podmnožinou jevu f_1 , viz Obr. 27.9, potom pro příslušné pravděpodobnosti platí $0 \leq P_{f_2} \leq P_{f_1} \leq 1$.

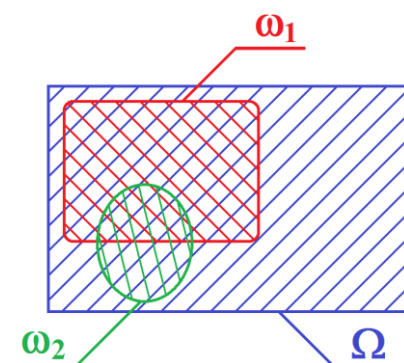


Obr. 27.9 Jev ω_2 je podmnožinou jevů ω_1 .

Důležité je také vysvětlit podmíněnou pravděpodobnost. **Podmíněná pravděpodobnost**, tj. pravděpodobnost jevu f_1 za předpokladu, že se vyskytl jev f_2 , viz Obr. 27.10, která se značí jako $P_{f_1|f_2}$ je daná vztahem

$$P_{f_1|f_2} = \frac{P_{f_1 \cap f_2}}{P_{f_2}} = \frac{|\omega_1 \cap \omega_2|}{|\omega_2|}, \quad (27.6)$$

kde symbol „ $\cap$ “ značí průnik.



Obr. 27.10 K odvození podmíněné pravděpodobnosti.

Na závěr této kapitoly je třeba ještě definovat **nezávislý jev**, tj. jev f_1 nezávisí na jevu f_2 pokud $P_{f_1|f_2} = P_{f_1}$. Podle vztahu (27.6), pak platí pro nezávislé jevy

$$P_{f_1 \cap f_2} = P_{f_1} P_{f_2}, \text{ kde jev } f_1 \text{ je nezávislý na jevu } f_2. \quad (27.7)$$

Další axiomy podmíněné pravděpodobnosti či úplné pravděpodobnosti, Bayesův vzorec aj. již zde nejsou uvedeny.

V důsledku shora uvedených definic (27.1) až (27.7) je zřejmé, že při rostoucím počtu pozorování (experimentů, simulací) v obecném případě platí:

$$P_f \approx \frac{N_f}{N_{celkem}} \approx \frac{|\omega_f|}{|\Omega|}, \quad (27.8)$$

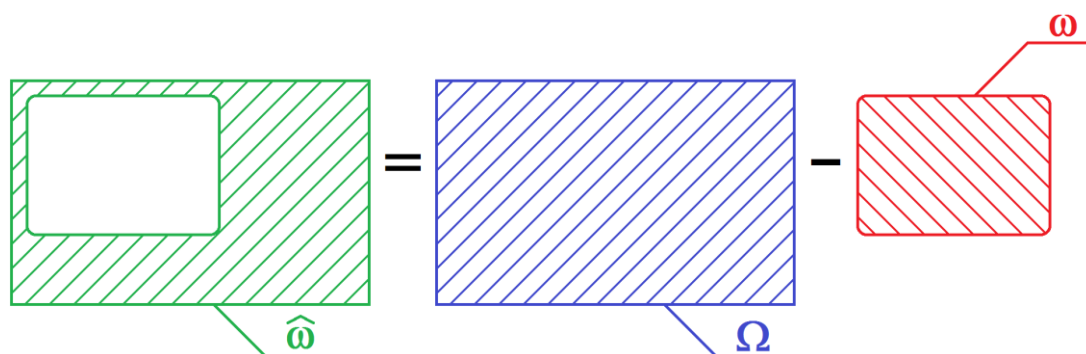
přičemž je zřejmé, že s rostoucím počtem pozorování klesá chyba stanovení P_f . To je významná skutečnost, která je plně využita počítači a samozřejmě také při řešení úloh metodami MC a SBRA na které se tato kniha zaměřuje.

Ve zvláštním případě může být vztah (27.8) zcela přesný, tj.

$$P_f = \frac{N_f}{N_{celkem}} = \frac{|\omega|}{|\Omega|}, \text{ pokud je počet realizací } N_{celkem} \text{ a } N_f \text{ konečný a uzavřený.} \quad (27.9)$$

Pravděpodobnost opačného jevu $\hat{f}$, resp. $\hat{\omega}$, viz Obr. 27.11, tj. $P_{\hat{f}}$, resp. $P_{\hat{\omega}}$, je doplněk pravděpodobnosti výchozího jevu f do jedné, tzn.

$$P_{\hat{f}} = P_{\hat{\omega}} = 1 - P_f = 1 - \frac{|\omega|}{|\Omega|} = \frac{|\hat{\omega}|}{|\Omega|}. \quad (27.10)$$



Obr. 27.11 K pravděpodobnosti opačného jevu.

Více informací o teorii pravděpodobnosti, o jejich axiomech atp., lze nalézt v mnoha učebnicích např. [4] až [17] či na internetu.

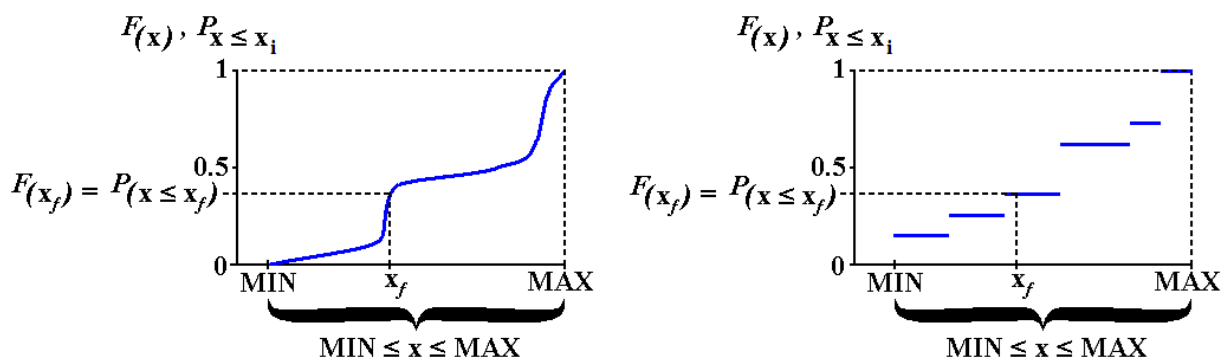
27.4 Pojem náhodné veličiny a distribuční funkce

Náhodná veličina (náhodná proměnná) x je jedním z nejdůležitějších pojmů teorie pravděpodobnosti a statistiky. Náhodná veličina je omezená intervalem ($\text{MIN} \leq x \leq \text{MAX}$), přičemž její minimum či maximum v obecném případě může růst nade všechny meze. Existují náhodné veličiny **nespojité (diskrétní)**, které mají konečný počet hodnot (např. čísla 1, 2 až 6 při hodu kostkou), a náhodné veličiny **spojité**, které mají nekonečný počet hodnot (tj. všechna čísla z definovaného spojitého konečného nebo nekonečného intervalu). Náhodné veličiny mohou být děleny také na **jednorozměrné** nebo **vícerozměrné**. Náhodná veličina je daná svým rozdělením (rozložením) pravděpodobnosti, distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti. **Rozdělení pravděpodobnosti** je definováno množinou všech výsledků, ve které může

sledovaný jev vyústit, a množinou všech pravděpodobností, se kterými odpovídající situace nastanou.

Pravděpodobnostní chování náhodných veličin lze popsat mnoha způsoby. k ucelenému popisu všech typů náhodných veličin je možno použít distribuční funkce, které patří pro svou názornost mezi nejobvyklejší. **Distribuční funkce** $F(x)$, pro jejíž hodnoty platí: $0 \leq F(x) \leq 1$, viz Obr. 27.12, kde body x_f a $(MIN \leq x_i \leq MAX)$ jsou konkrétní a obecná realizace (hodnoty) náhodně proměnné x . Pak platí

$$F(x_f) = P_{x \leq x_f}, \text{ resp. } F(x_i) = P_{x \leq x_i} \quad (27.11)$$



Obr. 27.12 Distribuční funkce (a) spojitá náhodná proměnná x , (b) diskrétní náhodná proměnná x .

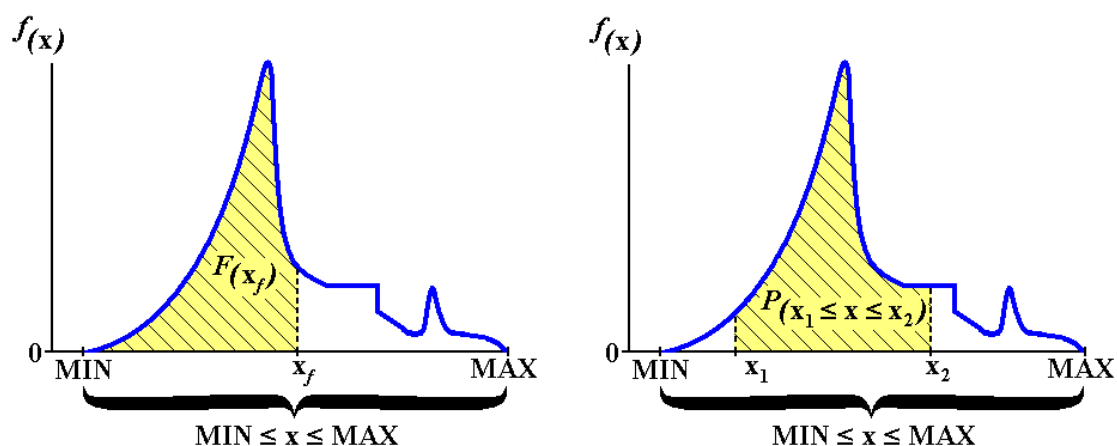
Z Obr. 27.12 je také zřejmé, že **distribuční funkce je funkcí neklesající** (tj. $F(x) \geq 0$) a také $\frac{dF(x)}{dx} \geq 0$. Distribuční funkce tedy udává pravděpodobnost, s jakou náhodná veličina x nepřekročí zadanou (zkoumanou) hodnotu x_f . Pro případy vícerozměrných náhodných veličin je zaveden pojem **sdružená distribuční funkce**.

27.5 Hustota pravděpodobnosti a pravděpodobnostní funkce

Náhodná veličina x je definovaná také **hustotou pravděpodobnosti** $f(x)$, která je (na rozdíl od distribuční funkce) **definovaná jen pro spojitě rozložení náhodné veličiny**. Distribuční funkci lze definovat také pomocí hustoty pravděpodobnosti vztahem:

$$F(x_f) = \int_{-\infty}^{x_f} f(x) dx, \text{ resp. } F(x_f) = \int_{MIN}^{x_f} f(x) dx \quad (27.12)$$

viz Obr. 27.13.



Obr. 27.13 Vztah mezi hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ a distribuční funkcí $F(x_f)$.

Pro hustotu pravděpodobnosti platí $f(x) \geq 0$. Hustota pravděpodobnosti také splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\text{MAX}} f(x) dx = F_{(x=\text{MAX})} = P_{(x \leq \text{MAX})} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} f(x) dx = 1. \quad (27.13)$$

Pravděpodobnost, že náhodná veličina x nabude hodnoty z blíže zkoumaného intervalu $x_1 \leq x \leq x_2$, viz Obr. 27.13(b), je daná relací

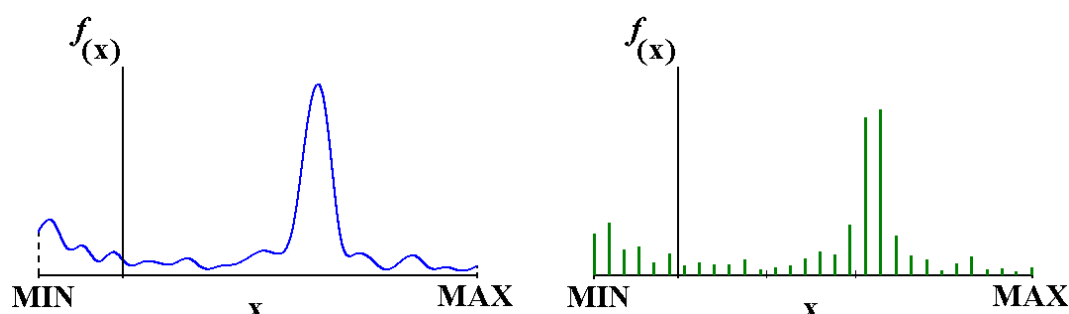
$$P_{(x_1 \leq x \leq x_2)} = \int_{-\infty}^{x_2} f(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} f(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = F_{(x_2)} - F_{(x_1)}. \quad (27.14)$$

Pokud má náhodná veličina x spojitou distribuční funkci $F(x)$, pak ve všech bodech, kde existuje derivace distribuční funkce, platí

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \quad (27.15)$$

Pro **diskrétní rozdělení lze hodnoty distribuční funkce $F(x)$ určit z pravděpodobnostní funkce $f(x)$** , (která je analogií k hustotě pravděpodobnosti pro spojitě rozdělení, viz rovnice (27.12) a Obr. 27.14). Pak platí

$$F(x_f) = \sum_{\text{MIN}}^{x_f} f(x) dx. \quad (27.16)$$



Obr. 27.14 (a) hustota pravděpodobnosti, (b) pravděpodobnostní funkce.

Náhodnou veličinu s diskretním rozdělením lze tedy definovat konečným výčtem hodnot x_i s příslušnými pravděpodobnostmi s jakými jednotlivé hodnoty nabývá.

Pro případy vícerozměrných náhodných veličin je zaveden pojem **sdužená hustota pravděpodobnosti**, respektive **sdužená pravděpodobnostní funkce**.

27.6 Kvantilová funkce a kvantil

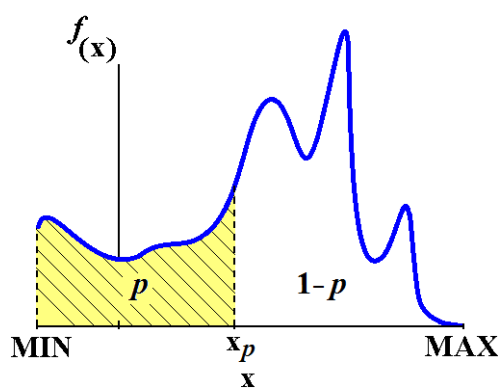
kvantilová funkce, zvaná také **inverzní distribuční funkce Q** , která je za předpokladu, že distribuční funkce $F_{(x)}$ je rostoucí, definovaná vztahem

$$Q_{(p)} = F_{(x)}^{-1}, \quad (27.17)$$

kde $F_{(x)}^{-1}$ je inverze distribuční funkce $F_{(x)}$. Kvantilová funkce je další významnou formou reprezentace náhodných veličin.

Důležité je vysvětlit praktický a často používaný pojem kvantil. **Kvantil**²¹¹ je hodnota, která dělí soubor seřazených hodnot na několik stejně velkých částí. Kvantil je tedy určitou mírou polohy rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny. Nebo lze také říci, že kvantil popisuje bod, ve kterém distribuční funkce náhodné proměnné prochází danou hodnotou.

Některé kvantily mají i své jméno ☺, viz Tab. 27.1 a Obr. 27.15 a 27.16.

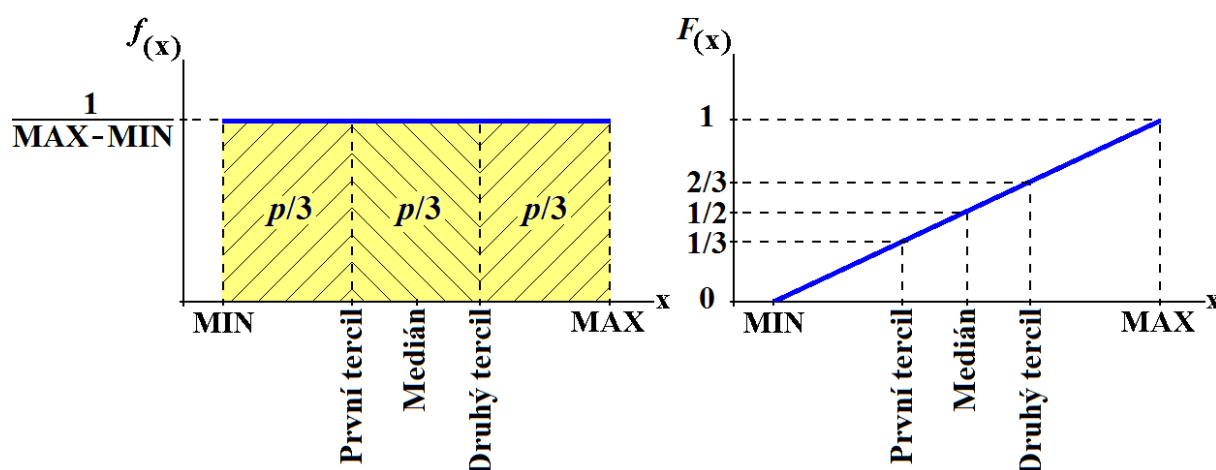


Obr. 27.15 Definice p -kvantilu.

²¹¹ z latinského **quantilis**, jak malý/velký?

Tab. 27.1 Názvosloví a definice kvantilů.

Název Kvantilu	Definice
P-kvantil	P-kvantil dělí plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) v poměru $\frac{p}{1-p}$, viz Obr. 27.15.
Medián	Medián dělí plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 2 stejně početné množiny (tj. v poměru $\frac{0.5}{1-0.5} = 1$, viz Obr. 27.16.
Tercil	2 tercily rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 3 stejně početné množiny, viz Obr. 27.16.
Kvartil	3 kvartily rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 4 stejně početné množiny.
Kvintil	4 kvintily rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 5 stejně početných množin.
Sextil	5 sextilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 6 stejně početných množin.
Septil	6 septilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 7 stejně početných množin.
Oktil	7 oktilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 8 stejně početných množin.
Decil	9 decilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 10 stejně početných množin.
Dodecil	11 dodecilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 12 stejně početných množin.
Hexadecil	15 hexadecilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 16 stejně početných množin.
Percentil	99 percentilů rozdělují plochu pod grafem hustoty pravděpodobnosti (nebo seřazený statistický soubor) na 100 stejně početných množin.
Nultý kvantil	Minimum - nejmenší hodnota statického souboru.



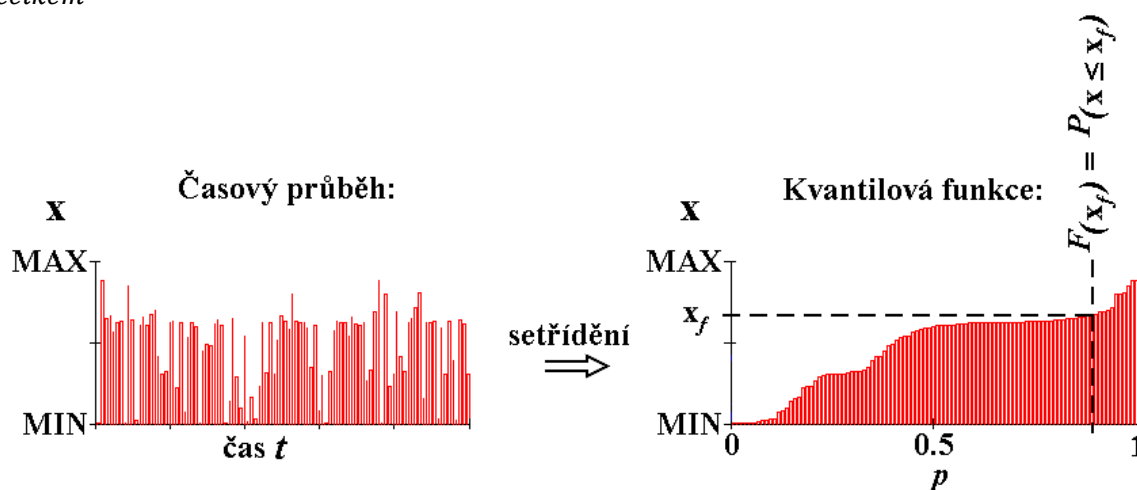
Obr. 27.16 Rovnoměrné rozdělení pravděpodobnosti a definice tercílů a mediánu.

Pomocí kvantilové funkce $Q(p)$ lze pro danou pravděpodobnost p najít odpovídající hodnotu p -kvantilu. Inverzní funkci $F_{(x)}^{-1}$ lze vytvořit pouze ke spojitě, rostoucí distribuční funkci, tedy pouze pro spojitá rozdělení. V případě diskretních a smíšených rozdělení existují intervaly, na kterých je distribuční funkce konstantní, a proto inverzní funkce $F_{(x)}^{-1}$ neexistuje. Pro tyto případy je vhodné definici kvantilové funkce zobecnit

$$Q(p) = \inf\{x | F_{(x)}^{-1} \geq p\}, \quad (27.18)$$

pak je pro dané p hodnota x na intervalech, kde je funkce $F_{(x)}$ rostoucí, rovna funkční hodnotě $F_{(x)}^{-1}$ a na intervalech, kde je $F_{(x)}$ konstantní, je hodnota x určena největší dolní zavorou. Takto je funkce $Q(p)$ zleva spojitá na celém definičním oboru $p \in (0; 1)$. Určení $Q(p)$ je dnes, při použití vhodných počítačových programů, „elementární“ úloha a v dalším textu již nebude blíže vysvětlována.

Empirické kvantilové funkce (tzv. **Queteletovy funkce**) lze získat ze vzorků N_{celkem} dat vzestupným seřazením jejich hodnot ($x_1 = \text{MIN} \leq x_i \leq x_{N_{celkem}} = \text{MAX}$), a vytvořením „schodovité“ funkce se svislými segmenty s délkami x_i a vodorovnými segmenty s délkami $\frac{1}{N_{celkem}}$, viz Obr. 27.17.

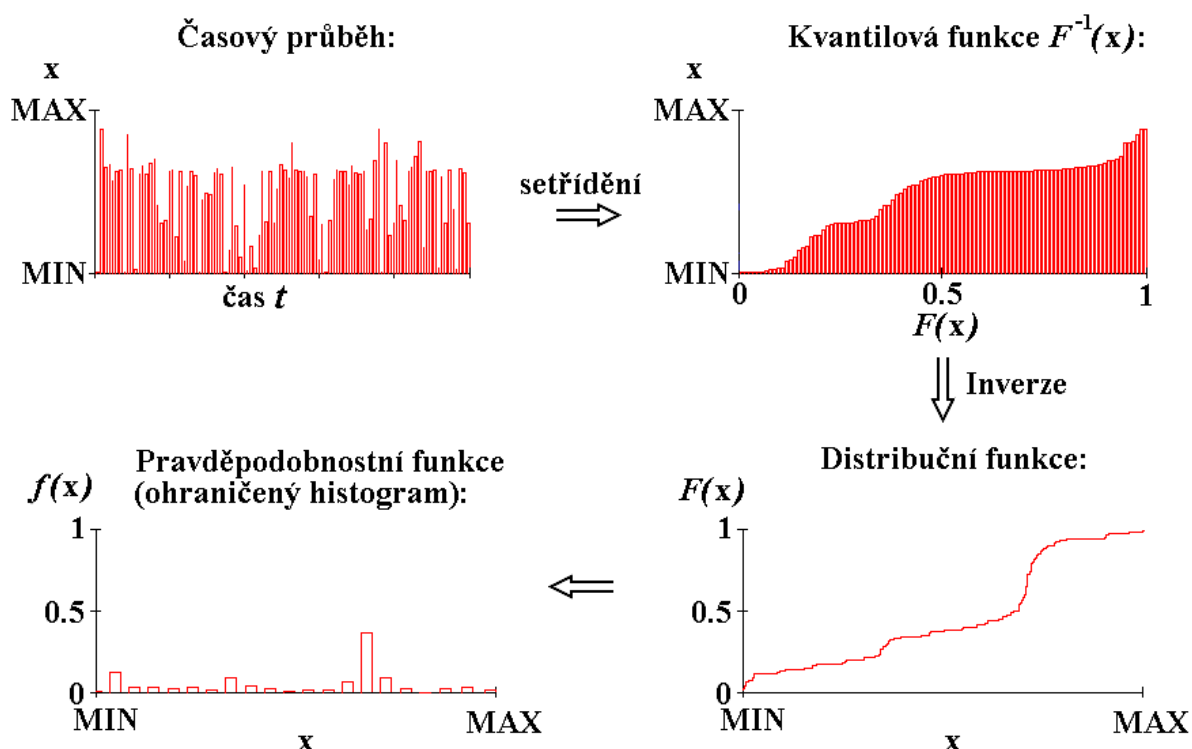


Obr. 27.17 Stanovení empirické kvantilové funkce.

27.7 Ohraničené histogramy

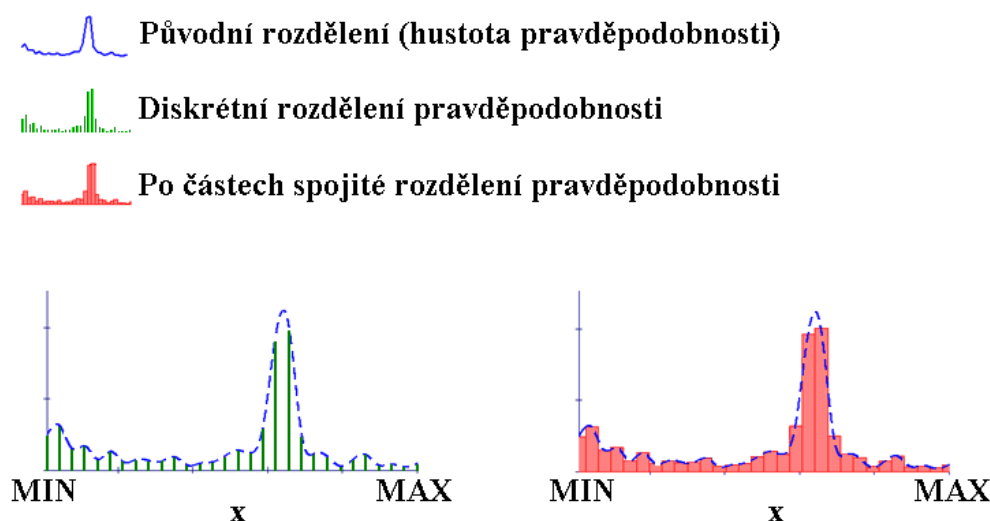
Mezi teoretickými rozděleními jsou rozdělení mající alespoň jednu mez definičního intervalu rovnou $-\infty$ nebo ∞ , tj. $x \in (-\infty; \infty)$, velmi častá. Naproti tomu, většina „reálných“ prakticky používaných veličin nabývá pouze hodnot z omezeného reálného intervalu $x \in (\text{MIN}, \text{MAX})$. Například, technické veličiny jako délka, hmotnost aj. nemohou nabývat záporných hodnot nebo růst nade všechny meze, i když často bývají popsány normálním rozdělením definovaným na nekonečném intervalu $-\infty \leq x \leq \infty$. Dalším podstatným důvodem k omezení definičního intervalu náhodných veličin může být požadavek generování náhodných veličin pomocí počítače. V takových případech bývá generované rozdělení aproximací rozdělení požadovaného, a to jak z důvodu omezené přesnosti reprezentace čísel, tak i z důvodu jejich omezeného rozsahu.

Na základě pozorování, měření nebo pokusů, lze vytvořit histogramy (sloupcové grafy četností) různých náhodně proměnných veličin. Z výsledků měření většinou vyplývá, že tyto náhodné veličiny se často výrazně liší od známých teoreticky stanovených neomezených rozdělení pravděpodobnosti (téměř vždy nabývají konečných hodnot – diskrétní rozdělení). Z tohoto důvodu jsou často zavedeny tzv. **ohraničené histogramy**, které zpravidla lépe aproximují reálné náhodné veličiny. **Histogram nebo také histogram četností je tedy zjednodušenou a přibližnou, ale použitelnou grafickou reprezentací hustoty pravděpodobnosti, respektive pravděpodobnostní funkce $f(x)$.** Histogram je tedy sloupcový graf tvořený nepřekrývajícími se obdélníky různé výšky, jejichž celková plocha je rovna jedné. Šířka jednotlivých obdélníků může být různá, ale nejčastěji jsou používány histogramy se shodnou šířkou všech obdélníků, viz Obr. 27.18.



Obr. 27.18 Transformace časového průběhu zatížení na histogram zatížení.

Programy použité v metodě Monte Carlo, metodě SBRA aj. (např. sw Anthill), pracují se dvěma typy ohraničených histogramů, a to s **histogramy reprezentujícími diskrétní rozdělení pravděpodobnosti** a s **histogramy reprezentujícími po částech spojitě rozdělení pravděpodobnosti**, viz Obr. 27.19.



Obr. 27.19 Diskrétní ohraničené histogramy a po částech spojitě ohraničené histogramy.

27.8 Charakteristiky náhodných veličin

Pro popis hlavních vlastností náhodných veličin bylo zavedeno mnoho číselných charakteristik a některé z nich jsou již uvedeny v Kapitole 27.6. V následujícím textu jsou uvedeny jen ty nejdůležitější.

Aritmetický průměr $\bar{x}$ (mean) je nejčastěji používaný statistický pojem střední hodnoty. Pro aritmetický průměr je charakteristické, že jedna hodnota, která se velice výrazně odlišuje od ostatních, může velmi ovlivnit hodnotu aritmetického průměru tak, že vyjadřuje zcela iluzorní údaje. Aritmetický průměr je pro N_{celkem} dat s hodnotami x_i , kde $i = 1, 2, \dots, N_{celkem}$, definován vztahem

$$\bar{x} = \frac{1}{N_{celkem}} \sum_{i=1}^{N_{celkem}} x_i. \quad (27.19)$$

V případech, kdy je známá hustota pravděpodobnosti $f(x)$, je možno aritmetický průměr definovat také integrálem $\bar{x} = \frac{\int_{MIN}^{MAX} x f(x) dx}{\int_{MIN}^{MAX} f(x) dx}$, avšak $\int_{MIN}^{MAX} f(x) dx = 1$, viz rovnice (27.13).

Potom platí

$$\bar{x} = \int_{MIN}^{MAX} x f(x) dx. \quad (27.20)$$

V mechanice či biomechanice si lze aritmetický průměr představit například jako polohu těžiště soustavy rovnoběžných sil, resp. jako polohu těžiště spojitěho zatížení či polohu těžiště člověka atp.

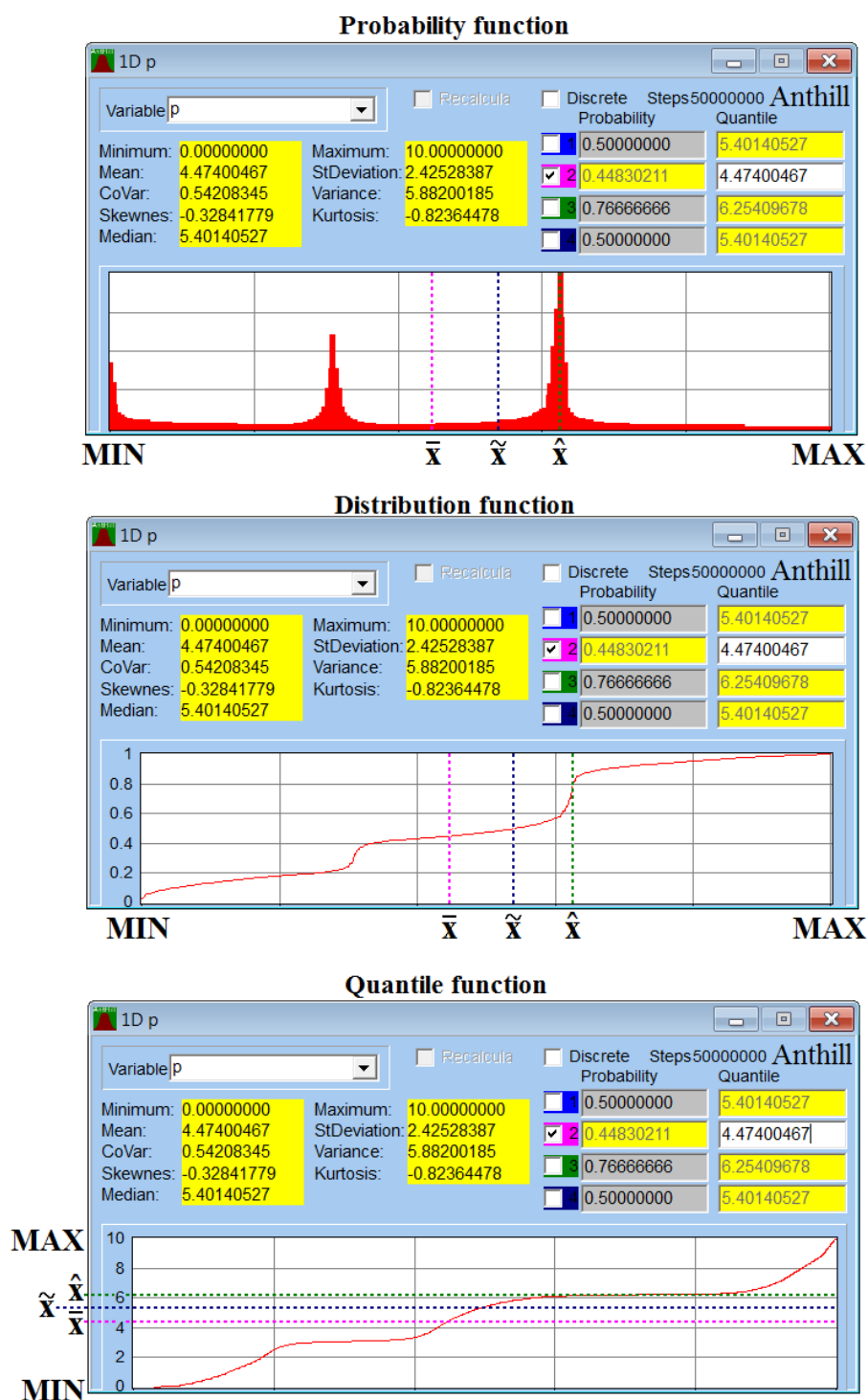
Medián $\tilde{x}$ je také střední hodnota, jež dělí plochu histogramu na dvě stejné poloviny. Platí, že nejméně 50 % hodnot je menších nebo rovných a nejméně 50 % hodnot je větších nebo rovných mediánu. Medián není tak výrazně ovlivněn extrémními hodnotami na rozdíl od aritmetického průměru. Medián je také odhad střední hodnoty, který minimalizuje absolutní

chybu. Medián je číslo, které splňuje nerovnosti $P_{(x \leq \tilde{x})} \geq 0.5$ a zároveň $P_{(\tilde{x} \leq x)} \geq 0.5$. V případě spojité reálné jednorozměrné náhodné veličiny s hustotou pravděpodobnosti $f_{(x)}$ splňuje medián vztah

$$\int_{\text{MIN}}^{\tilde{x}} f_{(x)} dx = 0.5, \quad \int_{\tilde{x}}^{\text{MAX}} f_{(x)} dx = 0.5. \quad (27.21)$$

Modus $\hat{x}$ (mode) náhodné veličiny je hodnota, která se v daném statistickém souboru vyskytuje nejčastěji (hodnota s největší relativní četností, tj. extrémní hodnota hustoty pravděpodobnosti). Modus nemusí být vždy určen jednoznačně (tzn., že se stejnou nejvyšší četností se může vyskytovat více hodnot).

Porovnání veličin $\bar{x}$, $\tilde{x}$ a $\hat{x}$ je vidět na Obr. 27.20 (Anthill software, viz Kapitoly 29.4 a 29.6).



Obr. 27.20 Aritmetický průměr $\bar{x} = 4.47400467$, medián $\tilde{x} = 5.40140527$ a modus $\hat{x} = 6.25409678$ pro náhodnou veličinu $x \in \langle 0; 10 \rangle$ vygenerovanou v sw Anthill s dopsanými vysvětlivkami (a) pravděpodobnostní funkce $f_{(x)}$, (b) distribuční funkce $F_{(x)}$, (c) kvantilová funkce $Q_{(p)}$.

Geometrický průměr x_{geom} (geometric mean), se používá pro nezáporné hodnoty statistického souboru (tj. $x_i > 0$) a je definován odmocninou ze součinu

$$x_{geom} = \sqrt[N_{celkem}]{x_1 x_2 \dots x_{N_{celkem}}} = \left(\prod_{i=1}^{N_{celkem}} x_i \right)^{\frac{1}{N_{celkem}}} . \quad (27.22)$$

Geometrický průměr se používá jako indikátor růstu (příruskové či růstové veličiny) např. u růstu cen v ekonomice, přírůstku hmotnosti zvířat aj.

Harmonický průměr x_{harm} (harmonic mean) je převrácená hodnota aritmetického průměru převrácených hodnot průměrovaných čísel a je definován vztahem

$$x_{harm} = \frac{N_{celkem}}{\sum_{i=1}^{N_{celkem}} \frac{1}{x_i}}. \quad (27.23)$$

Používá se, nejčastěji tam kde se pracuje s převrácenými hodnotami, například při výpočtu průměrné rychlosti na úsecích stejné délky, při výpočtu průměrné rychlosti výroby výrobku na různě výkonných strojích atp. Používá se také, když jsou hodnoty extrémně nízké či vysoké.

Kvadratický průměr x_{kvad} (root mean square) je druhou odmocninou aritmetického průměru druhých mocnin hodnot statistického souboru, tj.

$$x_{kvad} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N_{celkem}} x_i^2}{N_{celkem}}}. \quad (27.24)$$

Umocnění hodnot na druhou má za následek vždy větší váhu hodnot vzdálenějších od nuly. Kvadratický průměr se používá při výpočtu střední kvadratické rychlosti molekul plynu, při výpočtu efektivních hodnot elektromagnetických veličin aj. V 1. dílu této knihy, viz [1], je také použitý v dendrometrii při vyhodnocování průřezu kmene v Kapitole 17.5.

Rozptyl D (též střední kvadratická odchylka, střední kvadratická fluktuace, variance nebo také disperze) vyjadřuje variabilitu rozdělení souboru náhodných hodnot kolem její střední hodnoty. Rozptyl je pro diskretní náhodnou veličinu definován vztahem

$$D = \sum_{i=1}^{N_{celkem}} [(x_i - \bar{x})^2 p_i] = \frac{\sum_{i=1}^{N_{celkem}} (x_i - \bar{x})^2}{N_{celkem}}. \quad (27.25)$$

Rozptyl je pro spojitou náhodnou veličinu definován vztahem

$$D = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} (x - \bar{x})^2 f(x) dx = \int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} x^2 f(x) dx - \bar{x}^2. \quad (27.26)$$

Směrodatná odchylka $\bar{\sigma}$ (standard deviation) je kladná hodnota odmocniny rozptylu

$$\bar{\sigma} = \sqrt{D}. \quad (27.27)$$

Směrodatná odchylka popisuje, nakolik se od sebe navzájem liší jednotlivé prvky v celém souboru statistického záznamu. Velká hodnota směrodatné odchylky signalizuje velké vzájemné odlišnosti prvků v souboru. Malá hodnota směrodatné odchylky značí, že prvky souboru jsou si většinou podobné.

Variační koeficient $\overline{x_{\sigma}}$ je poměr směrodatné odchylky a aritmetického průměru

$$\overline{x_{\sigma}} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{x}} = \frac{\sqrt{D}}{\bar{x}}. \quad (27.28)$$

Variační koeficient vypovídá o relativním významu směrodatné odchylky od aritmetického průměru, tj. kolik procent aritmetického průměru představuje směrodatná odchylka. Tento ukazatel je nejvhodnější pro porovnání variability ukazatelů a souborů jednotek různých úrovní, protože jde o bezrozměrnou veličinu.

Výběrový rozptyl D_v (sample variance) pro diskretní náhodnou veličinu je dán vztahem

$$D_v = \frac{N_{celkem}}{N_{celkem} - 1} D = \frac{\sum_{i=1}^{N_{celkem}} (x_i - \bar{x})^2}{N_{celkem} - 1}. \quad (27.29)$$

Výběrová směrodatná odchylka $\overline{\sigma}_v$ (sample standard deviation) pro diskrétní náhodnou veličinu je dán vztahem

$$\overline{\sigma}_v = \sqrt{D_v}. \quad (27.30)$$

Je vhodné upozornit čtenáře této knihy, že veličiny D , D_v a $\overline{\sigma}$, $\overline{\sigma}_v$ mnohým uživatelům splývají a občas dochází k záměně názvů i ve vědeckých pracích ☺.

Dalšími charakteristikami jsou také **vážený průměr, vážený rozptyl, šikmost, špičatost, variance, korelace, krabicové grafy, odhady, kritéria rozhodování, rozdělení pravděpodobnosti** a mnoho dalších, viz reference [10] až [17] a [20] aj., které již nejsou v této knize uvedeny.

Všechny výše uvedené vztahy je možné rozšířit také na více proměnných, tj. např. vícerozměrná hustota pravděpodobnosti atd., což však již není v této knize vysvětleno a pro hlubší studium je vhodné použít výše zmíněné učebnice.

Další navazující kapitoly o statistice a pravděpodobnosti jsou plánované do dalších dílů této knihy ☺.

27.9 Příklady

Příklad 27.1: Házení jednou ideální hrací kostkou. Na výsledcích hoď kostkou definujte možné a nemožné jevy.

Dáno: Hrací kostka, viz Obr. 27.21.



Obr. 27.21 Hrací kostka.

Každému hráči je zřejmé, že při hoď kostkou může padnout jen číslo od 1 do 6, tj. množina všech možných jevů $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Příkladem možných jevů je množina Ω a její podmnožiny např. při hoď padne pouze číslo 1, tj. $\omega = \{1\}$, nebo sudá čísla, tj. $\omega = \{2, 4, 6\}$, atp.

Příkladem nemožného jevu je např. číslo 0 nebo 7, ale také např. čísla 1.5, -1 , $-\infty$ nebo čísla komplexní. Dalším příkladem nemožného jevu je, že padnou dvě nebo více čísel zároveň.

Příklad 27.2: Házení jednou ideální hrací kostkou. Stanovte, jaká je pravděpodobnost, že v jednom hodu padne jedno ze zvolených čísel 1 až 6. Stanovte také, jaká je pravděpodobnost, že na kostce padne číslo dělitelné třemi a jaká je pravděpodobnost, že padnou jen lichá čísla nebo jen sudá čísla.

Dáno: Hrací kostka, viz Obr. 27.22.



Obr. 27.22 Hrací kostka.

Při řešení použijeme prosté a jednoduché úvahy. Z Příkladu 27.1, je zřejmé, že množina všech možných výsledků hodů (jevů) je $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a možným výsledkem hodu (možným jevem) je $\omega_i = \{i\}$, kde $i = 1, 2, \dots, 6$.

Mírou je počet možných výsledků, tj. $|\Omega| = 6$ a $|\omega| = 1$, potom lze dle vztahu (27.9) platí $P_{f_i} = \frac{|\omega_i|}{|\Omega|} = \frac{1}{6}$.

Pravděpodobnost, že padne jedno číslo i je tedy $\frac{1}{6}$ (tj. 16.66%). Pravděpodobnost každého jednotlivého výsledku hodu je stejná $P_{f_1} = P_{f_2} = \dots = P_{f_6} = \frac{1}{6}$.

Pro stanovení pravděpodobnosti, že na kostce padne číslo dělitelné třemi, je nutné stanovit, která čísla na kostce jsou dělitelná třemi. Je zřejmé, že jsou to pouze čísla 3 a 6. Tedy množina možných výsledků je $\omega_{3,6} = \omega_3 + \omega_6 = \{3, 6\}$ s mírou $|\omega_{3,6}| = 2$. Pak dle (27.9), hledaná pravděpodobnost je $P_{f_{3,6}} = \frac{|\omega_{3,6}|}{|\Omega|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$. Pravděpodobnost, že při hodu padne číslo dělitelné 3 je $\frac{1}{3}$.

Alternativně, dle (27.4) také platí $P_{f_{3,6}} = P_{f_3} + P_{f_6} = \frac{1}{3}$.

Obdobně, pravděpodobnost, že padnou jen lichá čísla je $P_{f_{1,3,5}} = P_{f_1} + P_{f_3} + P_{f_5} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Sudá čísla jsou opačný jev než lichá čísla, a proto lze použít rovnici (27.10). Pravděpodobnost, že padnou sudá čísla je $P_{f_{2,4,6}} = 1 - P_{f_{1,3,5}} = \frac{1}{2}$.

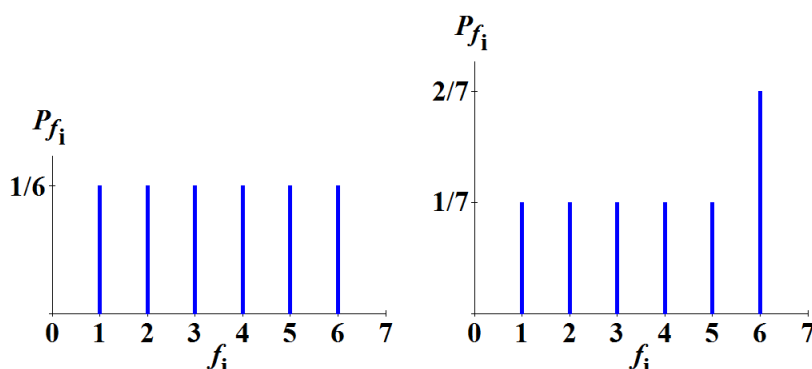
Příklad 27.3: Házení jednou hrací kostkou. Vytvořte histogram pro házení ideální kostkou a vytvořte také histogram „cinknuté“ kostky falešného hráče, tak aby pravděpodobnost hodu čísla šest byla dvojnásobná než hod jiného čísla.

Dáno: Hrací kostka, viz Obr. 27.23.



Obr. 27.23 Hrací kostka.

Cílem tohoto příkladu není nabádání k falešné hře ☺, ale pochopení souvislostí. Z výsledků Příkladu 27.2 lze jednoduše sestavit histogram ideální hrací kostky, kde každý výsledek hodu f_i má stejnou pravděpodobnost $P_{f_i} = \frac{1}{6}$, viz Obr. 27.24(a).



Obr. 27.24 Histogramy pravděpodobností (a) ideální hrací kostka, (b) falešná hrací kostka zvýhodňující číslo 6.

Falešná kostka musí mít histogram jiný, kde množina všech možných výsledků hodů (jevů) je ale stejná jako u ideální kostky, tj. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Hod f_1 , kdy padne číslo 1, má zatím neznámou pravděpodobnost P_{f_1} . Protože hody f_1 až f_5 , tj. když padne číslo 1 až 5, mají stejnou pravděpodobnost tak platí $P_{f_5} = P_{f_4} = P_{f_3} = P_{f_2} = P_{f_1}$.

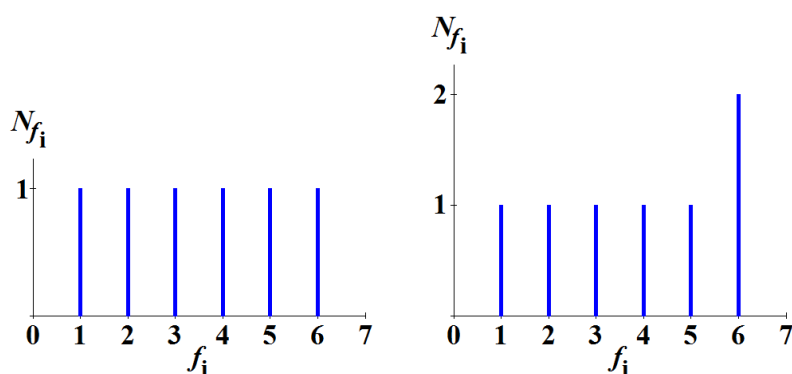
Ze zadání, hod f_6 , tj. kdy padne číslo 6, je falešným hráčem úmyslně zvýhodněný a jeho pravděpodobnost je dvojnásobná oproti zbývajícím hodům. Lze tedy prohlásit, že $P_{f_6} = 2P_{f_1}$.

Je zřejmé, že zmíněny byly všechny možné jevy z Ω . Potom dle (27.4) a (27.5) platí $\sum_i P_{f_i} = 5P_{f_1} + 2P_{f_1} = 7P_{f_1} = 1$. Jednoduchým řešením se získá

$$P_{f_1} = P_{f_2} = P_{f_3} = P_{f_4} = P_{f_5} = \frac{1}{7} \approx 0.1429 \text{ a } P_{f_6} = \frac{2}{7} \approx 0.2857.$$

Histogram kostky falešného hráče je vidět na Obr. 27.24(b).

Histogramy je možné také uvádět v četnostech N_{f_i} , v tomto případě platí $N_{f_i} = 6P_{f_i}$ pro ideální kostku a $N_{f_i} = 7P_{f_i}$ pro kostku falešného hráče, viz Obr. 27.25.



Obr. 27.25 Histogramy četností (a) ideální hrací kostka, (b) falešná hrací kostka zvýhodňující číslo 6.

Řešení stejné úlohy v programu Anthill je vysvětleno v následujícím Příkladu 27.4.

Příklad 27.4: Házení jednou hrací kostkou. Vytvořte histogram pro házení ideální kostkou a vytvořte také histogram „cinknuté“ kostky falešného hráče, tak aby pravděpodobnost hodu čísla šest byla dvojnásobná než hod jiného čísla. Pro řešení využijte sw Anthill a numerické výsledky porovnejte s exaktními výsledky Příkladu 27.3.

Dáno: Hrací kostka, viz Obr. 27.26.



Obr. 27.26 Hrací kostka.

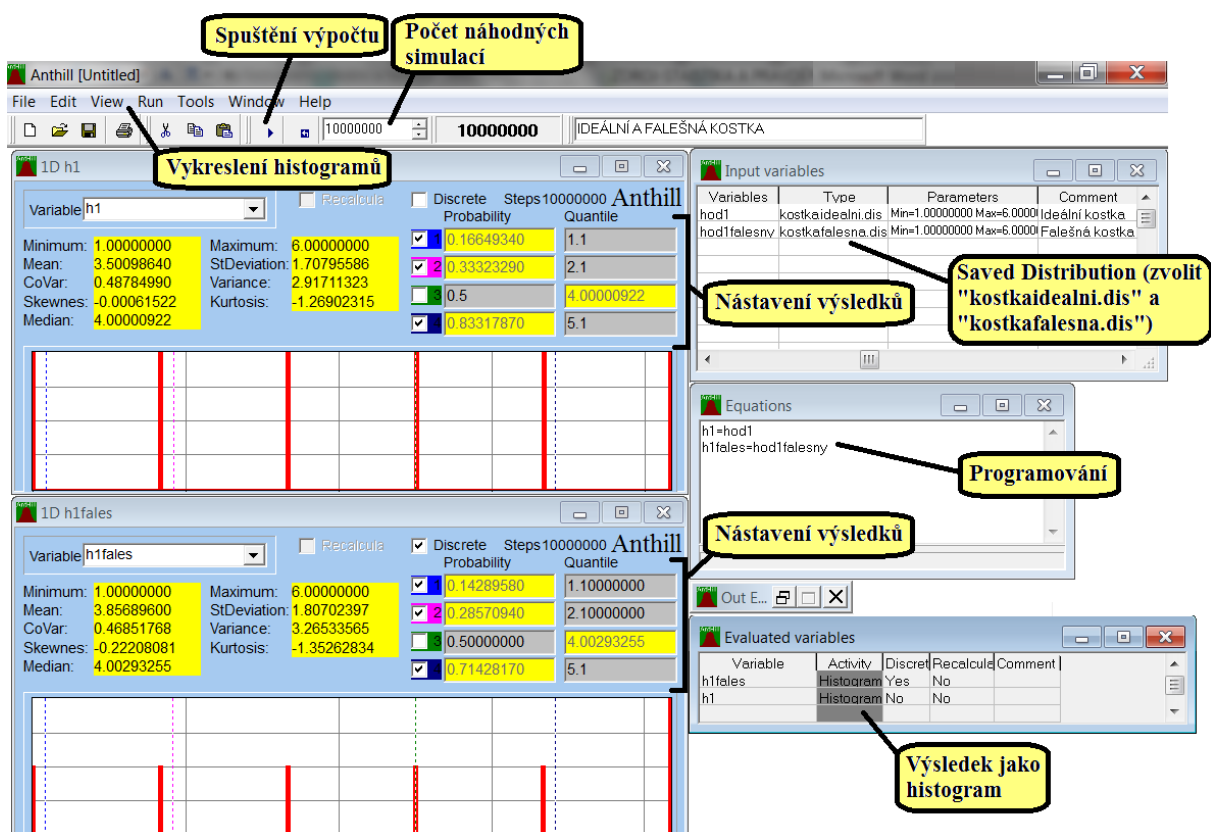
Cílem tohoto příkladu není nabádání k falešné hře ☺, ale pochopení souvislostí. Odvození histogramů je již uvedeno v Příkladu 27.3.

Pro sw Anthill, viz Kapitola 29.6, je důležité nejprve vytvořit histogramy, viz programování předvedené v Tab. 27.2, kde jsou uvedeny vytvořené soubory „kostkaidealni.dis“ a „kostkafalesna.dis“.

Tab. 27.2 Programování histogramů v sw Anthill

Ideální hrací kostka – soubor „kostkaidealni.dis“	Falešná hrací kostka – soubor „kostkafalesna.dis“
[Description] Identification=Ideální hrací kostka Type=Discrete Form=Frequency [Parameters] Min=1 Max=6 Bins=6 Total=6 [Bins] 1 1 1 1 1 1	[Description] Identification=Falešná hrací kostka Type=Discrete Form=Frequency [Parameters] Min=1 Max=6 Bins=6 Total=7 [Bins] 1 1 1 1 1 1 2

Vlastní spuštění generování 10^7 náhodných simulací a výsledné histogramy jsou uvedeny na Obr. 27.27. Z výsledků je patrná vysoká podobnost s výsledky Příkladu 27.3.



Obr. 27.27 Řešení ideální kostky a falešné kostky v sw Anthill.

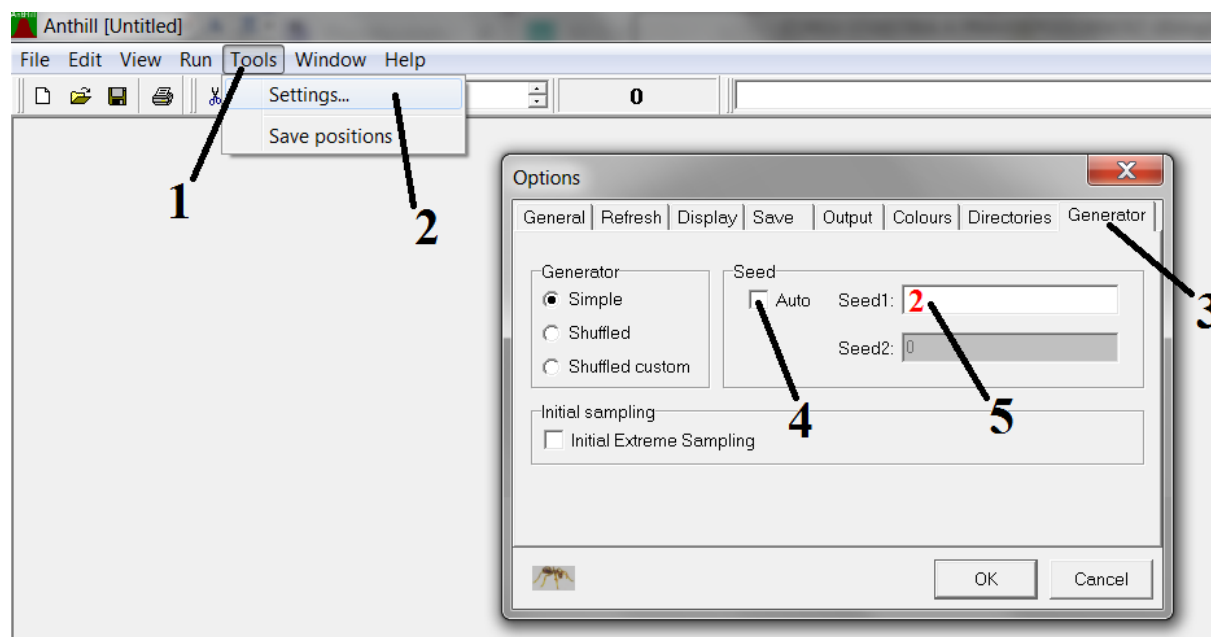
Porovnání numerických výsledků s exaktními výsledky Příkladu 27.3 je uvedeno v Tab. 27.3. Pro výpočet relativní chyby sw Anthill byl použitý vztah $100 \frac{P_{f\text{EXACT}} - P_{f\text{ANTHILL}}}{P_{f\text{EXACT}}}$, kde $P_{f\text{EXACT}}$ je pravděpodobnost stanovená v Příkladu 27.3 a $P_{f\text{ANTHILL}}$ je pravděpodobnost stanovená v Příkladu 27.4 (tj. počítaná sw Anthill).

Tab. 27.3 Porovnání výsledků z Příkladů 27.3 a 27.4.

		Ideální hrací kostka			Falešná hrací kostka		
		Exaktní řešení Příklad 27.3	Numerické řešení Anthill	Chyba /%/	Exaktní řešení Příklad 27.3	Numerické řešení Anthill	Chyba /%/
Pravděpodobnost	P_{f_1}	$\frac{1}{6}$	0.1664934	0.1040	$\frac{1}{7}$	0.1428958	-0.0271
	P_{f_6}	$\frac{1}{6}$	$1 - 0.8331787$ $= 0.1668213$	-0.0928	$\frac{2}{7}$	$1 - 0.7142817$ $= 0.2857183$	-0.0014
	Průměrná chyba P_{f_1} a $P_{f_6} = 0.0056\%$				Průměrná chyba P_{f_1} a $P_{f_6} = -0.0142\%$		

Z výsledků Tab. 27.3 je zřejmé, že chyby pseudonáhodného generátoru sw Anthill jsou velmi malé.

Nicméně, při každé posloupnosti generovaných pseudonáhodných simulací, budou výsledky i chyby vždy jiné ☺. To lze samozřejmě změnit nastavením v generátoru náhodných čísel a pak vždy posloupnosti generovaných pseudonáhodných simulací bude stejná, viz nastavení parametru „Seed“ na Obr. 27.28.



Obr. 27.28 Nastavení generování posloupnosti pseudonáhodných čísel v sw Anthill.

V sw Anthill může být parametr „Seed“ pouze jako celé číslo v intervalu -2^{31} až 2^{31} , tj. existuje $2 \times 2^{31} = 2^{32} = 4.294967296 \times 10^9$ možností variant generování posloupností pseudonáhodných čísel. Číslo 2^{32} je také periodou pseudonáhodného generátoru sw Anthill a nemá smysl počítat s více než 2^{32} náhodnými simulacemi, protože pak dojde k opakování pseudonáhodných čísel a výsledky již nemohou být přesnější.

Nutno podotknout, že se zvyšujícím počtem náhodných simulací se zvyšuje také výpočtový čas úlohy ☺.

Příklad 27.5: Házení dvěma ideálními hracími kostkami, viz Obr. 27.29. Úlohou je zjistit počet všech možností výsledku součtu hodu dvěma kostkami, stanovit pravděpodobnost těchto výsledků a vytvořit histogram těchto výsledků. Zjistěte také, jaká je pravděpodobnost, že součet hodu dvěma kostkami bude ≤ 7 .

Dáno: Hrací kostky, viz Obr. 27.29.

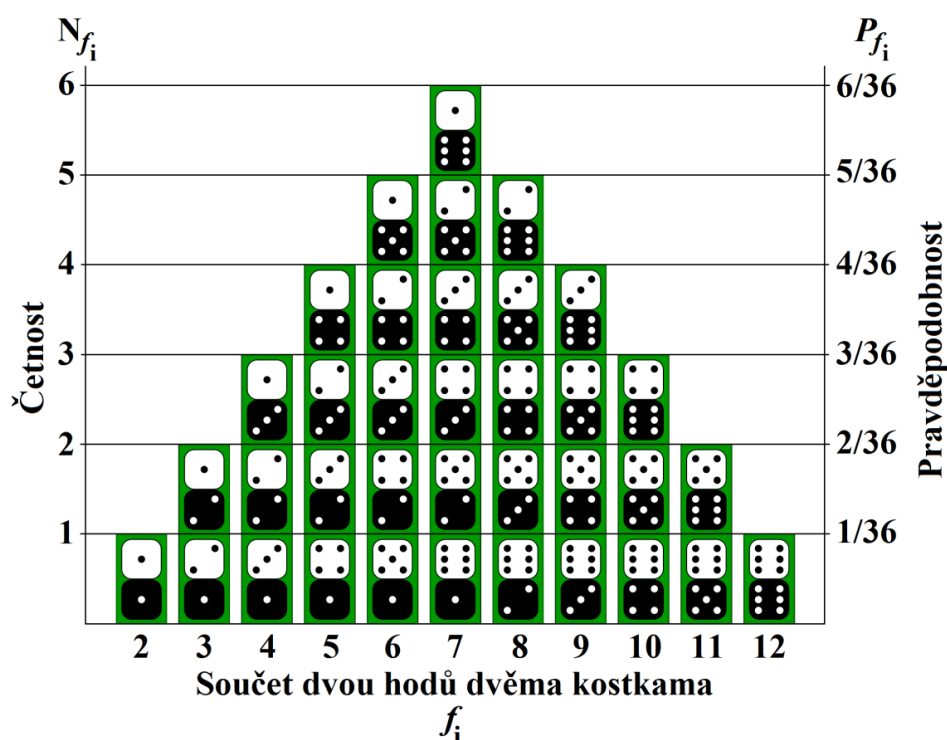


Obr. 27.29 Dvě hrací kostky.

Výsledkem hodu jsou uspořádané dvojice dvou čísel, které padly a jejichž součet je dán jedenácti možnostmi, tj. $\Omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ a $|\Omega| = 36$, viz Tab. 27.4 a Obr. 27.30.

Tab. 27.4 Házení dvěma ideálními hracími kostkami – četnosti a pravděpodobnosti.

Součet dvou hodů	Četnost N_{f_i}	Pravděpodobnost $P_{f_i} = \frac{N_{f_i}}{N_{celkem}}$
2	1	$1/36 \cong 0.0278$
3	2	$2/36 = 1/18 \cong 0.0556$
4	3	$3/36 = 1/12 \cong 0.0833$
5	4	$4/36 = 1/9 \cong 0.1111$
6	5	$5/36 \cong 0.1389$
7	6	$6/36 = 1/6 \cong 0.1667$
8	5	$5/36 \cong 0.1389$
9	4	$4/36 = 1/9 \cong 0.1111$
10	3	$3/36 = 1/12 \cong 0.0833$
11	2	$2/36 = 1/18 \cong 0.0556$
12	1	$1/36 \cong 0.0278$
Celkem Σ	$N_{celkem} = \Omega = 36$	$P_{\Omega} = 1$



Obr. 27.30 Házení dvěma ideálními hracími kostkami – histogram.

Histogram vytvořený z četností nebo pravděpodobností je symetrický a je znázorněn na Obr. 27.30.

Pravděpodobnost, že hod dvěma kostkami ≤ 7 , tj. když výsledek dvou hodů bude $\omega = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ s mírou $|\omega| = \sum_{i=2}^7 N_{f_i} = \sum_{i=2}^7 (i - 1) = 21$, lze označit jako

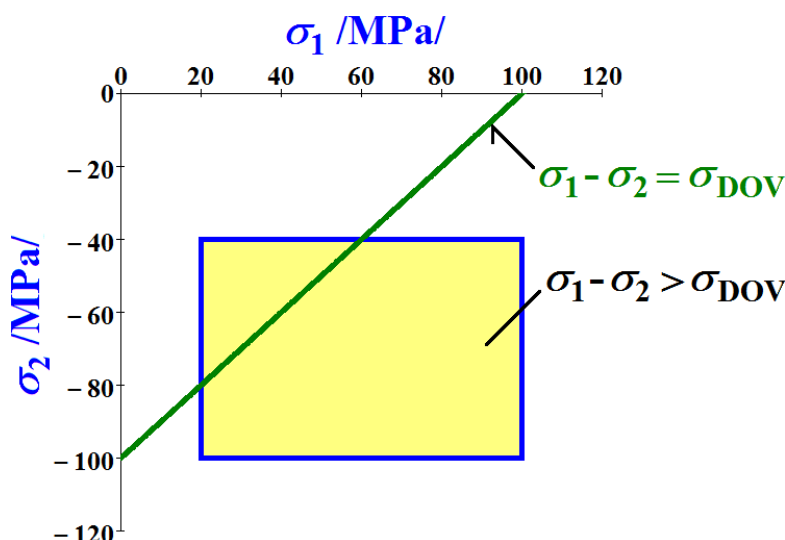
$$P_{f \leq 7} = \frac{|\omega|}{|\Omega|} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \cong 0.5833.$$

Alternativní přístup stanovení $P_{f \leq 7}$ lze provést pomocí rovnice (27.4). Potom platí $P_{f \leq 7} = \sum_{i=2}^7 P_{f_i}$, což dle Tab. 27.4 dává stejný výsledek.

Příklad 27.6: Z minima informací jsou známy pouze intervaly maximálních a minimálních hodnot hlavních napětí σ_1 a σ_2 v součásti. Známá je hodnota dovoleného napětí σ_{DOV} . Pomocí Guestovy hypotézy, co nejjednodušším způsobem určete, jaká je pravděpodobnost, že součást nevyhoví designové nerovnici (podmínce pevnosti). Dle Guesta, designová nerovnice je daná vztahem $\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{DOV}$.

Dáno: Hlavní napětí $\sigma_1 \in \langle 20; 100 \rangle$ MPa a $\sigma_2 \in \langle -100; -40 \rangle$ MPa, dovolené napětí $\sigma_{DOV} = 100$ MPa

Za předpokladu, že obě hlavní napětí jsou rovnoměrně rozložena v definovaných intervalech, pak lze vykreslit jejich náhodnou závislost pomocí obdélníka, viz Obr. 27.31.



Obr. 27.31 Hlavní napětí $\sigma_1 \in \langle 20; 100 \rangle$ MPa a $\sigma_2 \in \langle -100; -40 \rangle$ MPa a podmínka pevnosti dle Guesta.

V Obr. 27.31 je také vykreslena podmínka pevnosti dle Guesta, což je rovnice přímky $\sigma_1 - \sigma_2 \leq \sigma_{DOV}$. Guestova hypotéza je používána techniky pro posuzování napjatosti a podrobněji je vysvětlena v dalším dílu této knihy, případně je vysvětlena v učebnicích pružnosti a pevnosti.

Nejjednodušším způsobem výpočtu hledané pravděpodobnosti překonání podmínky pevnosti, je využití poměru míry (ploch) napětí.

„Plocha“ všech možných jevů je dána obdélníkem $|\Omega| = 80 \times 60 = 4800 \text{ MPa}^2$, viz Obr. 27.31.

„Plocha“ překonání meze pevnosti (tj. když $\sigma_1 - \sigma_2 > \sigma_{DOV}$) je dána rozdílem obdélníka s trojúhelníkem, tj. $|\omega_f| = |\Omega| - 40 \times 40 / 2 = 4800 - 800 = 4000 \text{ MPa}^2$, viz Obr. 27.31.

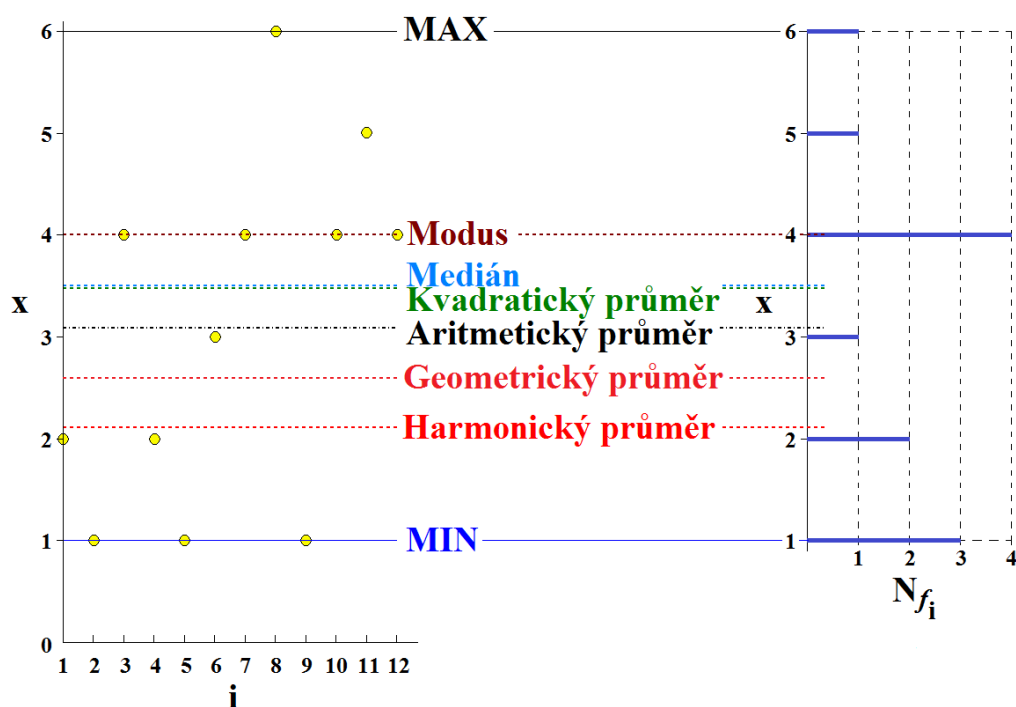
Pravděpodobnost nesplnění podmínky pevnosti je pak daná vztahem (27.9), tedy $P_f = \frac{|\omega_f|}{|\Omega|} = \frac{4000}{4800} = \frac{5}{6}$, tj. 83.33%.

Lze tedy konstatovat, že pravděpodobně z 83.33% nebude splněna požadovaná podmínka pevnosti. Jestliže se jedná o významnou součást, pak je nebezpečné její provozování.

Příklad 27.7: Pro zadaný statistický soubor diskretních hodnot x , stanovte maximum, minimum, modus, medián, aritmetický průměr, kvadratický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr a také rozptyl, směrodatnou odchylku, variační koeficient, výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku.

Dáno: $x \in \{2, 1, 4, 2, 1, 3, 4, 6, 1, 4, 5, 4\}$.

Z datového souboru náhodné proměnné x je zřejmé, že minimum $\text{MIN} = 1$ a maximum $\text{MAX} = 6$, četnost všech hodnot $N_{\text{celkem}} = 12$. Potom platí $x \in \langle \text{MIN}; \text{MAX} \rangle = \langle 1; 6 \rangle$ a index každé položky z datového souboru je $i = 1, 2, \dots, N_{\text{celkem}} = 1, 2, \dots, 12$, viz Obr. 27.32(a).



Obr. 27.32 Statistický soubor x a jeho charakteristiky (a) pořadí hodnot, (b) histogram četností.

V datovém souboru je pouze 6 veličin s četnostmi uvedenými v Tab. 27.5 a vykreslenými v histogramu na Obr. 27.32(b).

Tab. 27.5 Vyhodnocení statického souboru.

Hodnota	Četnost N_{f_i}	Pravděpodobnost $P_{f_i} = \frac{N_{f_i}}{N_{celkem}}$
1	3	$3/12 = 1/4 = 0.25$
2	2	$2/12 = 1/6 = 0.1\overline{66}$
3	1	$1/12 = 0.08\overline{33}$
4	4	$4/12 = 1/3 = 0.\overline{33}$
5	1	$1/12 = 0.08\overline{33}$
6	1	$1/12 = 0.08\overline{33}$
Celkem Σ	$N_{celkem} = 12$	$P_{\Omega} = 1$

Prvek s největší četností, resp. s největší pravděpodobností v souboru, je modus $\hat{x} = 4$, viz Tab. 27.5 a Obr. 27.32.

Aritmetický průměr $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{N_{celkem}} x_i}{N_{celkem}} = \frac{1 \times 3 + 2 \times 2 + 3 + 4 \times 4 + 5 + 6}{12} = \frac{37}{12} = 3.08\overline{33}$, viz Obr. 27.32.

Geometrický průměr je dán vztahem (27.22), tj.
 $x_{geom} = \sqrt[N_{celkem}]{x_1 x_2 \dots x_{N_{celkem}}} = \sqrt[12]{1 \times 2^2 \times 3 \times 4^4 \times 5 \times 6} \cong 2.5925$, viz Obr. 27.32.

Obdobně, dle (27.23) a (27.24) lze stanovit harmonický průměr $x_{harm} \cong 2.1053$ a kvadratický průměr $x_{kvad} \cong 3.4761$, viz Obr. 27.32.

Seřadí-li se hodnoty z datového souboru x podle velikosti a následně rozdělí na dvě

$$\left\{ 1, 1, 1, 2, 2, 3 \mid 4, 4, 4, 4, 5, 6 \right\}$$

poloviny, tj.

$$\Downarrow$$

$$\frac{3+4}{2} = 3.5,$$

pak je zřejmé, že medián $\tilde{x} = 3.5$ je v tomto případě aritmetickým průměrem hraničních hodnot v polovině rozdělení, viz Obr. 27.32.

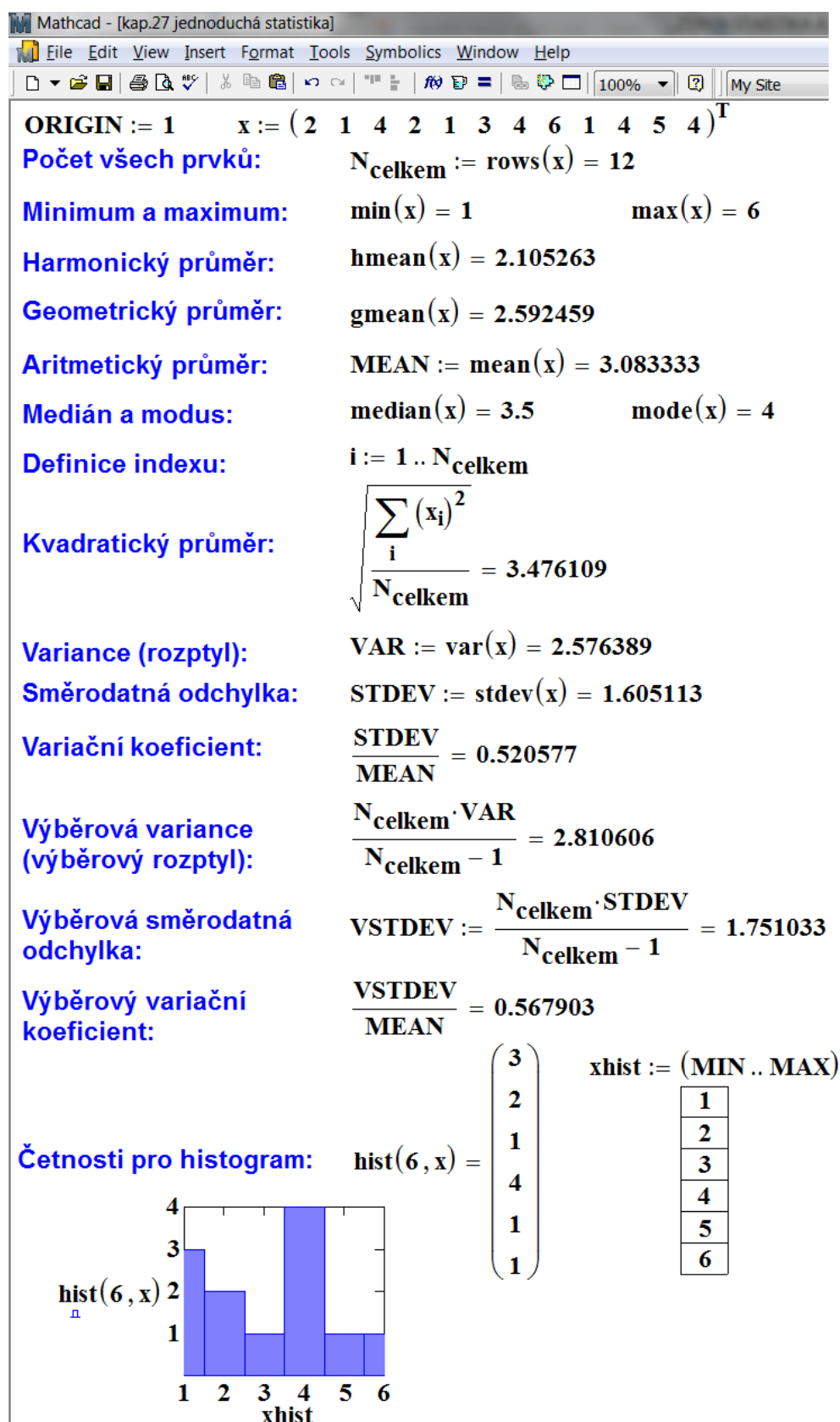
Ze vztahů (27.25), (27.27), (25.28), (27.29) a (27.30) je možno stanovit rozptyl
 $D = \frac{\sum_{i=1}^{N_{celkem}} (x_i - \bar{x})^2}{N_{celkem}} \cong 2.5764$, směrodatnou odchylku $\bar{\sigma} = \sqrt{D} \cong 1.6051$, variační koeficient
 $\frac{\bar{\sigma}}{\bar{x}} \cong 0.5206$, výběrový rozptyl $D_v = \frac{N_{celkem}}{N_{celkem}-1} D \cong 2.8106$ a výběrovou směrodatnou
odchylku $\bar{\sigma}_v = \sqrt{D_v} \cong 1.6765$.

Řešení stejné úlohy v sw Mathcad je předvedeno v následujícím Příkladu 27.8.

Příklad 27.8: Pro zadaný statistický soubor diskrétních hodnot x , stanovte maximum, minimum, modus, medián, aritmetický průměr, kvadratický průměr, geometrický průměr, harmonický průměr a také rozptyl, směrodatnou odchylku, variační koeficient, výběrový rozptyl a výběrovou směrodatnou odchylku. Řešení proveďte v sw Mathcad.

Dáno: $x \in \{2, 1, 4, 2, 1, 3, 4, 6, 1, 4, 5, 4\}$.

Ke stejným výsledkům jako v příkladu 27.7, lze dojít také pomocí sw Mathcad, viz Obr. 27.33.



Obr. 27.33 Řešení v sw Mathcad.

Příklad 27.9: V nemocnici jsou téměř neustále používány pro léčbu dva důležité lékařské přístroje s rozdílnými délkami lékařské procedury. Lékařská procedura (úkon) včetně přípravy trvá na starším přístroji 1 hodinu a na novém přístroji 25 minut. Úlohou je zjistit kolik minut trvá v průměru jedna lékařská procedura a také kolik pacientů se v průměru léčí za jednu hodinu.

Dáno: Doby výkonu lékařské procedury $t_1 = 1 \text{ h}$, $t_2 = 25 \text{ min}$.

Průměrnou délku trvání lékařské procedury $t_{\text{průměr}}$ /min/ lze stanovit nejrychleji pomocí harmonického průměru (27.23). Ze zadání je zřejmé, že se využívá $N_{\text{celkem}} = 2$ přístroje. Potom platí

$$t_{\text{průměr}} = t_{\text{harm}} = \frac{N_{\text{celkem}}}{\sum_{i=1}^{N_{\text{celkem}}} \frac{1}{t_i}} = \frac{2}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}} = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{25}} = \frac{2}{\frac{17}{300}} \cong 35.29 \text{ min.}$$

Za hodinu používání obou přístrojů se léčí

$$n_h = N_{\text{celkem}} \frac{60}{t_{\text{průměr}}} = 2 \times 1.7 = 3.4 \text{ pacientů.}$$

Úlohu lze také řešit pomocí jednoduché úvahy. Prvním přístrojem se vykoná 1 úkon za 1 h a druhým $\frac{60}{25} = \frac{12}{5} = 2.4$. Potom oba přístroje léčí za hodinu celkem $n_h = 1 + 2.4 = 3.4$ pacientů. Což je potvrzení správnosti předchozích výpočtů.

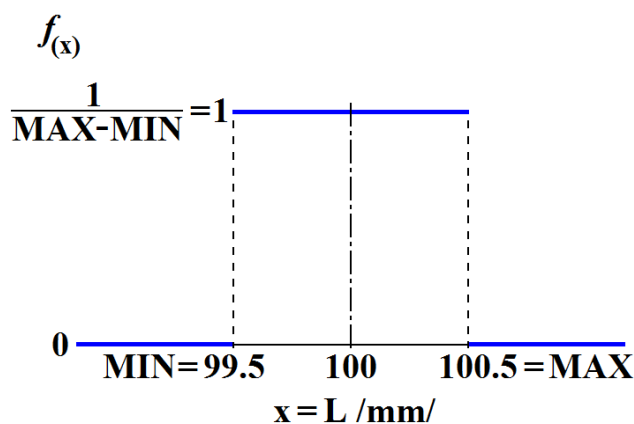
Průměrně je možno říci, že každý stroj léčí za hodinu $\frac{n_h}{N_{\text{celkem}}} = 1.7$ lidí. Pak průměrná délka trvání procedury je $t_{\text{průměr}} = \frac{60}{1.7} \cong 35.29 \text{ min}$, což je opět potvrzení správnosti aplikace harmonického průměru.

Příklad 27.10: Za předpokladu, že měření délky L_0 bylo provedeno s přesností rovnoměrné chyby $\pm \delta_L$, stanovte hustotu pravděpodobnosti, distribuční funkci délkového rozměru a aritmetický průměr.

Dáno: Délka $L_0 = 100 \text{ mm}$, chyba délky $\delta_L = \pm 0.5 \text{ mm}$.

Ze zadání je zřejmé, že délka $L = L_0 \pm \delta_L = 100 \pm 0.5 \text{ mm}$, tj. jsou známy limity $L \in \langle 99.5; 100.5 \rangle \text{ mm}$.

Předpokládá se, že chyba je rovnoměrná, tj. je daná rovnoměrným rozložením a lze tedy stanovit hustotu pravděpodobnosti $f(x)$, viz Obr. 27.34, kde plocha obdélníku, dle (27.13), se musí rovnat 1, tj. $\frac{1}{\text{MAX} - \text{MIN}} \times (\text{MAX} - \text{MIN}) = 1$.

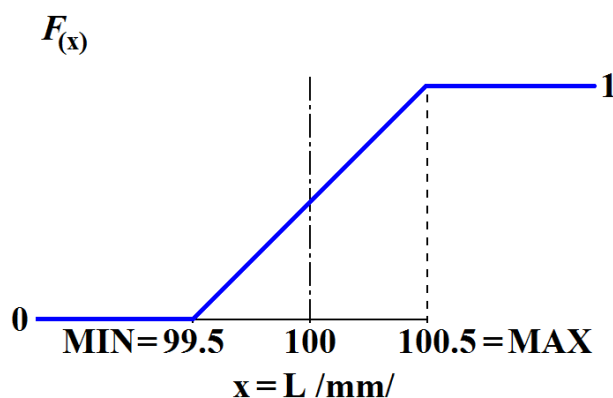
Obr. 27.34 Rovnoměrné rozdělení $x = L \in \langle 99.5; 100.5 \rangle$ mm a jeho hustota pravděpodobnosti $f_{(x)}$.

Matematický zápis hustoty pravděpodobnosti je tedy

$$f_{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle -\infty; 99.5 \rangle \text{ mm} \\ \frac{1}{\text{MAX}-\text{MIN}} = 1 & \text{pro } x \in \langle 99.5; 100.5 \rangle \text{ mm} \\ 0 & \text{pro } x \in (100.5; \infty) \text{ mm} \end{cases}$$

Pomocí (27.12) je možno odvodit distribuční funkci $F_{(x)}$, tj. $F_{(x)} = \int_{\text{MIN}}^x f_{(x)} dx = \int_{99.5}^x 1 dx = [x]_{99.5}^x = x - 99.5$ pro $x \in \langle 99.5; 100.5 \rangle$, což je lineární závislost vykreslená na Obr. 27.35 a pro kterou platí

$$F_{(x)} = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in \langle -\infty; 99.5 \rangle \text{ mm} \\ x - 99.5 & \text{pro } x \in \langle 99.5; 100.5 \rangle \text{ mm} \\ 1 & \text{pro } x \in (100.5; \infty) \text{ mm} \end{cases}$$

Obr.27.35 Rovnoměrné rozdělení $x = L \in \langle 99.5; 100.5 \rangle$ mm a jeho distribuční funkce $F_{(x)}$.

V případech, kdy je známá hustota pravděpodobnosti $f_{(x)}$, je možno aritmetický průměr definovat také integrálem $\bar{x} = \frac{\int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} x f_{(x)} dx}{\int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} f_{(x)} dx}$, avšak $\int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} f_{(x)} dx = 1$, viz rovnice (27.13).

Potom platí

$$\bar{x} = \int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} x f(x) dx = \int_{99.5}^{100.5} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{99.5}^{100.5} = \frac{100.5^2 - 99.5^2}{2} = 100 \text{ mm.}$$

Ke stejnému výsledku $\bar{x}$ lze dospět také prostou úvahou. Protože hustota pravděpodobnosti je symetrická funkce, tak $\bar{x}$ musí ležet na ose symetrie, viz Obr. 27.34.

Příklad 27.11: Ze dvou neznámých měření mechanického napětí v tahu σ_1 a σ_2 je známý aritmetický průměr a rozptyl. Určete, jaké byly výsledky měření.

Dáno: Aritmetický průměr měření napětí $\bar{x} = 35.25$ MPa, rozptyl měření napětí $D = 5.0625$ MPa², počet měření $N_{\text{celkem}} = 2$.

Z definice aritmetického průměru $\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{N_{\text{celkem}}} = \bar{x}$ a z definice rozptylu $\frac{(\sigma_1 - \bar{x})^2 + (\sigma_2 - \bar{x})^2}{N_{\text{celkem}}} = D$, viz rovnice (27.19) a (27.25), vyplývají rovnice

$$\left. \begin{aligned} \sigma_1 + \sigma_2 &= 2\bar{x} \\ (\sigma_1 - \bar{x})^2 + (\sigma_2 - \bar{x})^2 &= 2D \end{aligned} \right\} \quad (27.31)$$

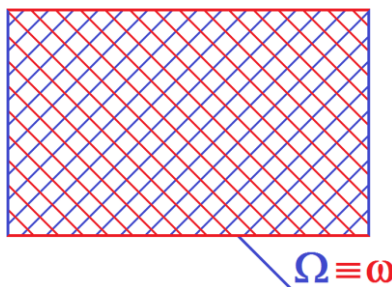
Z rovnice (27.31a) vyplývá $\sigma_2 = 2\bar{x} - \sigma_1$, což lze dosadit do (27.31b). Potom platí $(\sigma_1 - \bar{x})^2 + (2\bar{x} - \sigma_1 - \bar{x})^2 = (\sigma_1 - \bar{x})^2 + (\bar{x} - \sigma_1)^2 = 2D$. Z matematiky základní školy je zřejmé, že platí $(\sigma_1 - \bar{x})^2 = (\bar{x} - \sigma_1)^2$, a po úpravách se tedy získá rovnice $(\sigma_1 - \bar{x})^2 = D$, která vede na řešení $\sigma_1 = \bar{x} + \sqrt{D}$. Dosazením tohoto výsledku do rovnice (27.31a) se získá $\sigma_2 = \bar{x} - \sqrt{D}$.

Pro hledané výsledky měření platí $\sigma_{1,2} = \bar{x} \pm \sqrt{D} = 35.25 \pm \sqrt{5.0625} = 35.25 \pm 2.25$ MPa, tj. $\sigma_1 = 37.5$ MPa a $\sigma_2 = 33$ MPa.

27.10 Otázky k pochopení látky

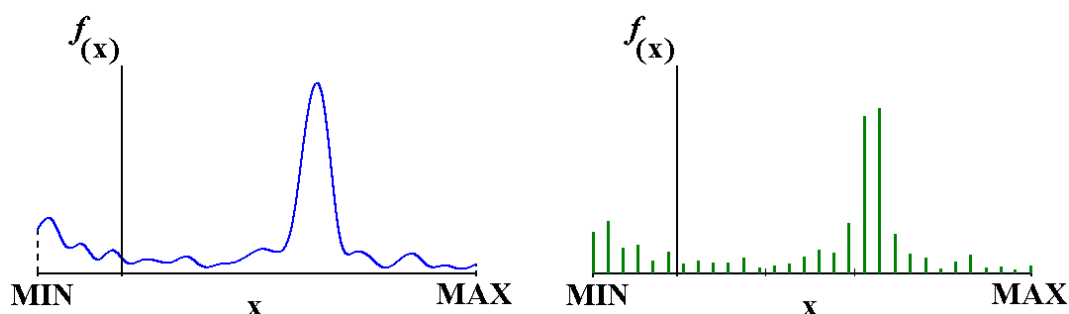
1. Co je to statistika?
2. Co je to náhodný jev?
3. Jak byste vysvětlili náhodnost určitého jevu?
4. Co je pravděpodobnost náhodného jevu?
5. Může být pravděpodobnost záporná?
6. Může být pravděpodobnost větší než 1?
7. Co je to stochastika?
8. Co víte o historii statistiky a teorie pravděpodobnosti?
9. Co je Quételetův index?
10. Vysvětlete klasickou definici pravděpodobnosti.
11. Co znamená slovo disjunktní a kde je v textu použito?
12. Platí pro pravděpodobnost vztah $P_\omega = \frac{N_{\text{celkem}}}{N_\omega}$?
13. Vysvětlete geometrickou definici pravděpodobnosti.

14. Vysvětlete vztah $P_\omega = \frac{|\omega|}{|\Omega|}$.
15. Vysvětlete statistickou definici pravděpodobnosti.
16. Jaká je pravděpodobnost nemožného jevu?
17. Má jistý jev pravděpodobnost 1?
18. Je na Obr. 27.36 jistý jev ω ?



Obr. 27.36.

19. Za jakých podmínek platí $P = \sum_i P_{f_i}$?
20. Vysvětlete $P_{f_1|f_2} = \frac{P_{f_1 \cap f_2}}{P_{f_2}} = \frac{|\omega_1 \cap \omega_2|}{|\omega_2|}$.
21. Vysvětlete nezávislý jev.
22. Za jakých podmínek platí $P_{f_1|f_2} = P_{f_1}$.
23. Kdy je splněno $P_f = \frac{N_f}{N_{celkem}} = \frac{|\omega|}{|\Omega|}$ přesně?
24. Napište vztah pro pravděpodobnost opačného jevu.
25. Jaké znáte náhodné veličiny (proměnné)?
26. Co je distribuční funkce $F_{(x)}$?
27. Je pravdivé tvrzení $1 \geq F_{(x)} \geq 0$?
28. Pomocí obrázku vysvětlete tvrzení $F_{(x_f)} = P_{x \leq x_f}$.
29. Je pravda, že $F_{(x)} \geq 0$ a také $\frac{dF_{(x)}}{dx} \geq 0$?
30. Co je hustotou pravděpodobnosti $f_{(x)}$?
31. Jaká je souvislost mezi distribuční funkcí a hustotou pravděpodobnosti?
32. Je pravdivé tvrzení, že $\int_{\text{MIN}}^{\text{MAX}} f(x) dx = 1$?
33. Je pravda, že $P_{(x_1 \leq x \leq x_2)} = F_{(x_2)} - F_{(x_1)}$?
34. Je pravdivé tvrzení $f_{(x)} \geq \frac{dF_{(x)}}{dx}$.
35. Co popisuje Obr. 27.37?



Obr. 27.37.

36. Jaký je alternativní název pro kvantilovou funkci?
37. Jak je definována kvantilová funkce $Q_{(p)}$?
38. Co je to kvantil?
39. Co je kvartil?
40. Co je decil?
41. Co je percentil?
42. V rovnoměrném rozdělení hustoty pravděpodobnosti zakreslete první a druhý tercil a medián.
43. Jak vzniká Queteletova (empirická kvantilová) funkce?
44. Co je histogram?
45. Vysvětlete příklad transformace časového průběhu zatížení na histogram zatížení.
46. Jaké znáte typy histogramů?
47. Jak je definován aritmetický průměr?
48. Jak je definován medián?
49. Jak je definován modus?
50. Jak je definován geometrický průměr?
51. Je pravda, že geometrický průměr se používá pouze pro kladné hodnoty dat statistického souboru?
52. Jak je definován harmonický průměr?
53. Jak je definován kvadratický průměr?
54. Jak je definován rozptyl?
55. Jak je definována směrodatná odchylka?
56. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu ideální kostkou padne číslo 1 nebo 2?
57. Nakreslete histogram ideální a falešné hrací kostky.
58. Jaký je medián v souboru dat $x \in \{2, 1, 0, 10\}$?
59. Jaký je medián v souboru dat $x \in \{2, 0, 10, 3\}$?

27.11 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně vybraný den v týdnu připadne na víkend? Vysvětlete také postup řešení.

Odpověď: $P_{f_{\text{sobota, neděle}}} = \frac{2}{7}$.

2. S jakou pravděpodobností je v Příkladu 27.6 splněna podmínka pevnosti?

Odpověď: $\frac{1}{6}$.

3. Shlédněte pohádkové video s písní „Statistika nuda je“, viz [22]
https://www.youtube.com/watch?v=zQ82GKpFL_M.

4. Prohlédněte si statistiku jmen a příjmení v České Republice, viz [23]
<https://www.kdejsme.cz/>.

5. Vtip:

Pravděpodobnost, že se stane něco vysoce nepravděpodobného, je vždy vyšší, než nám ukazují statistici a jejich statistické výpočty ☺.

6. Vtip:

Je snadnější a statisticky pravděpodobnější do toho spadnout, než se z toho vyhrabat ☺.

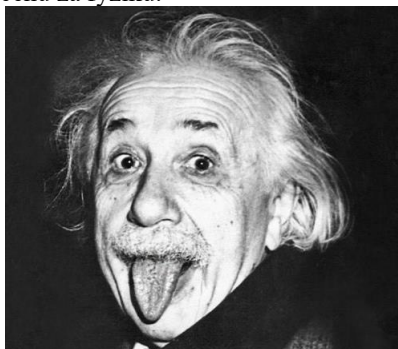
7. Vtip:

Čím déle čekáš v jedné frontě na úřadě, tím vyšší je pravděpodobnost, že sis spletl okénko ☺.

8. Jeden z omylů Alberta Einsteina²¹² je spojovaný s jeho slavným výrokem „Bůh nehraje kostky s vesmírem“. Einstein tímto odmítal kvantovou teorii, která je i dnes platná a která je plně založená teoreticky i experimentálně na pravděpodobnosti.

9. Prostudujte si práci se statistickými daty v sw Excel, viz např. [24]
<https://biportal.cz/statistika-v-excelu/>, [25] <https://www.napocitaci.cz/33/excel->

²¹² **Albert Einstein** (1879–1955) byl německý židovský teoretický fyzik. Často je označován za největšího vědce 20 století. V r. 1921 získal Nobelovu cenu za fyziku.



(zdroj fotografie internet)

[analyticke-nastroje-8-cast-popisna-statistika-uniqueidgOkE4NvrWuNY54vrLeM673_KxVua_V3TpLpGVMy1prA/](https://www.youtube.com/watch?v=DC4crfSnZ7s).

10. Shlédněte video o stanovení četnosti pomocí sw Excel, viz [26] <https://www.youtube.com/watch?v=DC4crfSnZ7s>.
11. Shlédněte video o zpracování dat pomocí sw Excel, viz [27] <https://www.youtube.com/watch?v=xWl0c5RvFec>.
12. Přehled statistických funkcí v sw Excel, viz [28] <https://support.office.com/cs-cz/article/statistick%C3%A9-funkce-odkazy-624dac86-a375-4435-bc25-76d659719ffd>.
13. Jaká je pravděpodobnost, že ze sedmi hodů ideální kostkou padnou tři šestky?

Odpověď: $P_3 \text{ šestky ze 7 hodů} = 35 \frac{5^4}{6^7} \cong 0.0781$, viz řešení [29]

<https://www.youtube.com/watch?v=zUnVQykD60k>.

14. Jaká je pravděpodobnost, že ve Francouzské ruletě²¹³ padne číslo 0, viz Obr. 27.38?

²¹³ **Francouzská ruleta** – Asi nejpravděpodobněji přišel s myšlenkou rulety v 18. století matematik a fyzik Blaise Pascal. Původně mělo číselné kolo rulety sloužit jako generátor náhodných čísel, a ne k vytvoření nové hazardní hry. Ruleta byla poprvé hrána v roce 1796 v Paříži a v polovině 19. století se již hrála ve většině Evropy. V roce 1843 byla do rulety přidána „0“, čímž se vychýlila pravděpodobnost výhry ve prospěch provozovatele rulety. Existuje také **Americká ruleta**, která má ještě navíc číslo „00“.



Ne vždy je v kasinu a jeho okolí pohoda © – film Ace High 1968 (zdroj fotografie internet), viz také [31]
<https://www.youtube.com/watch?v=5dkU-pWI3B0>



Obr. 27.38 Francouzská ruleta; zdroj obrázku [30] https://plzensky.denik.cz/zpravy_region/gang-cizincu-ruletu-nehral-ale-navrtal20100212.html.

Odpověď: $P_0 = \frac{1}{37}$.

15. Falešná hra se nevyplácí. Přečtěte si článek z Plzeňského deníku.cz, viz [30] https://plzensky.denik.cz/zpravy_region/gang-cizincu-ruletu-nehral-ale-navrtal20100212.html.

16. Vtip:

Statistik je někdo, kdo tvrdí že nejistota je jistá.

17. Kreslený vtip:



Obr. 27.39 Pravěká statistika – Jiří Winter-Nepřakta: Statistik; zdroj obrázku [32].

27.12 Reference ke kapitole 27

- [1] Frydrýšek, K.: *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Pandemie covidu-19 – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Pandemie_covidu-19.
- [3] Comenius, J.A.: *Orbis sensualium pictus*, Nürnberg, 1658 (*Komenský, J.Á.: Svět v obrazech – český překlad*).
- [4] Hrací kostka – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Hrac%C3%AD_kostka.
- [5] Příběh statistiky, Český statistický úřad, 2014, ISBN: 978-80-250-2517-8, <https://www.czso.cz/documents/10180/20540505/32018414.pdf/5001140e-9277-4551-845e-b1ca5a977284?version=1.2>.
- [6] kolektiv autorů: *Bible, Písmo svaté Starého a Nového zákona, český ekumenický překlad*, Evangelium podle Lukáše, kapitola 2, Zvon, České katolické nakladatelství v Praze, ISBN 80-7113-009-5, 1991.
- [7] Čechura, J.: *Hry v životě středověkého člověka - Pokus o rekonstrukci způsobů trávení volného času ve středověku na příkladu archeologických nálezů pozůstatků deskových her*, diplomová práce, Univerzita Karlova v Praze, Filozofická fakulta, Ústav pro pravěk a ranou dobu dějinnou, Praha, 2008, pp. 1-122, vedoucí diplomové práce prof. PhDr. Jan Klápště, CSc. <https://docplayer.cz/109122880-Univerzita-karlova-v-praze-filozoficka-fakulta-ustav-pro-pravek-a-ranou-dobu-dejinnou-diplomova-prace-josef-cechura.html>.
- [8] Metoda nejmenších čtverců – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Metoda_nejmen%C5%A1%C3%ADch_%C4%8Dtverc%C5%AF.
- [9] Žák, L.: *Historie statistiky a pravděpodobnosti*, ÚM FSI v Brně, 2006.
- [10] Fabián, F, Kluiber, Z.: *Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění*, Prospektrum spol. s r. o., ISBN 80-7175-058-1, Praha, 1998, pp.152.
- [11] Guštar, M.: *Moderní metody simulace systémů – metoda SBRA*, disertační práce, FEI VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 2002, pp.144.
- [12] Halдар, A., MAHADEVAN, S.: *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*, John Willey & Sons, Inc, New York, 2001, ISBN 0-471-33119-8.
- [13] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar M. et al: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software*, ITAM CAS, Prague, 2001, Czech Republic, ISBN 80-86246-08-6, pp.471 (cd attached).
- [14] Marek, P., Guštar, M., Anagnos, T. et al: *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, USA, 1995, ISBN 0-8493-8286-6, pp.365.
- [15] Marek, P., Guštar, M., Bathon, L. et al: *Tragwerksbemessung von deterministischen zu probalistischen verfahren*, Academia, Nakladatelství akademie věd ČR, 1998, ISBN 80-200-0706-7, pp.263.

- [16] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar, M. et al: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software*, 2nd edition, ITAM CAS, Prague, 2003, Czech Republic, ISBN 80-386246-08-6, pp.471 (cd attached).
- [17] Sundararajan, C. et al: *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [18] Frydrýšek, K.: *Pravděpodobnostní výpočty v mechanice I*, Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp. 1-149.
- [19] Frydrýšek, K.: The Probabilistic Approach and its Practical Applications in Medical and Mechanical Engineering, *RISK, RELIABILITY AND SAFETY: INNOVATING THEORY AND PRACTICE*, 26th Conference on European Safety and Reliability (ESREL), CRC PRESS-TAYLOR & FRANCIS GROUP, ISBN 978-1-315-37498-7, Glasgow, Scotland, 2017, pp. 2453-2460.
- [20] Bujok, P., Tvrdík, J. Poláková, R.: *Základy pravděpodobnosti a statistiky*, Katedra informatiky a počítačů, Přírodovědecká fakulta, Ostravská univerzita, Ostrava, 2015, viz také <https://www1.osu.cz/~bujok/files/zmats.pdf>.
- [21] Pavel Marek (stavební inženýr) – Wikipedie (wikipedia.org), [https://cs.wikipedia.org/wiki/Pavel_Marek_\(stavebn%C3%AD_in%C5%BEen%C3%BDr\)](https://cs.wikipedia.org/wiki/Pavel_Marek_(stavebn%C3%AD_in%C5%BEen%C3%BDr)).
- [22] Princové jsou na draka - Statistika - YouTube https://www.youtube.com/watch?v=zQ82GKpFL_M.
- [23] KdeJsme.cz, Četnost příjmení nebo jména v České republice, <https://www.kdejsme.cz/>.
- [24] Statistika v Excelu není nuda, BI Portál (biportal.cz), <https://biportal.cz/statistika-v-excelu/>.
- [25] Excel – Analytické nástroje – 8. část - Popisná statistika, NaPočítači.cz (napocitaci.cz), https://www.napocitaci.cz/33/excel-analyticke-nastroje-8-cast-popisna-statistika-uniqueidgOkE4NvrWuNY54vrLeM673_KxVua_V3TpLpGVMy1prA/.
- [26] Jak na funkci Četnosti v Excelu?, EduTV – YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=DC4crfSnZ7s>.
- [27] 10.díl: Zpracování dat v Excelu - třídění I. stupně - YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=xWl0c5RvFec>.
- [28] Statistické funkce (odkazy) (microsoft.com), <https://support.office.com/cs-cz/article/statistick%C3%A9-funkce-odkazy-624dac86-a375-4435-bc25-76d659719ffd>.
- [29] Pravděpodobnost - 3 šestky ze 7 hodů 4. 11. 2014 - YouTube, <https://www.youtube.com/watch?v=zUnVQykD60k>.
- [30] Gang cizinců ruletu nehrál, ale navrtal - Plzeňský deník (denik.cz) https://plzensky.denik.cz/zpravy_region/gang-cizincu-ruletu-nehral-ale-navrtal20100212.html.
- [31] Ace High (Trailer) – YouTube Video <https://www.youtube.com/watch?v=5dkU-pWI3B0>.

- [32] Kopecký, J.: *Jiří Winter-Nepřakta VELKÁ KNIHA VTIPŮ*, Grada Publishing, Praha, 2017, ISBN 978-80-271-0447-5.

28. STRUČNĚ O METODĚ MONTE CARLO A NÁHODNÝCH GENERÁTORECH

Tato kapitola stručně a populárním způsobem uvádí metodu Monte Carlo (MC), která v současnosti patří k základním numerickým metodám používaným ve stochastických úlohách současné vědy a techniky. Určitě tato kapitola nedokáže plně uspokojit matematiky ani programátory ☺.

Kapitola souvisí se statistikou a pravděpodobností a navazuje na látku vysvětlenou v Kapitole 27. Cílem je opět přispět pozitivně k posunu v přemýšlení od deterministického pojetí světa k pojetí stochastickému, které podle současného stavu vědy vystihuje nejlépe realitu.

Kapitola cíleně míří k aplikacím a měla by povzbudit čtenáře „nebát se“ aplikovat statistiku a pravděpodobnost v oboru biomechanika.

Reference k této kapitole jsou [1] až [12].

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek.

28.1 Pojem, použitelnost a historie metody Monte Carlo

Metoda Monte Carlo²¹⁴ (MC) je obecný název pro metody, které využívají k výpočtům posloupností náhodných čísel. Pomocí metody MC lze získat přibližná řešení různých typů problémů, pokud lze jejich řešení vyjádřit jako číselnou charakteristiku nějaké náhodné veličiny. Tuto metodu lze použít pro řešení stochastických (pravděpodobnostních, statistických) i deterministických úloh. Metoda MC může být tedy využita pro simulování stochastických (náhodných) problémů, protože tyto problémy jsou popsány pravděpodobnostním způsobem.

Nicméně, mnoho deterministických úloh lze také řešit pomocí metody MC. Pro řešení deterministických problémů je třeba tyto problémy převést na řešení problémů stochastických a pak lze aplikovat metodu MC. Výpočet hodnoty určitého integrálu nebo řešení soustav rovnic patří mezi typické deterministické úlohy řešené metodou MC. Už jen z tohoto pohledu lze metodu MC také považovat za numerickou metodu.

Vlastní řešení metodou MC spočívá v mnohonásobném opakování pokusů (simulačních kroků, náhodných jevů, náhodných pokusů, simulací). Odhady hledaných veličin jsou získávány statistickým zpracováním shromážděných dat. Možnost aplikace metody je založena na platnosti zákona velkých čísel²¹⁵ a centrální limitní věty. Na jejich základě lze předpokládat, že empirické rozdělení realizací náhodné veličiny konverguje k teoretickému rozdělení této veličiny s rostoucím počtem vzorků/simulací.

Metoda MC je dnes všeobecně akceptována a stala se standardním nástrojem v mnoha oblastech. k získání výsledků (s dostatečnou přesností) je třeba provést velké množství (obvykle tisíce až miliony) kroků (náhodných simulací) a proto je generování náhodných čísel, vlastní simulace i záznam a následné vyhodnocování výsledků prováděno pomocí počítače. Vyrůstající výkon a kapacita počítačů umožňuje řešení rozsáhlých úloh, vyžadujících

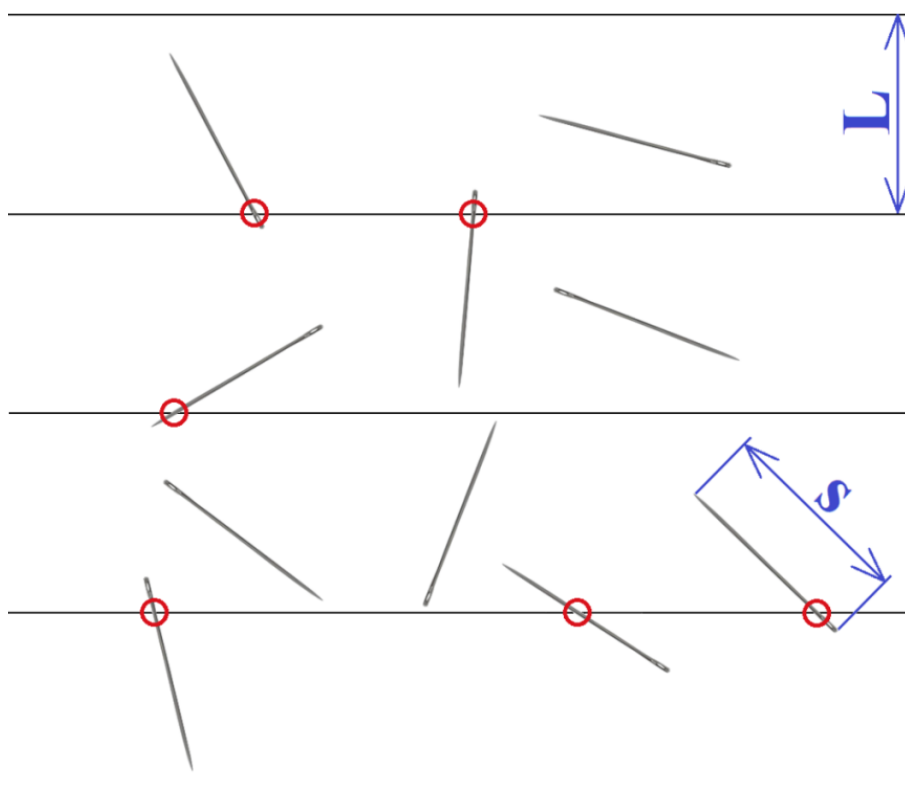
²¹⁴ Český Karlova hora.

²¹⁵ **Zákon velkých čísel** je popsán skupinou několika matematických vět. Dle teorie pravděpodobnosti jej lze vysvětlit takto. Aritmetický průměr N_{celkem} náhodných veličin se stejnou střední hodnotou se s rostoucím N_{celkem} blíží k této střední hodnotě. Existuje tzv. slabý zákon velkých čísel a silný zákon velkých čísel. Praktický dopad pro běžné úlohy znamená, pokud máme dostatečně spolehlivý generátor náhodných veličin, pak s rostoucím N_{celkem} , se možná chyba aplikace metody MC zmenšuje.

zpracování velkého množství proměnných a provedení velkého množství kroků. To dovoluje i řešení úloh dříve prakticky neřešitelných. Jinými slovy, podobně jako ostatní numerické metody, tak i metoda MC ztrácí svoji aplikovatelnost bez počítačů.

Systematické využívání a rozvoj metod MC začalo kolem roku 1940, ale lze najít i několik ranějších případů.

Za první dostatečně dokumentované použití metody MC je považován Buffonův experiment s jehlou z roku 1777, pomocí kterého lze stanovit hodnotu Ludolfova čísla²¹⁶ π . Řešení této úlohy je velmi populárním a vděčným tématem mnoha knih a internetu.



Obr. 28.1 Buffonův experiment s jehlou a stanovení přibližné hodnoty čísla π ($N_f = 6$, $N_{celkem} = 10$, $L = s = 2$ cm).

Tedy **G. L de Buffon**²¹⁷ náhodně vrhal jehlu délky s na desku s narysovanými rovnoběžkami ve vzájemné vzdálenosti L . Pravděpodobnost P , že takto vržená jehla protne

²¹⁶ $\pi = 3.14159265359 \dots$ (Ludolfovo číslo) je nejznámější matematická konstanta a je to iracionální a transcendentní číslo, které je stále předmětem intenzivního matematického výzkumu. Název π vznikl ze zkratky řeckého slova *perímetros* = obvod. Název Ludolfovo číslo je podle matematika (Ludolph van Ceulen), který spočítal na počátku 17. století π na 35 desetinných míst.

²¹⁷ **Georges Louis Leclerc de Buffon** (1707–1788) byl slavný francouzský matematik, fyzik, přírodovědec a spisovatel.



(Zdroj obrázku internet).

libovolnou z rovnoběžných přímek, lze stanovit integrálem, tj. $P = \frac{2s}{\pi L}$. Zároveň, s rostoucím počtem vrhů jehly N_{celkem} , platí $P \rightarrow \frac{N_f}{N_{\text{celkem}}}$, viz rovnice (27.3) a (27.8), kde N_f je počet výsledků kdy jehla překřížila rovnoběžku, viz Obr. 28.1.

Potom platí

$$\pi \approx \frac{2s N_{\text{celkem}}}{N_f L}. \quad (28.1)$$

Při jednoduché primitivní realizaci na Obr. 28.1, vychází $\pi \approx 3.\overline{33}$ s relativní chybou $100 \frac{\pi - 3.\overline{33}}{\pi} = -6.10\%$, což je poměrně dobrá shoda na 10 vrhů jehly. Nutno podotknout, že z pohledu matematiky tento postup stanovení čísla π není příliš efektivní, protože konverguje pomalu oproti jiným metodám. Mírně více efektivnější (jednodušší) metoda stanovení čísla π , také založená na metodě Monte Carlo, je uvedena v Příkladech 28.1 a 28.2. Je zřejmé, že pokud se pokus znovu zopakuje, tak rozložení jehel bude s obrovskou pravděpodobností jiné ☺.

Název metody MC byl vytvořen během druhé světové války členy týmu pracujícího na výrobě atomové bomby v rámci projektu **Manhattan Engineering District**²¹⁸. Metoda byla nazvána podle známého centra hazardních her Monte Carla, hlavního města knížectví Monaco, viz Obr. 28.2. Tento název byl zvolen pro podobnost mezi náhodným charakterem použitých výpočetních postupů a hazardních her.

²¹⁸ **Projekt Manhattan Engineering District**, později známý jako **Projekt Manhattan**, byl krycí název pro přísně tajný americký vývoj atomové bomby za 2. světové války v letech 1942–1946.



První test jaderné bomby Trinity 16. 7. 1945 (zdroj obrázku [3]
https://cs.wikipedia.org/wiki/Projekt_Manhattan).



Obr. 28.2 Monte Carlo v noci; zdroj [2] <http://www.cestyposvete.cz/monako.html>.

Podstatou přímé (klasické) metody MC je numerická simulace předpokládaného jevu (např. chování konstrukce s možností jejího poškození nebo nevratné poškození implantátu a následně vzniklá zlomenina končetiny atp.). Postup výpočtu metodou MC odpovídá těmto krokům:

- V prvním kroku se vygenerují jednotlivé hodnoty náhodných vstupních veličin (např. zatížení, geometrie, materiálové vlastnosti, charakteristiky populace, ekonomické ukazatele atp.) v závislosti na svých rozděleních pravděpodobnosti.
- V dalším kroku se pomocí matematického modelu vypočtou žádané výsledky (rozměry konstrukce či implantátu, životnost konstrukce, úspěšnost podnikání, riziko havárie, funkce spolehlivosti F_s atp.). Příslušný výpočtový model musí být známý a zodpovědně stanovený.
- Ve třetím kroku se aplikují kritéria stanovení hledané pravděpodobnosti (např. vypočte se pravděpodobnost poruchy či nežádaného stavu P_f dle vztahu (27.8)).

Výhodou použití přímé metody MC je její srozumitelnost, transparentnost a možnost průběžného zobrazení výsledné funkce spolehlivosti pomocí histogramu, kumulativní distribuční funkce či kvantilové funkce.

Naopak, nevýhodou metody MC je nutnost provádět velký počet simulací pro malé pravděpodobnosti poruchy. Přímá metoda MC je implementována i v počítačových programech vytvořených či použitých pro aplikaci metody SBRA a zpracování jejich výsledků, viz následující Kapitola 29 aj., při řešení jednodušších nebo složitějších úloh.

Kromě přímé metody MC existuje také její modifikace např. **metoda kvazi-Monte Carlo**, která vznikla ve snaze zrychlit řešení přímé metody MC.

Využití metody MC je také v Kapitole 29 a 30, kde je řešena problematika pravděpodobnostního posudku spolehlivosti a stochastický model sedícího člověka.

Populární aplikací metody MC je také Millerův-Rabinův test prvočíselnosti, což je jeden z algoritmů testů toho, zda je dané číslo prvočíslem²¹⁹.

²¹⁹ **Prvočíslo** je přirozené číslo > 1 , které je beze zbytku dělitelné jen dvěma děliteli a to jedničkou a samo sebou. V první stovce se vyskytuje 25 prvočísel, tj. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97. Prvním prvočíslem je číslo 2, které je jediným sudým prvočíslem. Největší známé prvočíslo je

28.2 Generátory náhodných čísel

Využití metody MC si nelze představit bez generátorů pseudonáhodných čísel.

Všechny výpočty využívající metod MC nebo simulace stochastického typu vyžadují **generování numerických realizací náhodných veličin s daným rozdělením. Tyto realizace jsou nazývány náhodná čísla.** Jen velmi omezené množství problémů lze řešit s použitím malého počtu náhodných čísel. Ve většině případů je třeba generovat velké množství náhodných čísel. Zpracování potřebného velkého množství náhodných čísel a následných simulací výpočtů je prakticky proveditelné pouze s využitím počítače.

Požadavky na vlastnosti generátoru se liší v závislosti na jeho aplikaci. K obvyklým požadavkům patří rovnoměrné pokrytí celé množiny generovaných hodnot, nízká korelace mezi prvky posloupnosti apod. **Volba generátoru náhodných čísel a způsob jeho realizace ovlivňuje rychlost výpočtu i přesnost výsledků.** Generování náhodných čísel s požadovaným rozdělením se provádí obvykle ve dvou krocích. Nejprve je pomocí primárního generátoru generována posloupnost náhodných, vzájemně nezávislých čísel s rovnoměrným rozdělením. Z této posloupnosti je vhodnou transformací vytvořena posloupnost čísel s požadovaným rozdělením. Volba transformace a způsob její implementace je většinou kompromisem mezi dosaženou přesností generovaného rozdělení, rychlostí výpočtu a paměťovými nároky.

Mezi základní typy generátorů náhodných čísel patří:

- **Fyzikální generátory** – pro generování náhodných čísel využívá zvolený fyzikální princip s náhodnou charakteristikou (např. házení kostkou, vrh jehlou v Buffonově úloze, generátor šumu, růst krystalů, vhodný kvantový jev atp.). Dnes se používají zřídka.
- **Tabulky náhodných čísel** – např. čísla z telefonního seznamu, sčítání lidu atp. Dnes se používají zřídka.
- **Výpočetní/softwarové metody** – nejčastěji používané a ty jsou také aplikovány.

Generátory pseudonáhodných čísel využívají nejčastěji rekurentní²²⁰ algoritmy pro generování náhodných posloupností. Posloupnost pseudonáhodných čísel je ve skutečnosti zcela deterministická, neboť vzniká pomocí deterministického předem naprogramovaného algoritmu, avšak má náhodné vlastnosti. Generovaná posloupnost je opakovatelná. Rekurentní algoritmy vyžadují před použitím inicializaci, spočívající v zadání výchozí hodnoty nebo vektoru. Pro daný výchozí vektor je generována vždy stejná posloupnost. Při konkrétní implementaci bývá kromě možnosti explicitního zadání výchozího vektoru také možnost náhodné inicializace. Při ní je pro vytvoření vstupního vektoru použita nějaká informace mající v podstatě téměř náhodný charakter, např. okamžitá hodnota systémového času. Po jistém počtu členů se generovaná posloupnost cyklicky opakuje. Délka tohoto cyklu se nazývá **perioda pseudonáhodného generátoru**. Při praktickém použití by měla být perioda posloupnosti tak dlouhá, aby při simulacích nedošlo k opakování.

Generátor pseudonáhodných čísel (tzv. rekurentní typ) je implementován také v programu Anthill, viz také první zmínka v Příkladu 27.4 a příklady v této kapitole. Perioda

²⁸²⁵⁸⁹⁹³³ – 1, které bylo vypočteno v r. 2018, viz [13] <https://vtm.zive.cz/clanky/amatersky-nadsenec-objevil-dosud-nejvetsi-zname-prvocislo/sc-870-a-196562/default.aspx>. V budoucnu se jistě objeví další ještě větší prvočísla ☺.

²²⁰ **Rekurentní** znamená vracející se, návratný, znovu se vyskytující, opakující se. Rekurze je způsob programování, při němž je určitá procedura nebo funkce znovu volána dříve, než je dokončeno její předchozí volání.

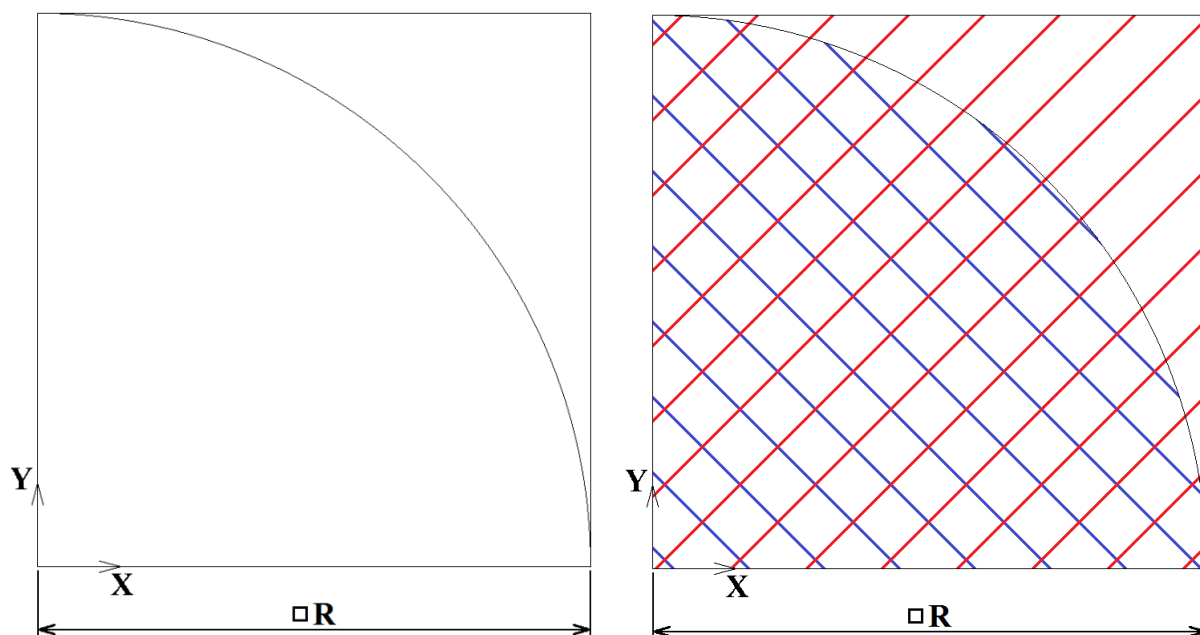
pseudonáhodného generátoru v sw Anthill je $2^{32} = 4.294967296 \times 10^9$ a generátor lze také přímo nastavit parametrem „random seed“, viz také Obr. 27.28, nebo nechat volbu na sw.

Vysoce sofistikované typy pseudonáhodných generátorů, a postupy jakými se vytvářejí, jsou jedním z klíčových prostředků moderní kryptografie, což ale není tématem této knihy ☺.

Samostatným oborem statistiky a pravděpodobnosti je také testování sekvencí náhodných nebo pseudonáhodných čísel, tj. jak dalece jsou náhodná, či jak splňují dané požadavky.

28.3 Příklady

Příklad 28.1: Klasickou úlohou metody Monte Carlo je zjištění hodnoty Ludolfova čísla π . Při jeho odvozování je možno vycházet z geometrické definice pravděpodobnosti při porovnání plochy čtverce o hraně R a plochy vepsané čtvrtkružnice o stejném poloměru R , viz Obr. 28.3.



Obr. 28.3 Čtverec o hraně R s vepsanou čtvrtkružnicí o poloměru R .

Při odvozování čísla π není nutné vždy vycházet s definicí délek (Buffonova úloha v Kapitole 28.1), ale také z geometrické definice porovnávání ploch, což je předvedeno právě v tomto příkladu.

Vychází se ze šrafovaných ploch na Obr. 28.3. Z poměru ploch čtvrtkružnice $A_1 = \frac{\pi R^2}{4}$ (modře šrafovaná plocha), která je vepsaná do čtverce, a plochy tohoto čtverce $A_2 = R^2$ (červeně šrafovaná plocha), vyplývá $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi}{4}$.

Jestliže se bude generovat N_{celkem} náhodných bodů o souřadnicích $x \in \langle 0; R \rangle$ a $y \in \langle 0; R \rangle$ podle rovnoměrného rozdělení pravděpodobnosti, pak počet bodů pod čtvrtkružnicí, tj. když $x^2 + y^2 \leq R^2$, bude N_f .

Pak je možno prohlásit, že pravděpodobnost $P_f = P_{x^2+y^2 \leq R^2} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi}{4} \approx \frac{N_f}{N_{celkem}}$.

Odtud vyplývá

$$\pi \approx \frac{4N_f}{N_{celkem}}, \quad (28.2)$$

kde s rostoucím počtem N_{celkem} by se měla zmenšovat chyba stanovení π .

Dalším problémem je generování náhodných bodů podle rovnoměrného rozdělení z intervalu $x, y \in \langle 0; R \rangle$. Pomineme-li sw řešení, viz následující Příklad 28.2, pak jej lze realizovat ručně, např. pomocí náhodného házení malých bodů a vyhodnocování polohy bodů, zda jsou pod čtvrtkružnicí anebo nad ní.

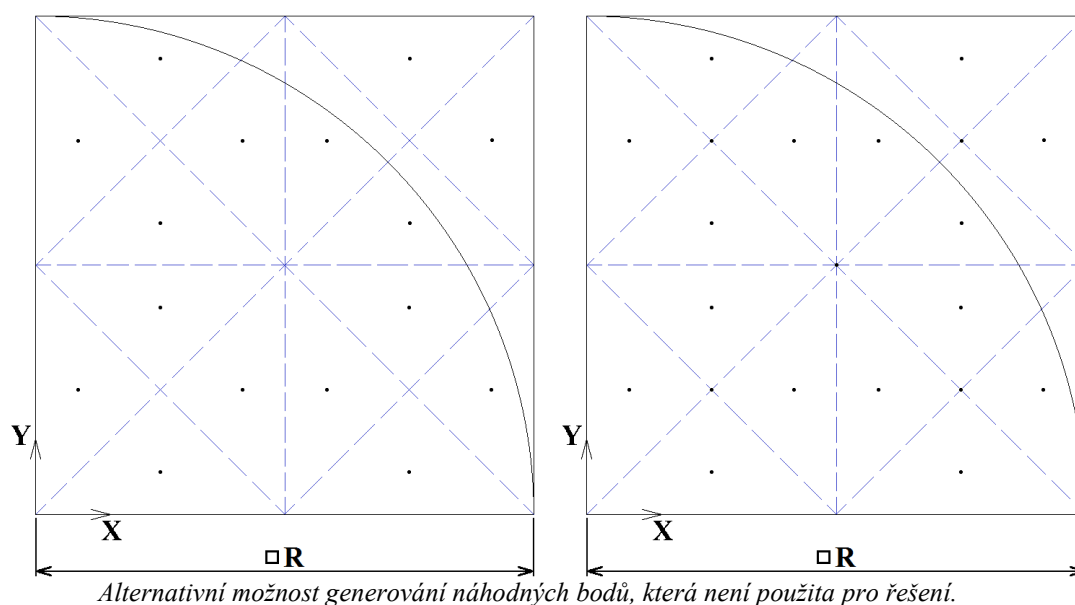
Další možností je generování náhodných bodů tak, že se celá oblast proloží stejnými trojúhelníky a v těžištích těchto trojúhelníků bude hledaný bod²²¹, případně je možné ještě přidat body do vrcholů trojúhelníků uvnitř čtvercové plochy. Zřejmě lepší možností generování náhodných bodů je pomocí přesně definované čtvercové bodové mřížky a vyhodnocování četnosti bodů pod čtvrtkružnicí. Použití druhé varianty je aplikované v praktickém řešení.

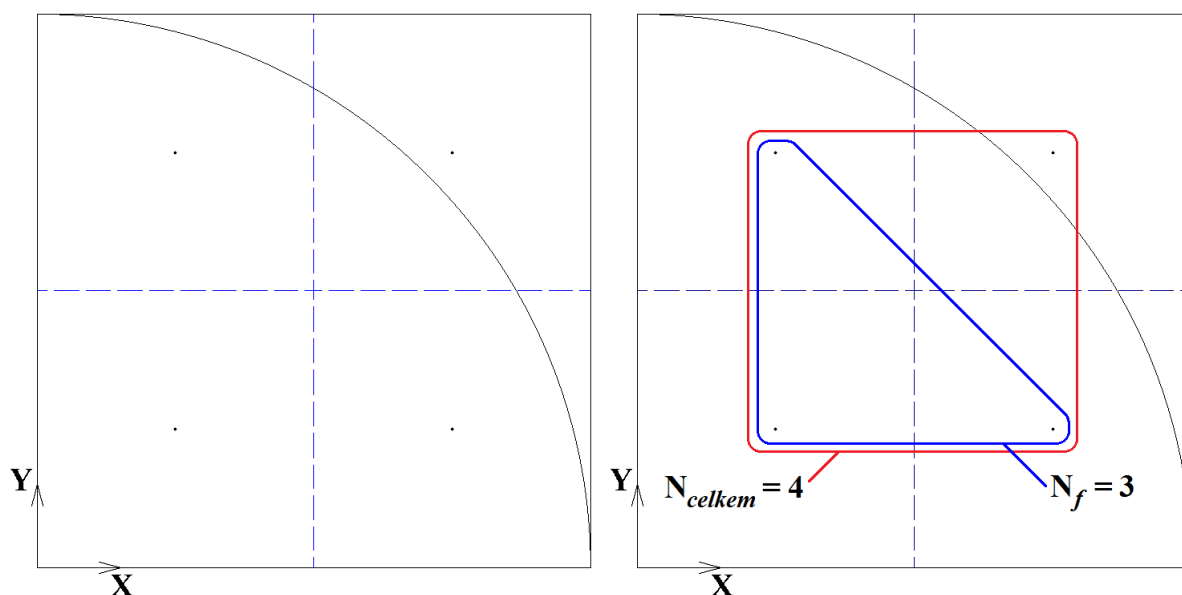
Navíc, existuje také možnost vygenerování sítě konečných prvků ve vhodném sw a převzít uzly elementů jako náhodně generované body, ale objevuje se zde otázka, jak vyhodnotit bod, který leží na čtvrtkružnici (patří pod či nad kružnicí?).

Generování rovnoměrného rozdělení náhodných bodů lze provést např. rozdělením na rovnoměrný počet čtverců, v jejichž každém těžišti bude umístěn generovaný bod.

Například pro první velmi jednoduché dělení na 4 čtverce, viz Obr. 28.4, je zřejmé, že počet bodů pod čtvrtkružnicí je $N_f = 3$ a počet všech bodů je $N_{celkem} = 4$.

221

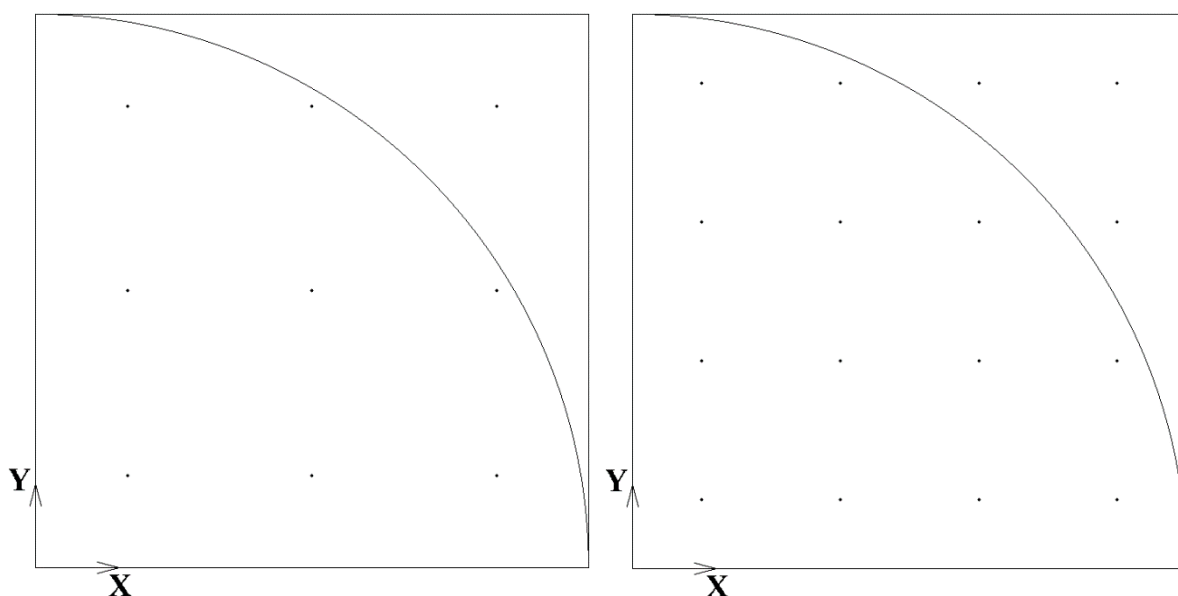




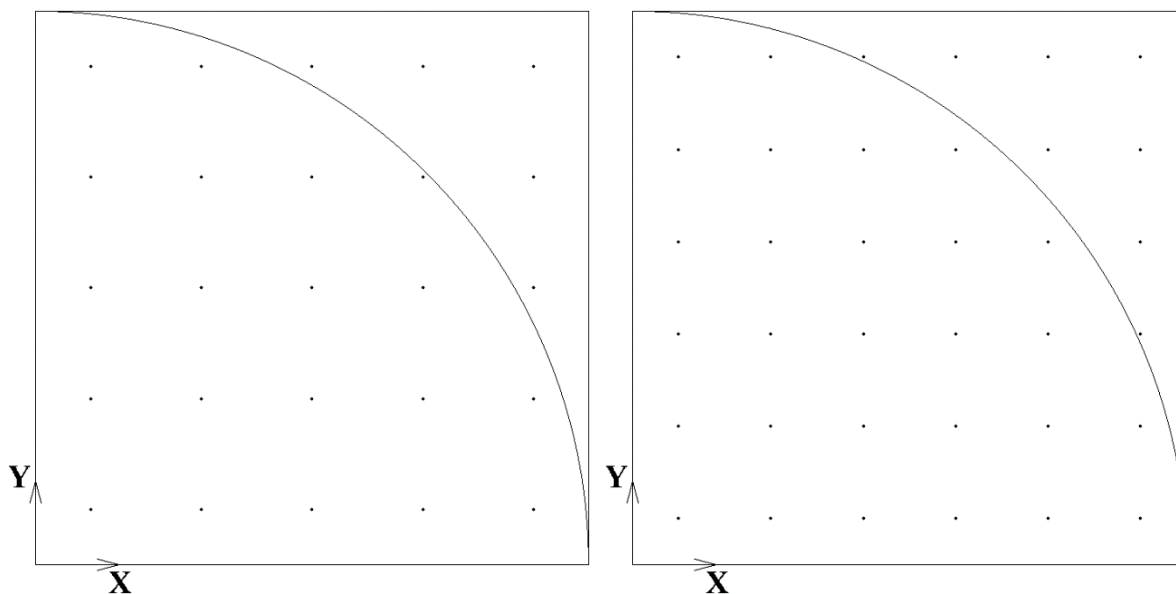
Obr. 28.4 Čtverec s vepsanou čtvrtkružnicí - stanovení čísla π pomocí $N_{celkem} = 4$ bodů.

Potom, dle (28.2), platí $\pi \approx \frac{4 \times 3}{4} = 3$, s relativní chybou $100 \frac{\pi - 3}{\pi} \cong 4.51\%$. Při malém počtu bodů je chyba čísla π poměrně malá.

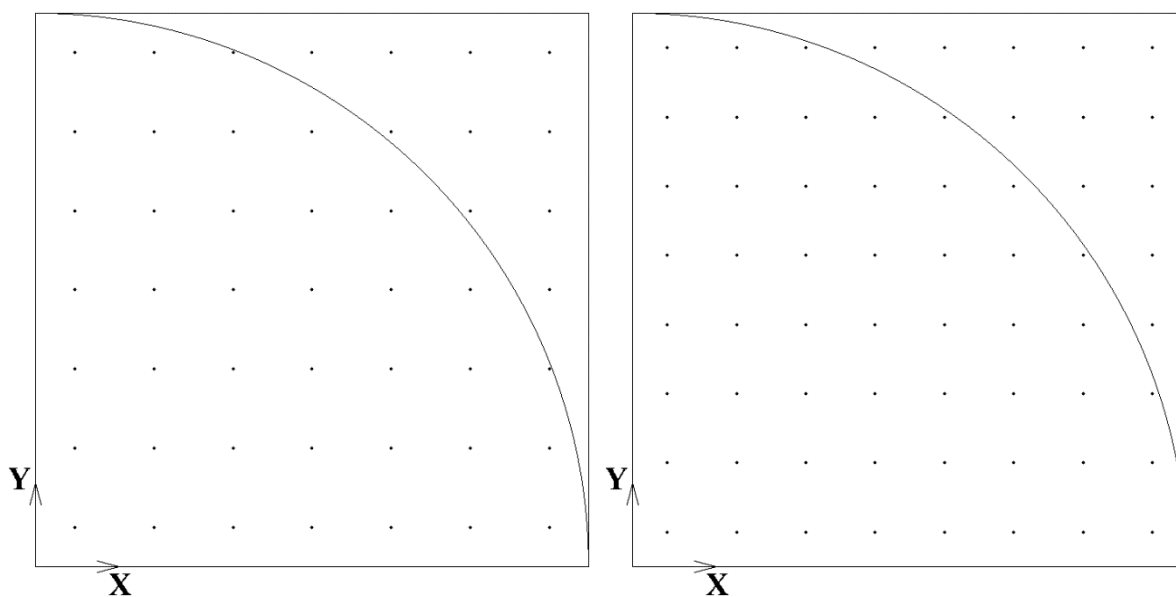
Zvětšováním počtu bodů mřížky lze stanovit číslo π přesněji, viz Obr. 28.5 až 28.9. Nicméně, je zřejmé, že ruční generování bodů je příliš pracné a pro tento účel je vhodnější využít vhodný sw ☺, viz např. následující Příklad 28.2.



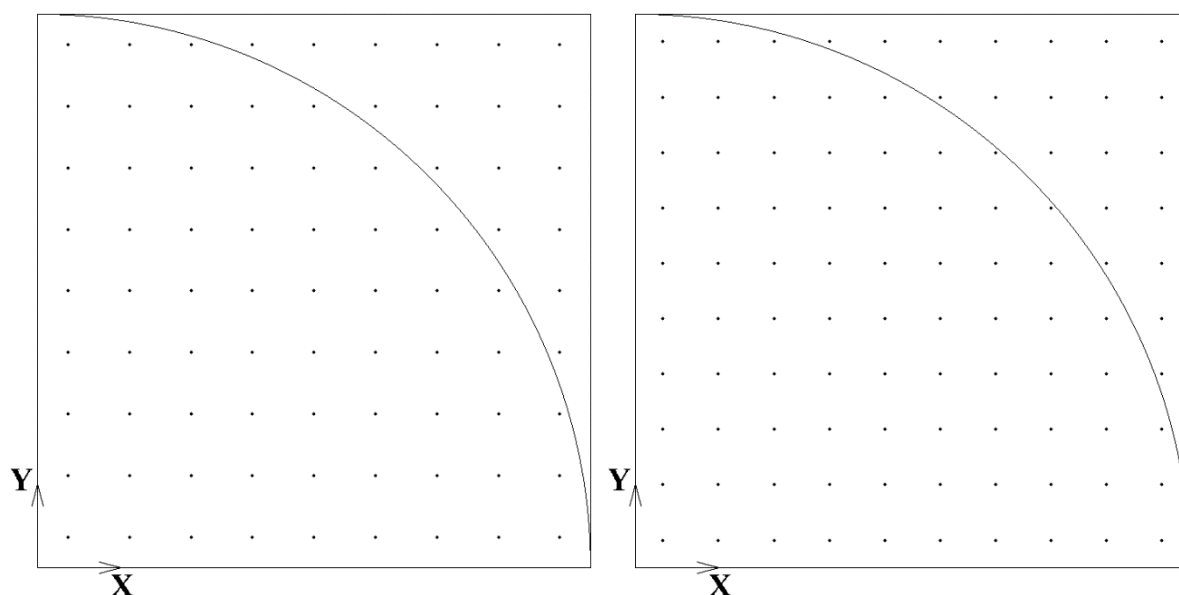
Obr. 28.5 Čtverec s vepsanou čtvrtkružnicí - stanovení čísla π pomocí (a) $N_{celkem} = 9$ bodů, (b) $N_{celkem} = 16$ bodů.



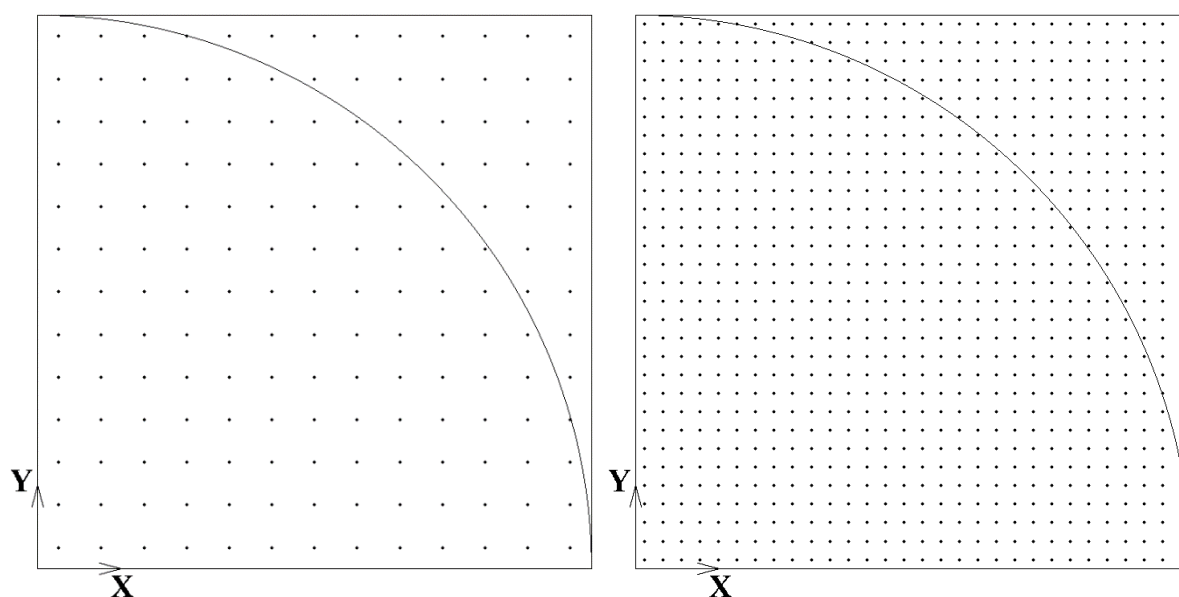
Obr. 28.6 Čtverec s vepsanou čtvrtkružnicí - stanovení čísla π pomocí (a) $N_{celkem} = 25$ bodů, (b) $N_{celkem} = 36$ bodů.



Obr. 28.7 Čtverec s vepsanou čtvrtkružnicí - stanovení čísla π pomocí (a) $N_{celkem} = 49$ bodů, (b) $N_{celkem} = 64$ bodů.



Obr. 28.8 Čtverec s vepsanou čtvrtkružnicí – stanovení čísla π pomocí (a) $N_{celkem} = 81$ bodů, (b) $N_{celkem} = 100$ bodů.



Obr. 28.9 Čtverec s vepsanou čtvrtkružnicí – stanovení čísla π pomocí (a) $N_{celkem} = 169$ bodů, (b) $N_{celkem} = 900$ bodů.

Výsledky, včetně relativních chyb výpočtu čísla π , jsou uvedeny v Tab. 28.1. Z výsledků je jasně patrný trend konvergence²²² ke skutečné hodnotě π .

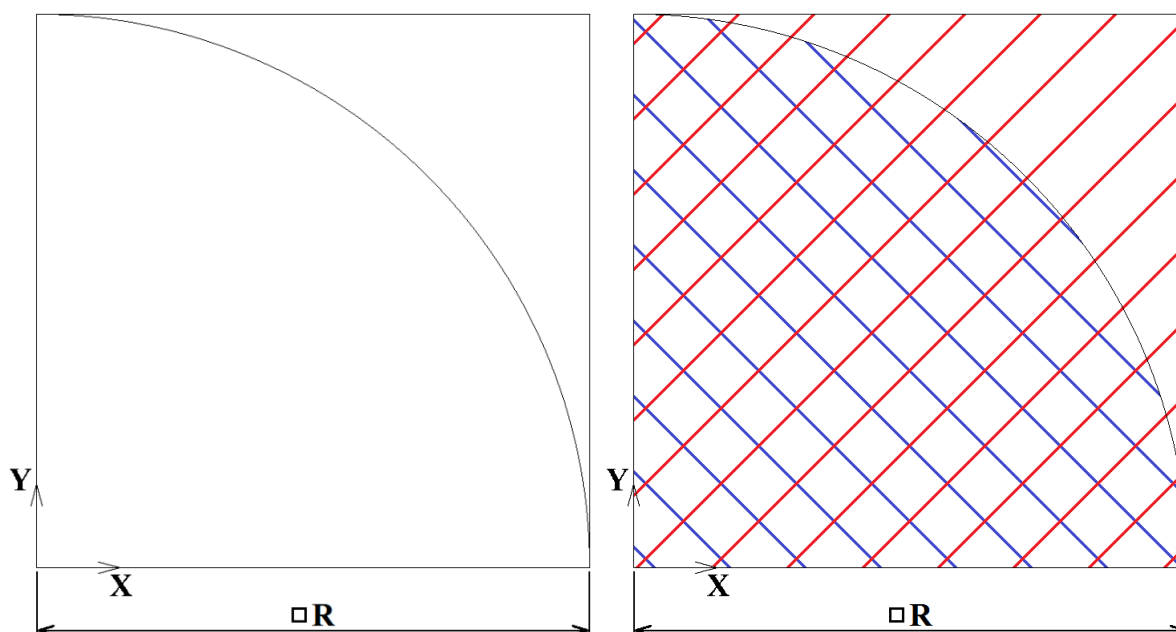
²²² **Konvergence** (z lat. con-vergere = ohýbat k sobě) - je pojem označující přibližování, sbíhání či sblížování.

Tab. 28.1 Stanovení čísla π metodou Monte Carlo.

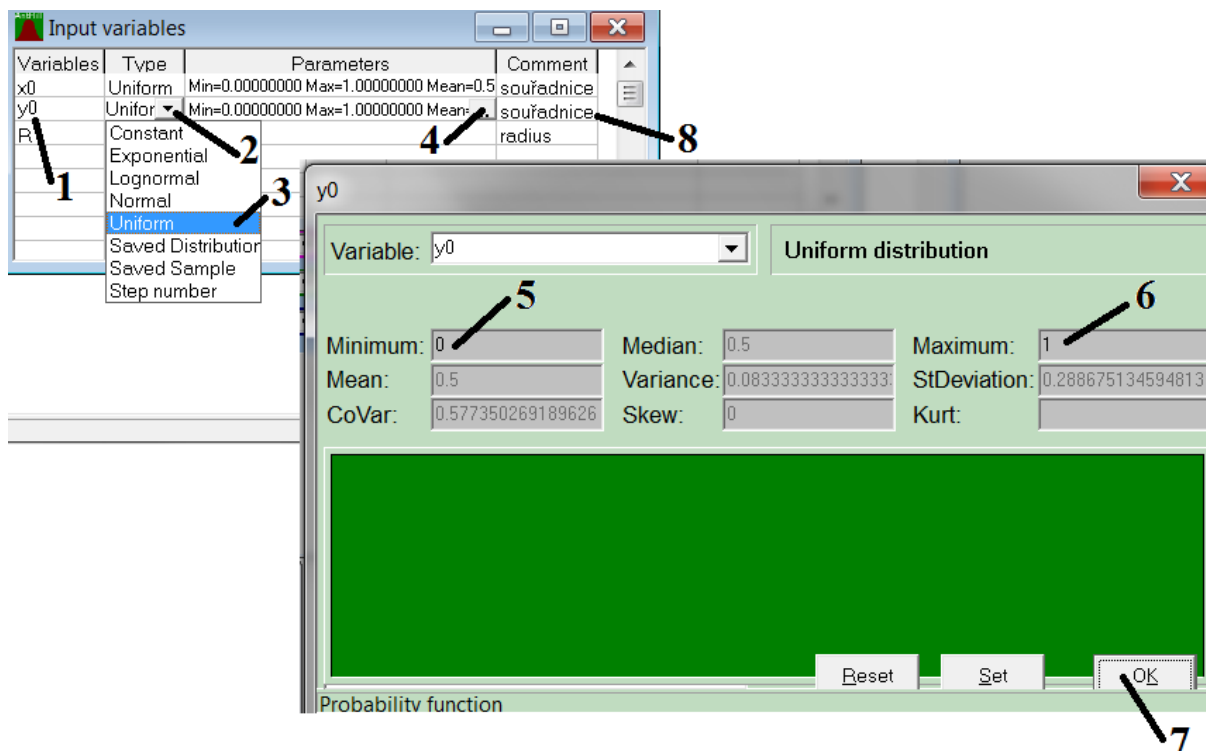
Počet bodů N_{celkem}	Počet bodů N_f	Přibližná hodnota čísla π_{MC} (metoda MC)	Relativní chyba $100 \frac{\pi - \pi_{\text{MC}}}{\pi} \%$
4	3	3	4.507
9	8	3.5556	-13.177
16	13	3.25	-3.451
25	20	3.2	-1.859
36	28	3.1111	0.970
49	39	3.1837	-1.339
64	52	3.25	-3.451
81	64	3.1605	-0.602
100	79	3.16	-0.586
121	96	3.1736	-1.017
144	112	3.1111	0.970
169	135	3.1953	-1.708
400	316	3.16	-0.586
900	707	3.1422	-0.020

Řešení stejné úlohy pomocí programu Anthill je vysvětleno v následujícím Příkladu 28.2.

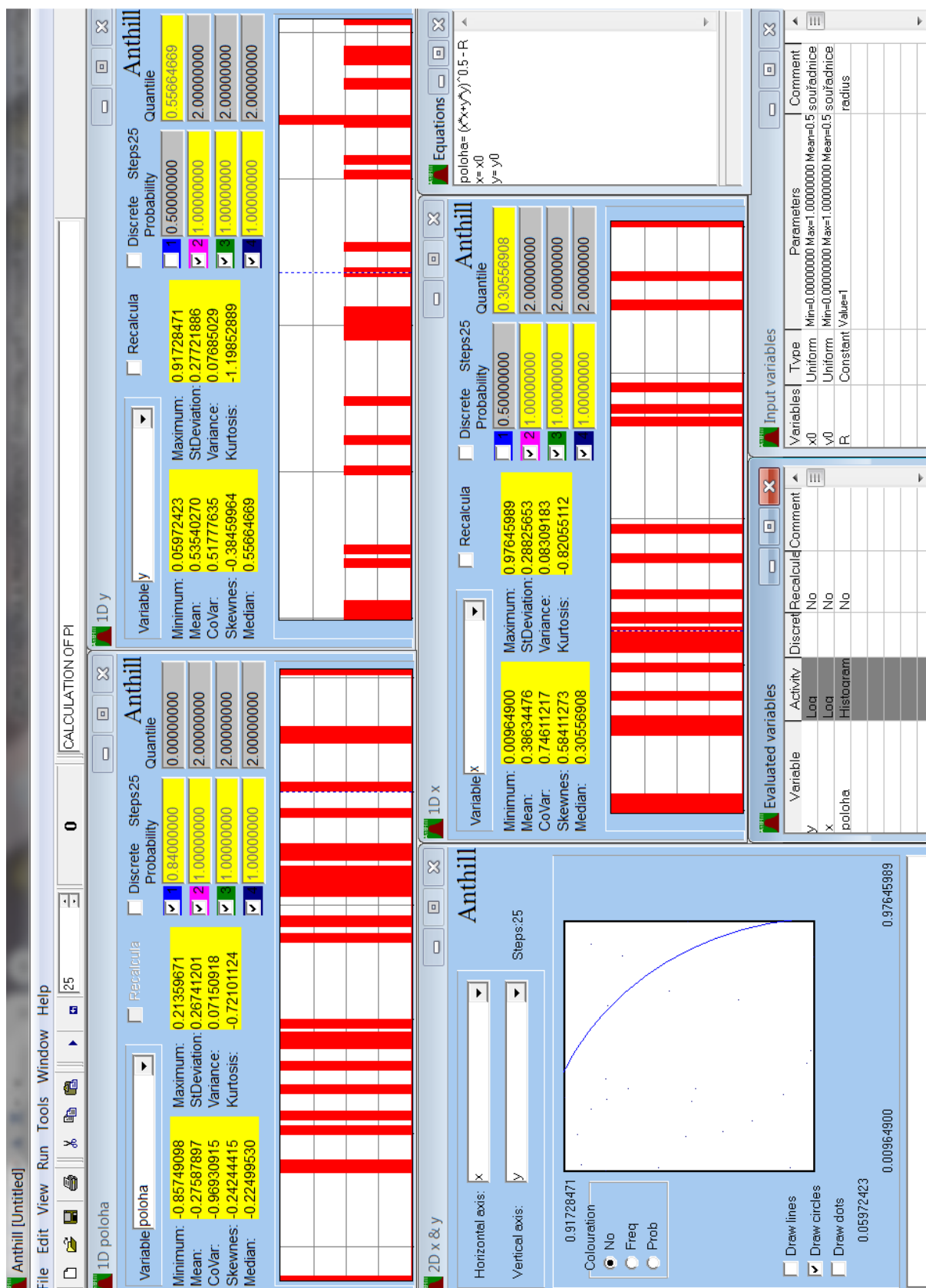
Příklad 28.2: Obdobným postupem jako v Příkladu 28.1, určete hodnotu čísla π , viz Obr. 28.10. Pro řešení použijte sw Anthill.

Obr. 28.10 Čtverec o hraně R s vepsanou čtvrtkružnicí o poloměru R .

V sw Anthill je nutné nejprve nadefinovat histogramy náhodné proměnné rovnoměrného rozdělení $x_0 \in \langle 0; R = 1 \rangle$ a $y_0 \in \langle 0; R = 1 \rangle$, kde je zvolen rozměr $R = 1$. To se provádí v okně „Input variables“, viz Obr. 28.11 a 28.12.



Obr. 28.11 Zadávání histogramu náhodné proměnné rovnoměrného rozdělení $y_0 \in \langle 0; 1 \rangle$ (Anthill sw – ad 1 zadat název y_0 , ad 2 a 3 – zvolit Uniform, ad 4 až 6 zobrazit histogram a zadat minimum a maximum, ad 7 zavřít histogram, ad 8 volitelný psaný komentář uživatele).



Obr. 28.12 Programování a výsledky v sw Anthill.

Pro možnost zobrazení výsledků je vhodné zavést funkci

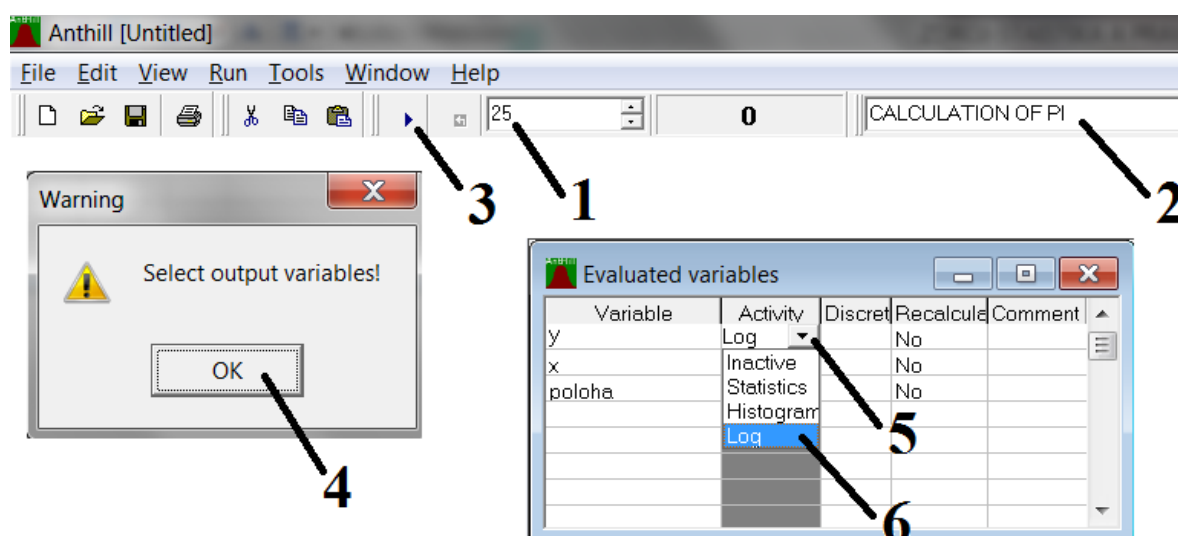
$$\text{poloha} = (x^2 + y^2)^{0.5} - R, \quad (28.3)$$

která určuje, zda se generovaný bod nachází nad nebo pod čtvrtkružnicí, viz Obr. 28.12 a Tab. 28.2. Jestliže funkce $\text{poloha} \leq 0$, tj. když $(x^2 + y^2)^{0.5} \leq R$, pak se bod nachází pod čtvrtkružnicí. V opačném případě je $\text{poloha} > 0$, tj. když $(x^2 + y^2)^{0.5} > R$, a bod se nachází nad čtvrtkružnicí.

Tab. 28.2 Programování v sw Anthill.

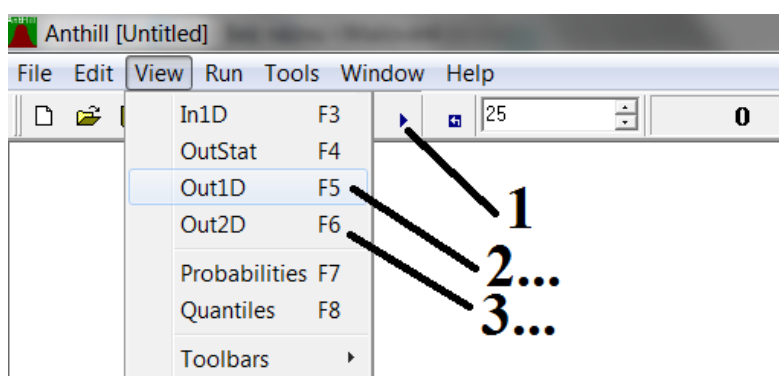
Equations poloha = (x*x + y*y)^0.5 - R x= x0 y= y0	Směr programování v sw Anthill ↑
---	--

V dalším kroku je nutné nastavení prvního výpočtu, viz Obr. 28.13 a 28.12.



Obr. 28.13 Zadávání úplného výpisu proměnné y a nastavení prvního výpočtu (Anthill sw – ad 1 zadat počet 25 náhodných simulací, ad 2 volitelný psaný komentář uživatele, ad 3 prvotní start výpočtu, který jen vyhodnotí programování, ukončí se a následně požaduje nastavit výpisy proměnných, ad 4 uzavřít okno, ad 5 a 6 nastavení výpisu proměnné y).

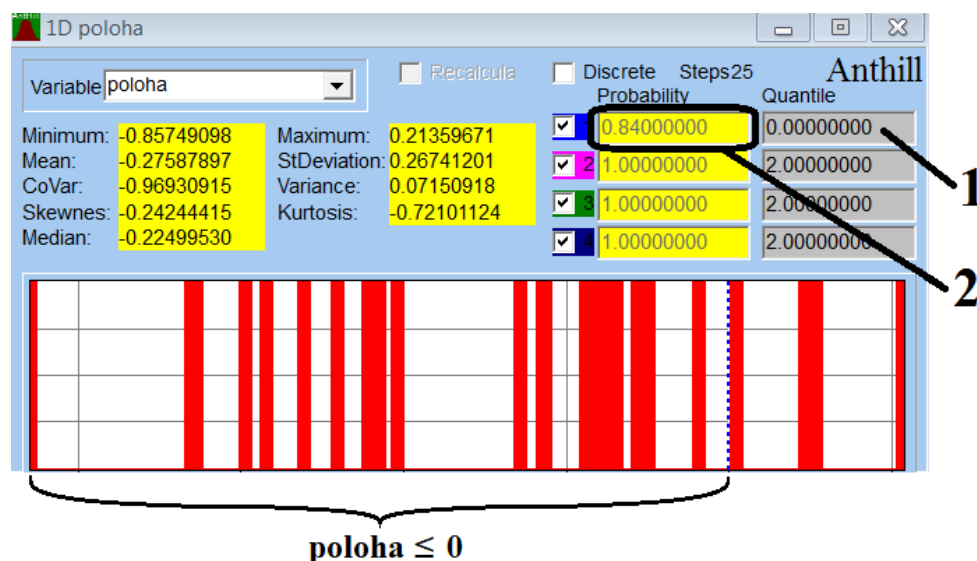
Následně je spuštěn výpočet a jsou zpracovány výsledky, viz Obr. 28.14 a 28.12.



Obr. 28.14 Zpracování výsledků v sw Anthill.

Z výsledků pro $N_{celkem} = 25$ náhodných simulací vyplývá

$$P_f = P_{x^2+y^2 \leq R^2} = P_{poloha \leq 0} = \frac{N_f}{N_{celkem}} = 0.84, \text{ viz Obr. 28.15 a 28.12.}$$



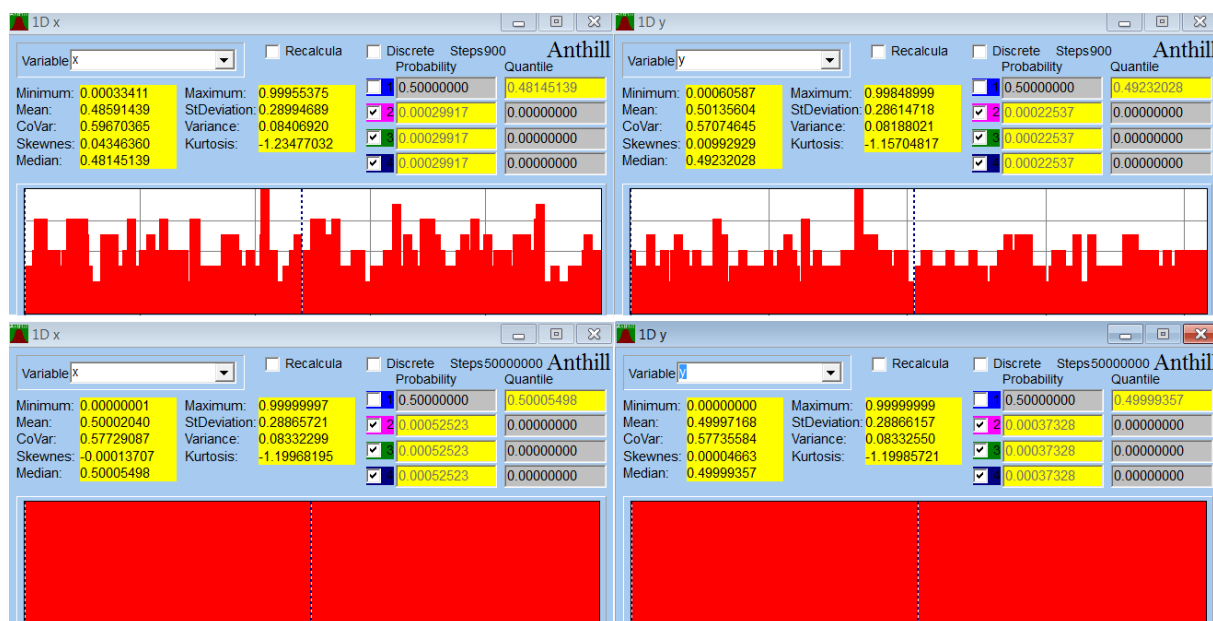
Obr. 28.15 Vyhodnocení funkce poloha (výpočet $P_f = 0.84$, při $N_{celkem} = 25$ náhodných simulací) – Anthill sw.

V souladu s rovnicí (28.2), pak platí

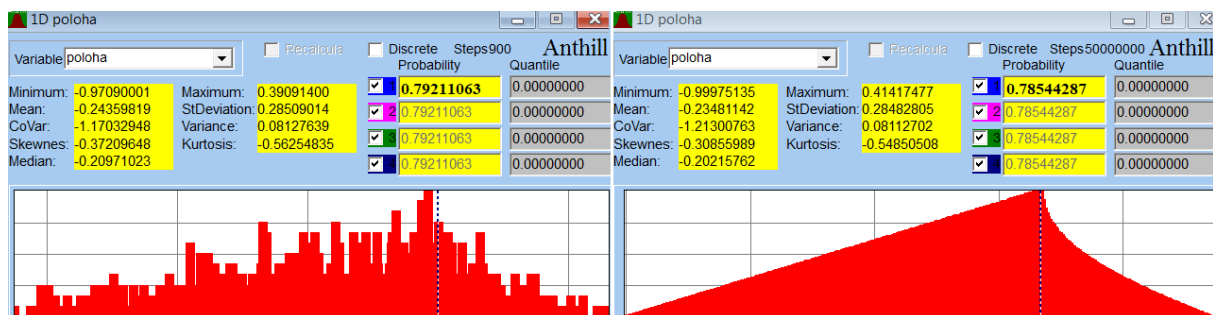
$$\pi \approx 4P_f, \quad (28.4)$$

tj. $\pi \approx 4 \times 0.84 = 3.36$.

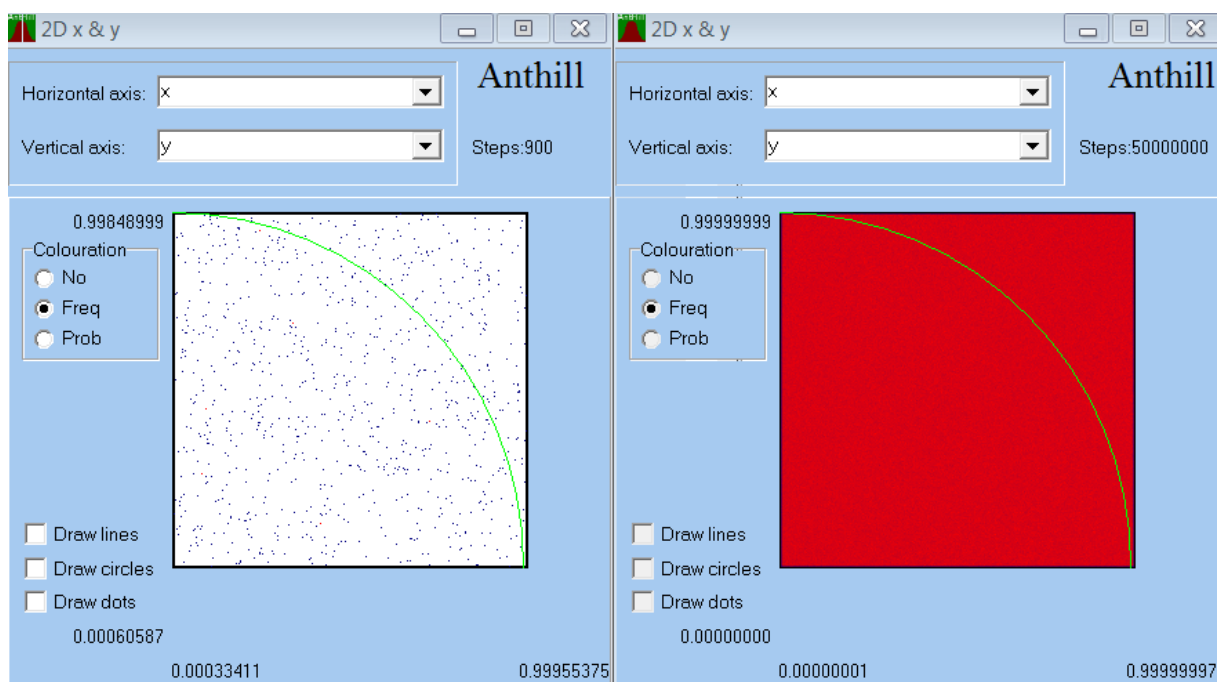
Výpočet pak lze opakovat pro různý počet simulací, viz Obr. 28.16 až 28.18 a Tab. 28.3.



Obr. 28.16 Příklady pseudonáhodného generování (realizace) rovnoměrného rozdělení souřadnic x a y v Anthill sw (a) $N_{celkem} = 900$ náhodných simulací, (b) $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací.



Obr. 28.17 Příklady pseudonáhodného generování (realizace) funkce poloha v Anthil sw (a) $N_{celkem} = 900$ náhodných simulací, (b) $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací.



Obr. 28.18 Příklady pseudonáhodného generování (realizace) souřadnic x a y v Anthil sw (a) $N_{celkem} = 900$ náhodných simulací, (b) $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací.

Tab. 28.3 Stanovení čísla π metodou Monte Carlo (Anhill sw).

Počet bodů N_{celkem}	Pravděpodobnost P_f , že bod leží pod čtvrtkružnicí	Přibližná hodnota čísla π_{MC} (metoda MC)	Relativní chyba $100 \frac{\pi - \pi_{MC}}{\pi} \text{ %}$
16	0.9375	3.7500	-19.366
25	0.84	3.3600	-6.952
100	0.78	3.1200	0.687
400	0.77224891	3.0890	1.674
900	0.79211063	3.1684	-0.855
5000	0.78991878	3.1597	-0.576
50000	0.78397074	3.1359	0.182
500000	0.7861362	3.1445	-0.094
5000000	0.78533443	3.1413	0.008

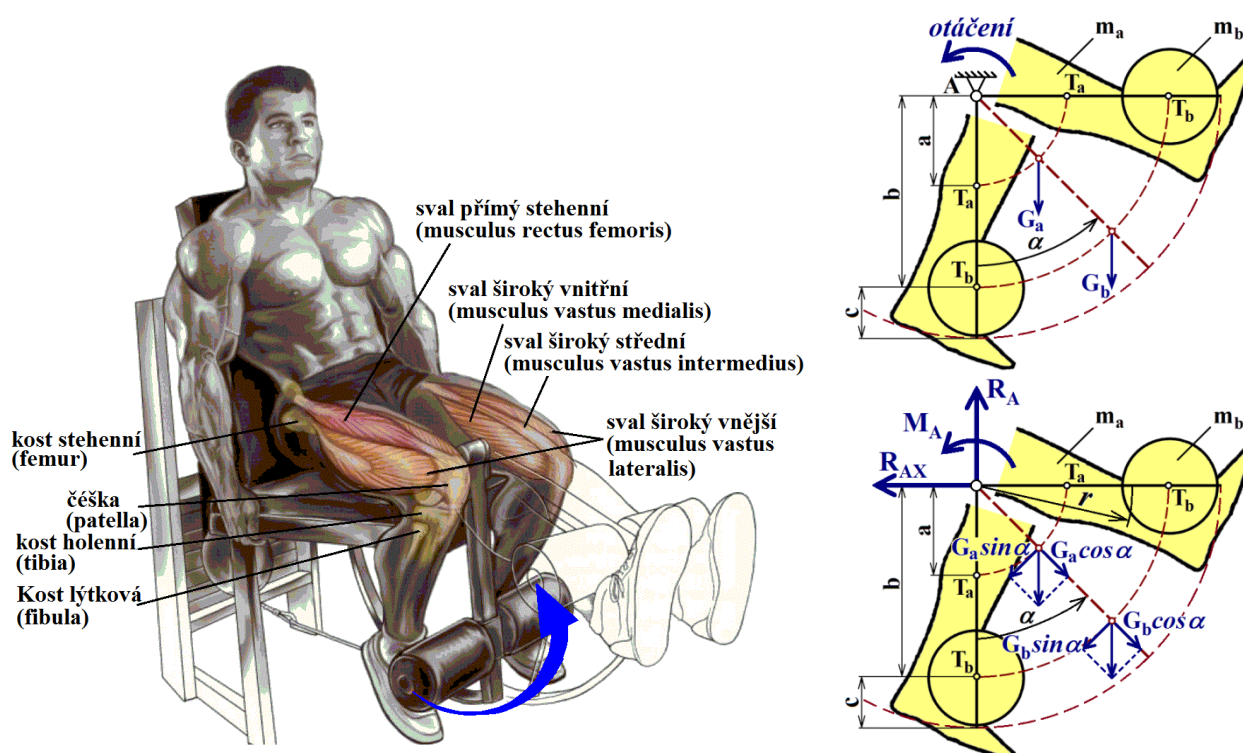
Při porovnání řešení Příkladu 28.1 a 28.2 je zřejmé, že směřují ke stejným výsledkům čísla π .

Nicméně, hodnoty z Příkladu 28.1 konvergují k číslu π trochu rychleji, avšak příprava i vyhodnocení bodů ručním způsobem je pracné a zdouhavé.

Naproti tomu, hodnoty z Příkladu 28.2 konvergují k číslu π trochu pomaleji, avšak příprava i vyhodnocení bodů je rychlejší, efektivnější a samozřejmě automatizované počítačem.

Příklad 28.3: Cvičení svalů stehen předkopáváním, viz Obr. 28.19. Pomocí známých předpokladů statické úlohy, postupů a výsledků Příkladu 23.6, vyhodnoťte pravděpodobnostním způsobem, svaly generovaný zátěžný moment $M_{A(\alpha)}$ při cvičení. Zaměřte se jen na jeho maximum. Statistické údaje jsou dané ohraničenými histogramy normálního rozložení v sw Anthill a úlohu řešte také v sw Anthill.

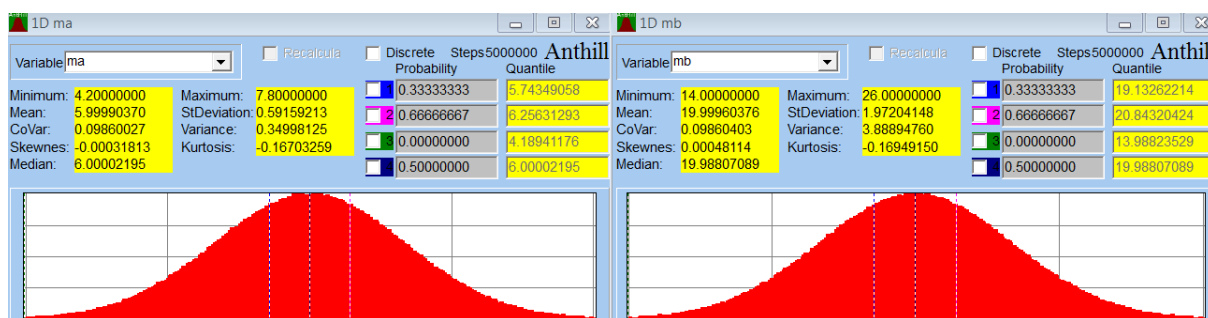
Dáno: Odvozený vztah pro zátěžný moment $M_{A(\alpha)} = 2G_a a \sin \alpha + G_b b \sin \alpha$, viz Příklad 23.6., tíhové zrychlení $g = 9.807 \text{ m s}^{-2}$, hmotnost zvedané končetiny včetně boty $m_a = 6 \pm 30\% \text{ kg}$, hmotnost celé zvedané/otáčené konstrukce $m_b = 20 \pm 30\% \text{ kg}$, rozměry $a = 0.25 \pm 15\% \text{ m}$, $b = 0.5 \pm 25\% \text{ m}$, viz Tab. 28.4 a Obr. 28.20 až 28.21.



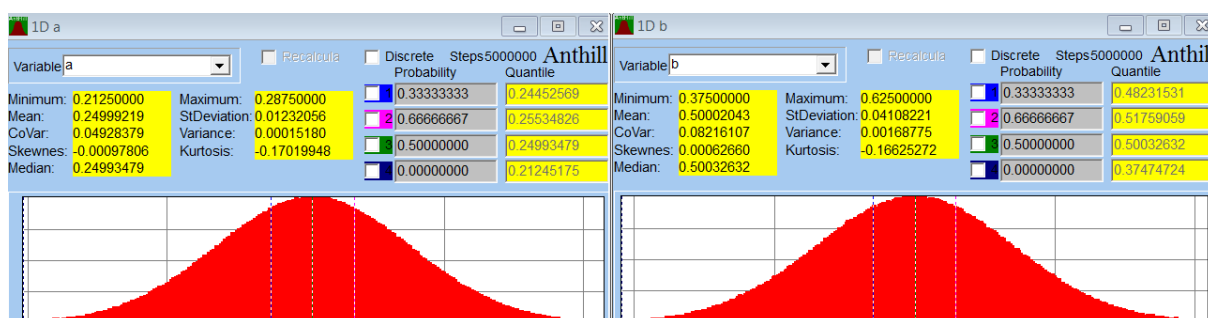
Obr. 28.19 Cvičení stehén předkopáváním.

Tab. 28.4 Histogramy vstupních hodnot (Anthill sw, $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací).

Parametr	Min	Medián	Max	Směrodatná odchylka	Referenční histogram v sw Anthill	
Hmotnost m_a /kg/	4.2	6.000	7.8	0.592	N1-30.dis	Ohraničené normální rozdělení $\pm 30\%$, viz Obr. 28.20
Hmotnost m_b /kg/	14	19.988	26	1.972	N1-30.dis	
Délka a /m/	0.213	0.250	0.288	0.012	N1-15.dis	Ohraničené normální rozdělení $\pm 15\%$, viz Obr. 28.21
Délka b /m/	0.375	0.500	0.625	0.041	N1-25.dis	Ohraničené normální rozdělení $\pm 25\%$, viz Obr. 28.21



Obr. 28.20 Histogramy ohraničeného normálního rozdělení – Anthill sw, $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací (a) hmotnost $m_a = 6 \pm 30\%$ kg, (b) hmotnost $m_b = 20 \pm 30\%$ kg.

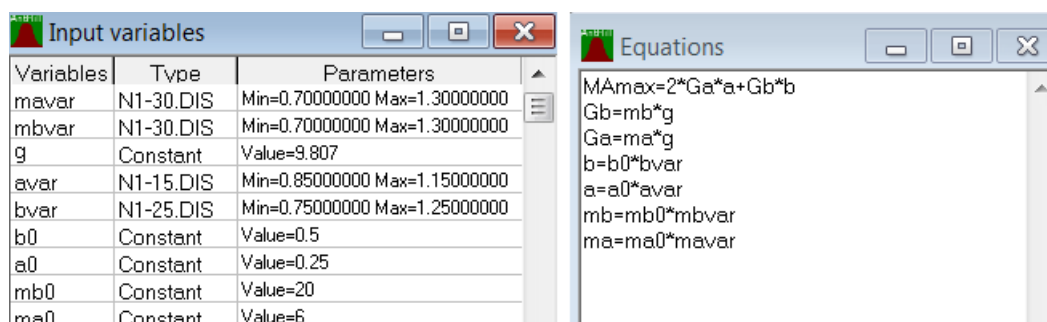


Obr. 28.21 Histogramy ohraničeného normálního rozdělení – Anthill sw, $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací (a) rozměr $a = 0.25 \pm 15\%$ m, (b) rozměr $b = 0.5 \pm 25\%$ m.

Z rozboru výsledků Příkladu 23.6, vyplývá pro maximální moment

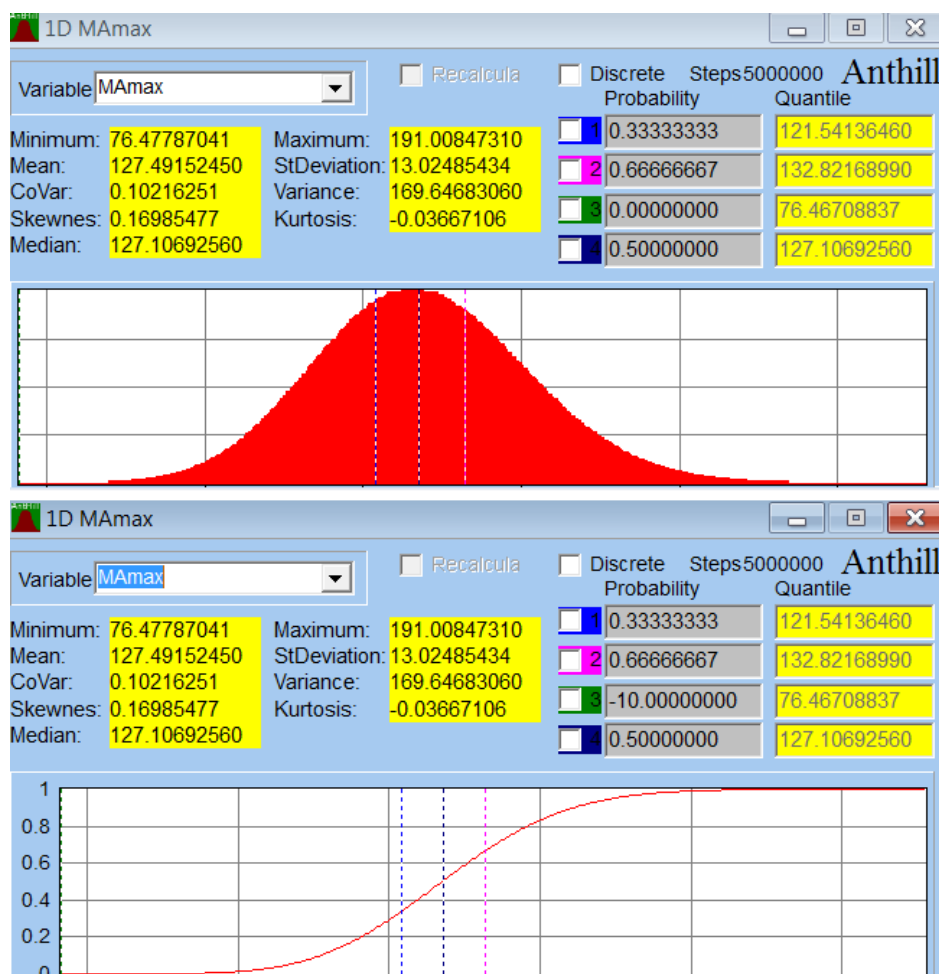
$$M_{A\text{MAX}} = M_A\left(\alpha = \frac{\pi}{2}\right) = 2G_a a + G_b b. \quad (28.5)$$

Programování v sw Anthill je naznačeno na Obr. 28.22.



Obr. 28.22 Zadávání úlohy v sw Anthill.

Po výpočtu zvolených $N_{celkem} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací v sw Anthill, vyplývají pro $M_{A\text{MAX}}$ hodnoty uvedené a znázorněné v histogramu a distribuční funkci na Obr. 28.23 a Tab. 28.5. Na běžném počítači trvá výpočet několik minut. Uvedený histogram již není symetrický, jeho medián i aritmetický průměr jsou posunuty „mírně“ doleva.



Obr. 28.23 Histogram a distribuční funkce vypočteného maximálního momentu $M_{A\text{MAX}}$ – Anthill sw (Min = 76.478 N m, Medián = 127.107 N m, Max = 191.008 N m, směrodatná odchylka je 13.025 N m, $N_{\text{celkem}} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací).

Tab. 28.5 Histogramy výstupních hodnot (Anthill sw, $N_{\text{celkem}} = 5 \times 10^7$ náhodných simulací).

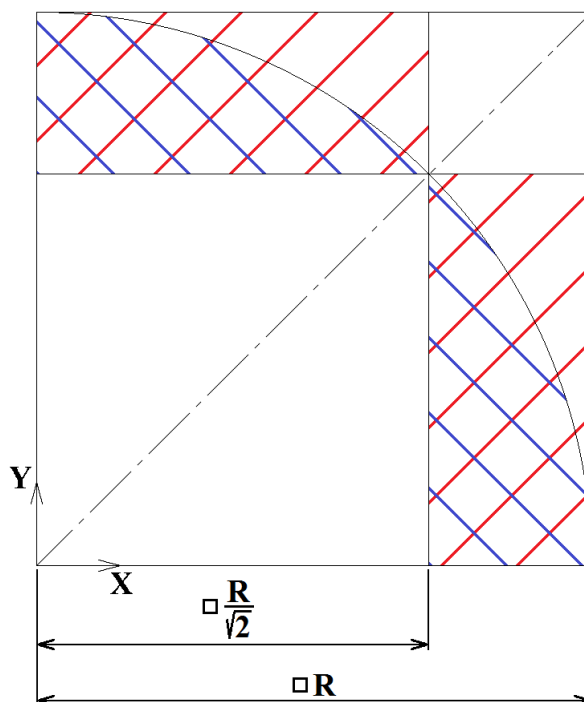
$M_{A\text{MAX}} / \text{N m} /$							
Min	První tercil	Medián	Aritmetický průměr	Druhý tercil	Max	Směrodatná odchylka	Referenční vztah
76.478	121.541	127.107	127.492	132.822	191.008	13.025	(28.5)

28.4 Otázky k pochopení látky

1. Co je metoda Monte Carlo?
2. Co znamená zkratka MC?
3. K čemu lze použít metodu MC?
4. Jak probíhá řešení metodou MC?
5. Je masové rozšíření metody MC možné bez počítačů a proč tomu tak je nebo není?
6. Uveďte některé informace z historie metody MC?
7. Uveďte některé výhody a nevýhody metody MC.
8. Jaké znáte typy náhodných generátorů?
9. Co je perioda pseudonáhodného generátoru?
10. Jakou periodu pseudonáhodného generátoru má sw Anthill?
11. Odvoďte stanovení čísla π pomocí metody MC, viz Příklad 28.1?

28.5 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

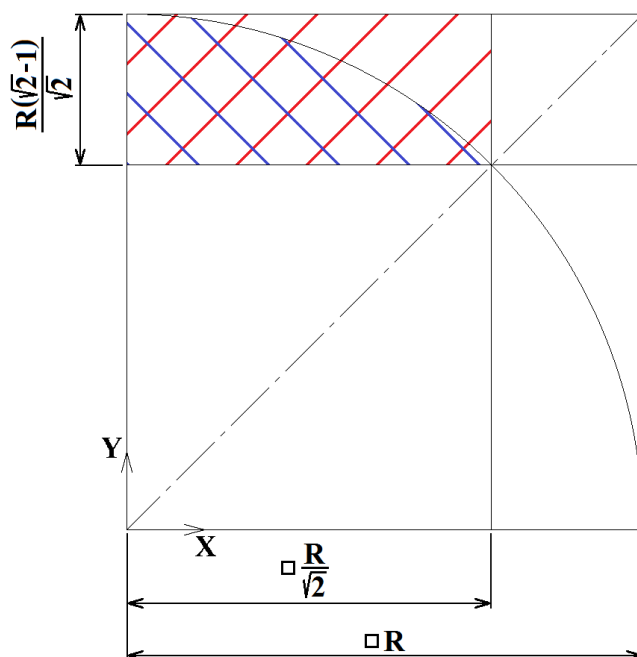
1. Vtip:
Z kasina v Monte Carlu vycházejí dva muži. Jeden jen v trenýrkách a ten druhý úplně nahý. Ten nahý povídá tomu v trenýrkách: „Človče, já Tě fakt obdivuju. Vždycky víš kdy přestat“.
2. Prostudujte si přednášku „Simulační metody typu Monte Carlo“, viz [4] http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/sbs_tema03.pdf.
3. Proved'te experimentální realizaci Buffonova experimentu, viz Kapitola 28.1, a stanovte hodnotu čísla π .
4. Metoda MC se dá použít také pro stanovení objemů a kořenů délky rostlin, viz první díl této knihy [1] (Kapitola 17.6 a Příklad 17.3). Nicméně, použití metody MC by asi nebylo v tomto příkladu nejefektivnější.
5. Pokuste se odvodit alternativní metodu pro výpočet čísla π dle Obr. 28.24.


 Obr. 28.24 Alternativní výpočet čísla π .

Odpověď: Podobně jako při řešení Příkladu 28.1, vychází se z poměru ploch pod čtvrt

kružnicí a ploch obdélníků, tj. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{\frac{\pi R^2}{4} - \left(\frac{R}{\sqrt{2}}\right)^2}{2 \times \frac{R(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}} \times \frac{R}{\sqrt{2}}}$ a $\pi \approx 4(\sqrt{2} - 1)P_f + 2$, kde

pravděpodobnost P_f může být jednodušeji stanovena např. jen z vyhodnocování polohy bodů na ploše znázorněné na Obr. 28.25.


 Obr. 28.25 Alternativní výpočet čísla π .

V případě, že byste se pokusili tuto úlohu programovat, např. v sw Anthill, pak stačí jen mírně pozměnit zadání souřadnic náhodné proměnné rovnoměrného rozdělení $x_0 \in \langle 0; \frac{R}{\sqrt{2}} \rangle$ a $y_0 \in \langle \frac{R}{\sqrt{2}}; R \rangle$, kde je výhodné zvolit $R = 1$, podobně jako v Příkladu 28.2. Konvergence k hodnotě π je v tomto případě mírně rychlejší ☺.

28.6 Reference ke kapitole 28

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Monako, Monte Carlo (Co navštívit a vidět v Monaku, v Monte Carlu, průvodce, zajímavá místa, turistické atrakce, jak se dostat z Nice do Monaka) - Cesty po světě (cestyposvete.cz), <http://www.cestyposvete.cz/monako.html>.
- [3] Projekt Manhattan – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Projekt_Manhattan.
- [4] Simulační metody typu Monte Carlo (vsb.cz), http://fast10.vsb.cz/krejsa/studium/sbs_tema03.pdf.
- [5] Sundararajan, C. et al: *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [6] Fabián, F, Kluiber, Z.: Metoda Monte Carlo a možnosti jejího uplatnění, Prospektrum spol. s r. o., ISBN 80-7175-058-1, Praha, 1998, pp.152.
- [7] Guštar, M.: Moderní metody simulace systémů – metoda SBRA, disertační práce, FEI VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 2002, pp.144.
- [8] Haldar A., Mahadevan S.: Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design, John Willey & Sons, Inc, New York, 2001, ISBN 0-471-33119-8.
- [9] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar M. et al: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software*, 2nd edition, ITAM CAS, Prague, 2003, Czech Republic, ISBN 80-386246-08-6, pp.471 (cd attached).
- [10] Landau, D.P., Binder, K., A Guide to Monte Carlo Simulations in Statistical Physics, 5th edition, ISBN 978-1-108-49014-6, Cambridge University Press, 2021, pp. 1-564.
- [11] Teplý, B., Novák, D.: Spolehlivost stavebních konstrukcí, Teorie, numerické metody, navrhování, software, (2. opravené vyd.), ISBN 80-214-2577-6, Brno, CERM, 2004, pp.89.
- [12] Frydrýšek, K.: *Pravděpodobnostní výpočty v mechanice I*, Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp. 1-149.
- [13] Amatérský nadšenec objevil dosud největší známé prvočíslo – VTM.cz (zive.cz), <https://vtm.zive.cz/clanky/amatersky-nadsenec-objevil-dosud-nejvetsi-zname-prvocislo/sc-870-a-196562/default.aspx>.

29. PRAVDĚPODOBNOSTNÍ POSUDEK SPOLEHLIVOSTI

Tato kapitola stručně uvádí pravděpodobnostní posudek spolehlivosti, který v současnosti patří k moderním numerickým přístupům používaným ve stochastických úlohách současné vědy a techniky.

Pravděpodobnostní posudek je mladou, ale moderní alternativou ke staršímu polopravděpodobnostnímu posudku spolehlivosti či ještě staršímu deterministickému posudku spolehlivosti.

Pravděpodobnostní pojetí posudku spolehlivosti v této kapitole využívá simulační techniky přímé metody Monte Carlo (MC).

Mezi hlavní tvůrčí postupy současných konstruktérů, a samozřejmě také biomechaniků, patří také aplikace technických norem a metod posuzování spolehlivosti a jakosti jako kritéria rozhodování (např. testování či návrh nového výrobku/implantátu či technického celku, vyhodnocení klinických zkoušek způsobu léčení, vyhodnocení pandemie, riziko ekologické havárie, investování v ekonomice atp.). Normy a posudky spolehlivosti doposud vždy procházely a také v budoucnu budou procházet různými změnami, jež souvisí s aktuálním rozvojem vědy a techniky a kritérii kvality.

Hlavním nástrojem pravděpodobnostního posudku je v této knize aplikace metody Simulation-Based Reliability Assessment (SBRA), která se začala rozvíjet v 90. letech minulého století.

Tato kapitola souvisí se statistikou a pravděpodobností a navazuje na látku vysvětlenou v Kapitole 27 až 29. Cílem je opět přispět pozitivně k posunu v přemýšlení od deterministického pojetí světa k pojetí stochastickému, které podle současného stavu vědy vystihuje nejlépe realitu.

Kapitola cíleně směřuje k aplikacím a měla by povzbudit čtenáře „nebát se“ aplikovat pravděpodobnostní posudky v oboru biomechanika potažmo v oboru mechanika.

Hlavními referencemi této kapitoly jsou autorovy publikace [1] až [3] a samozřejmě také [4] až [11] a webová stránka [12].

Autorem této kapitoly je Karel Frydrýšek a Kateřina Vlčková (Šimečková).

29.1 Definice problému a jeho pochopení

Existuje „elementární“ otázka: „**Jak má být konstrukce (strojní součást, implantát, metoda léčby, ekonomická návratnost, ochrana životního prostředí atd.) bezpečná (spolehlivá)?**“ Nejčastější odpověď potenciálního uživatele zní: „Chci to mít dokonale bezpečné!“ Ovšem při bližším zkoumání je zřejmé, že nelze realizovat konstrukci (strojní součást, implantát, metodu léčby) jako absolutně bezpečnou (bezporuchovou, jistou, spolehlivou). Je tomu také proto, že se nelze vždy spolehnout na přesné technické znalosti (např. vlastnosti materiálu, přesné znalosti geometrického uspořádání struktury, přesné znalosti a jistoty zatížení, přesné dodržení technologické kázně při výrobě atp.) Také při léčení se nelze absolutně spolehnout na zdravotní stav pacienta, na to zda pacient bude s lékařem spolupracovat, na reakci organismu na léčbu, psychický stav pacienta, dostatečnou anamnézu, bezchybnou práci lékaře či poruchu lékařských přístrojů. Taková je realita ☺☹. Blíže také příklad uvedený na Obr. 29.1, kde došlo k nečekané smutné události nebo mnohé další příklady, které lze běžně nalézt na internetu a v médiích.



Obr. 29.1 Jeřáb bin Ládinovy firmy spadl na měšitu v Mekce: Přes 100 obětí; zdroj [13] <https://tn.nova.cz/zpravodajstvi/clanek/319668-jerab-bin-ladinovy-firmy-spadl-na-mesitu-v-mekce-pres-100-obeti>.

Některé příčiny variability těchto základních vlastností veličin souvisí s lidskou činností a některé naopak s lidskou činností nesouvisí a jsou typické pro přírodu a reálný život. Obecně platí, že **jevy v reálném světě podléhají jisté náhodnosti**. Nejinak je tomu také u jevů spojených s posudkem spolehlivosti. Konstrukce (strojní součást, implantát, léčba, ...) tedy není nikdy zcela bezpečná (spolehlivá), ale její návrh a provedení musí vést k minimalizaci souvisejících rizik, tak aby tato rizika byla přijatelná (ekonomicky, ekologicky, sociologicky, politicky, společensky, eticky atp.).

Dle autora této kapitoly, **náhodnost je daná neznalostí nebo nemožností předem určit počáteční, okrajové aj. podmínky a průběh zkoumaného problému a také mírou aplikace diskretizace ve výpočtovém či experimentálním modelu.**

Dle autora této kapitoly, je možno definovat také vlastní filosofický pohled na náhodnost. **Zdá se, že vesmír má ve svých daných zákonech určitou svobodu a tou je právě náhodnost. Náhodnost je asi stochastickou logikou vesmíru a nástrojem jejího zkoumání je především teorie pravděpodobnosti.**

Spolehlivost²²³ se tedy rozumí schopnost konstrukce (strojní součásti, implantátu, metody léčby, ...) plnit požadované funkce v požadovaném časovém úseku. Spolehlivost je obecně daná funkcí více náhodných proměnných (např. zatížení, materiálové vlastností, geometrie součásti, požadavky mezního stavu, technologie výroby, údržba, správné používání, správná míra diskretizace problému atp.).

Stanovení posudku spolehlivosti je jedním z nejčastějších požadavků technické, respektive vědecké, praxe. V pozadí každého posudku spolehlivosti je vždy teorie pravděpodobnosti a statistiky (nutné respektování výše zmíněných nejistot výpočtových

²²³ Alternativně se pro spolehlivost také méně používají slova hodnověrnost či důvěryhodnost. Anglické slovo pro spolehlivost je **reliability** a latinské slovo pro spolehlivost je **fidelitas** či **fides**.

modelů či experimentů). Problémem je, že tyto nejistoty se mnohdy vůbec nerespektují (přímé potlačení pravděpodobnosti a statistiky) za účelem jednoduchého deterministického pohledu.

Z hlediska inženýra, se tedy většina současných norem jeví jako deterministické (aplikace četných součinitelů, doporučených vzorců atp. mnohdy bez přímého fyzikálního opodstatnění), což ale ve svém důsledku odporuje realitě.

Některé normy (např. ČSN 731401, ISO aj.), viz [14] až [21], již připouštějí jako alternativu také plně pravděpodobnostní přístupy stanovení spolehlivosti konstrukcí, což je nesporně velkým úspěchem. Současný trend, který souvisí s prudkým rozvojem a běžnou dostupností výpočetní techniky, nabízí nové možnosti aplikací plně pravděpodobnostních přístupů stochastické mechaniky založených na simulačních technikách metody Monte Carlo (MC). A právě **metoda SBRA (Simulation-Based Reliability Assessment)** je toho příkladem, viz následující text.

Princip metody MC je již vysvětlen v předchozí Kapitole 28.

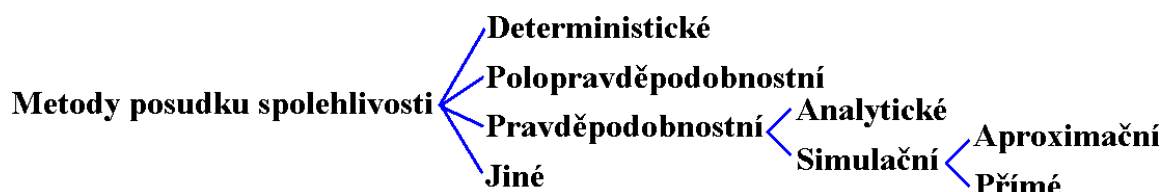
Stručně lze tedy říci, že **veličiny, běžně používané ve vědě a technice, jsou totiž téměř výhradně stochastické. Mají tedy náhodný charakter, a proto je vhodné a přirozené používat statistiku a pravděpodobnost a s tím spojený pravděpodobnostní posudek spolehlivosti.**

29.2 Posudky spolehlivosti

V současnosti lze rozdělit technické normy (respektive obecněji posudky spolehlivosti) do čtyř skupin, viz také Obr. 29.2:

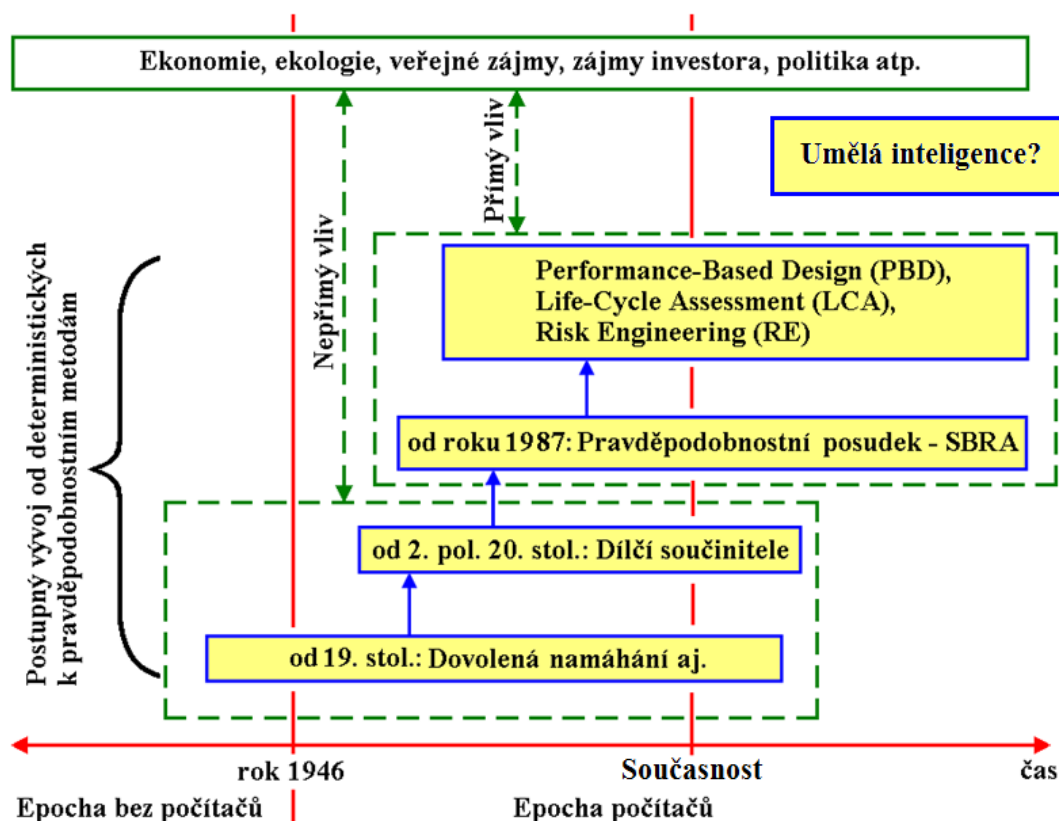
1. **Deterministické normy a posudky** (např. metoda stupně bezpečnosti, metoda dovolených namáhání, aj.), které ignorují teorii pravděpodobnosti, pracují s deterministickými (konstantními) vstupy a výstupy. Jsou nejjednodušší a nejrychleji aplikovatelné. Těmto metodám je v této práci věnována pozornost, viz např. Příklad 25.1, 25.3 a 25.5.
2. **Polopravděpodobnostní normy a posudky** (metoda dílčích součinitelů, některé nové evropské normy, norma AISC LRFD v USA, ...). Využívají několik „náštrlových“ výpočtů za účelem zjednodušení celého pravděpodobnostního pozadí vstupních a výstupních veličin. Těmto metodám není v této práci věnována pozornost.
3. **Pravděpodobnostní („plně“ pravděpodobnostní) normy a posudky.** Někdy nazývané také normy a posudky 3. úrovně, které se snaží velmi detailně aplikovat teorii pravděpodobnosti. V těchto případech je spolehlivost konstrukce chápána jako pravděpodobnost, se kterou budou (nebo nebudou) zachovány požadované vlastnosti konstrukce, součásti, implantátu či léčby atp. Patří sem analytické a numerické techniky (FORM, SORM, atp.) a hlavně simulační techniky založené na metodě MC. Do této skupiny patří také metoda SBRA, která je založena na přímé metodě MC. Těmto metodám je v této práci věnována pozornost.
4. **Jiné** (např. aplikace teorie **fuzzy množin**²²⁴ jako jednu z možných alternativ popisu náhodného jevu, ...). Těmto metodám není v této práci věnována pozornost.

²²⁴ **Fuzzy množina** (čti fazi), tj. neostrá množina prvků. Příslušnost prvků k této množině je odstupňovaná. Klasická booleovská teorie množin pracuje s dvouhodnotovými vstupy 0 a 1, tj. prvek patří/nepatří do množiny. Prvek fuzzy množiny může nabývat libovolnou hodnotu z intervalu [0,1]. V teorii fuzzy existují také logické operace jako doplněk, průnik, sjednocení atp.



Obr. 29.2 Metody posudku spolehlivosti.

Autor této kapitoly se oprávněně domnívá, že v brzké budoucnosti mohou být normy a posudky stanovovány a používány také pomocí umělé inteligence, viz Obr. 29.3.



Obr. 29.3 Historie, současnost a autorem této práce odhadovaný hlavní trend vývoje posudku spolehlivosti (od klasických deterministických metod k modernímu integrovanému navrhování a posuzování konstrukcí a strojních částí či umělé inteligenci).

Dělení, historie a současnost hlavního trendu posudků spolehlivosti je vidět na Obr. 29.2 a 29.3.

Dle Obr. 29.2 lze říci, že metoda SBRA je přímá simulační pravděpodobnostní metoda posudku spolehlivosti, vycházející z metody MC.

Kritéria posudků spolehlivosti musí být vždy správně zvolena. Posudek spolehlivosti v technické praxi, samozřejmě souvisí také s teorií mezních stavů a v souvislosti s tím, také s **designovými nerovnostmi** uvedenými v Kapitole 25.4. **Mezní stav je situace, kdy zkoumaný jev přestává vyhovovat návrhovým kritériím.**

29.3 Pravděpodobnostní posudek spolehlivosti

Pro určení spolehlivosti konstrukcí a strojních částí pravděpodobnostními metodami jsou nejprve definována kritéria spolehlivosti na základě funkcionálního vztahu $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mezi n vstupními veličinami, zvanými základní náhodné proměnné x_i , kde $i = 1, 2, \dots, n$. Tento vztah se nazývá **funkce spolehlivosti**²²⁵ (někdy také **funkce bezpečnosti**, **funkce použitelnosti**, **funkce rezervy spolehlivosti** nebo také **funkce poruchy**) a je v dalším textu značen jako F_S

$$F_S = g(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot \quad (29.1)$$

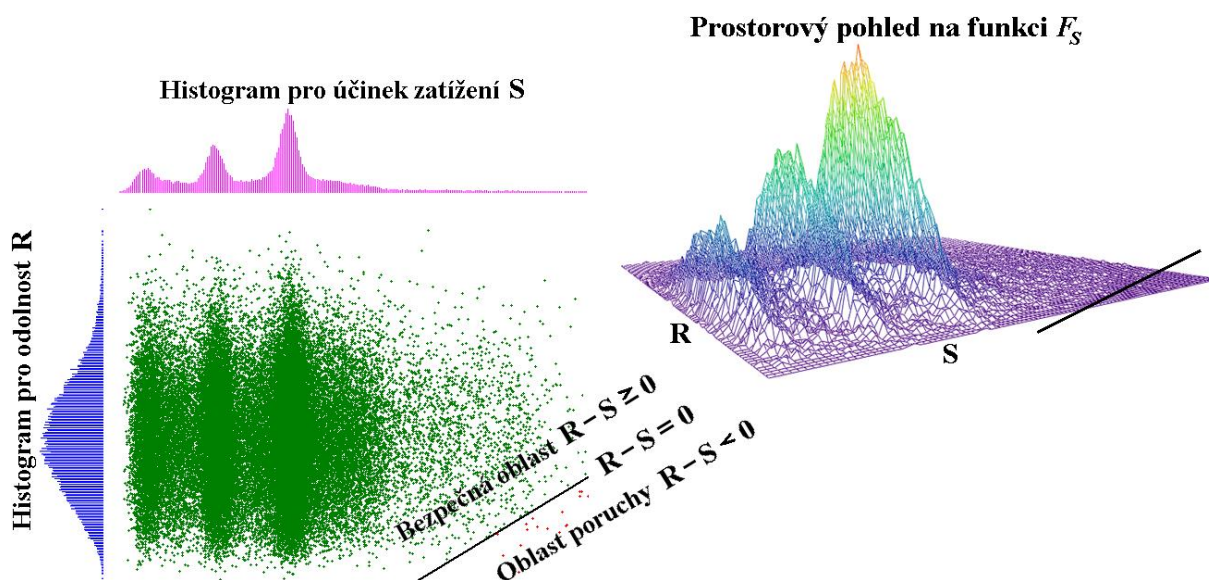
Funkce spolehlivosti také může být definovaná vztahem

$$F_S = R - S \cdot \quad (29.2)$$

kde **R je funkce odolnosti** konstrukce nebo součásti či jiného jevu (např. mez kluzu, přípustný průhyb, doporučená proočkovanost populace atp.) a **S je funkce účinku** získaná z výpočtu či experimentu (např. vypočtené maximální napětí v tělese, změřený maximální průhyb nosníku, reálné šíření nemoci atp.).

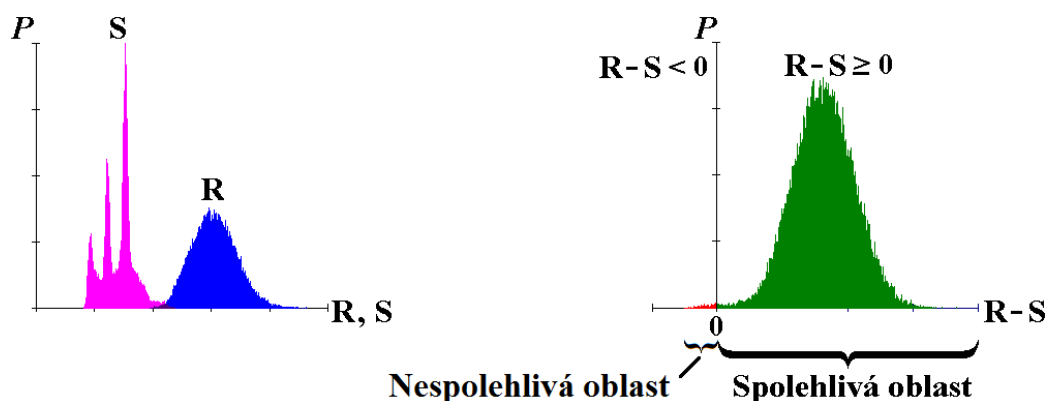
Funkční závislost $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ představuje řešení výpočtového nebo experimentálního modelu a jeho porovnání s kritériem mezního stavu. Výpočtový/experimentální model (nejčastěji analytický nebo numerický) většinou založený na zjednodušujících předpokladech, je téměř vždy idealizací fyzikální reality.

Konstrukce (součást, klinická léčba, ...) je považovaná za spolehlivou pokud $F_S > 0$. Porucha (nežádoucí stav) pak nastává pokud $F_S \leq 0$. Hranice poruchy (rovnice přímky) $F_S = 0$ dělí prostor návrhových parametrů na oblast spolehlivou a nespolehlivou, viz různé interpretace na Obr. 29.4 a 29.5.



Obr. 29.4 Funkce spolehlivosti F_S - Histogram interakce účinku funkce odolnosti R a funkce zatížení S (a) 2D zobrazení, (b) prostorové zobrazení.

²²⁵ Funkce spolehlivosti (anglicky **reliability function**).

Obr. 29.5 Funkce spolehlivosti F_S (interakce funkce odolnosti R a funkce účinku S).

Z výše uvedeného, je zřejmé, že funkci poloha $= (x^2 + y^2)^{0.5} - R$, viz rovnice (28.3) v Příkladu 28.2, lze považovat také za funkci spolehlivosti.

Pravděpodobnost poruchy (nežádoucího jevu) P_f , je daná v obecném případě složitým n -rozměrným integrálem

$$P_f = \int \cdots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n, \quad (29.3)$$

$$g(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$$

kde $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je funkce sdružené hustoty pravděpodobnosti (pro spojité náhodné veličiny) nebo sdružená pravděpodobnostní funkce (pro diskrétní náhodné veličiny). Integrace je tedy provedena přes celou oblast poruchy, tj. přes oblast kde platí $g(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0$.

Vyhodnocením spolehlivostní funkce pro každý zaznamenaný vektor výstupních veličin lze zjistit případy, ve kterých interakce mezi odolností a účinky zatížení patří do oblasti poruchy. Tyto případy představují selhání konstrukce. Četnost případů selhání, viz rovnice (27.8), určuje pravděpodobnost poruchy P_f , která je základním ukazatelem spolehlivosti zkoumaného jevu. Pokud je dostatečný počet simulací N_{celkem} , pak s dostatečnou přesností platí:

$$P_f = P_{F_S \leq 0} \approx \frac{N_f}{N_{\text{celkem}}}, \quad (29.4)$$

kde N_f je počet nepříznivých stavů.

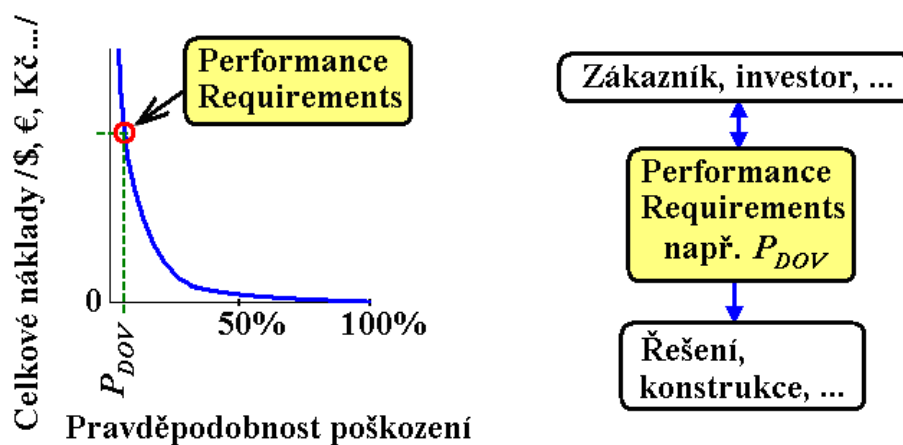
Vypočtená pravděpodobnost poruchy P_f je následně porovnána s **návrhovou (dovolenou, přípustnou) pravděpodobností poruchy P_{DOV}** na základě **kritéria spolehlivosti** daného nejčastěji nerovností:

$$P_f \leq P_{DOV} \quad (29.5)$$

Pravděpodobnost P_{DOV} je daná normou nebo jiným způsobem (např. dohoda s investorem), viz také Tab. 29.1 a Obr. 29.6. Návrhové pravděpodobnosti poruchy jsou zpravidla zvoleny diferencovaně v závislosti na významu konstrukce a druhu mezního stavu. **Česká národní norma pro navrhování ocelových konstrukcí [15] jako jedna z prvních na světě zavedla možnost plně pravděpodobnostního posouzení spolehlivosti ocelových konstrukcí.** V příloze A této normy je uvedena tabulka návrhových pravděpodobností poruchy P_{DOV} pro návrhovou životnost konstrukce 80 let, viz tab. 29.1.

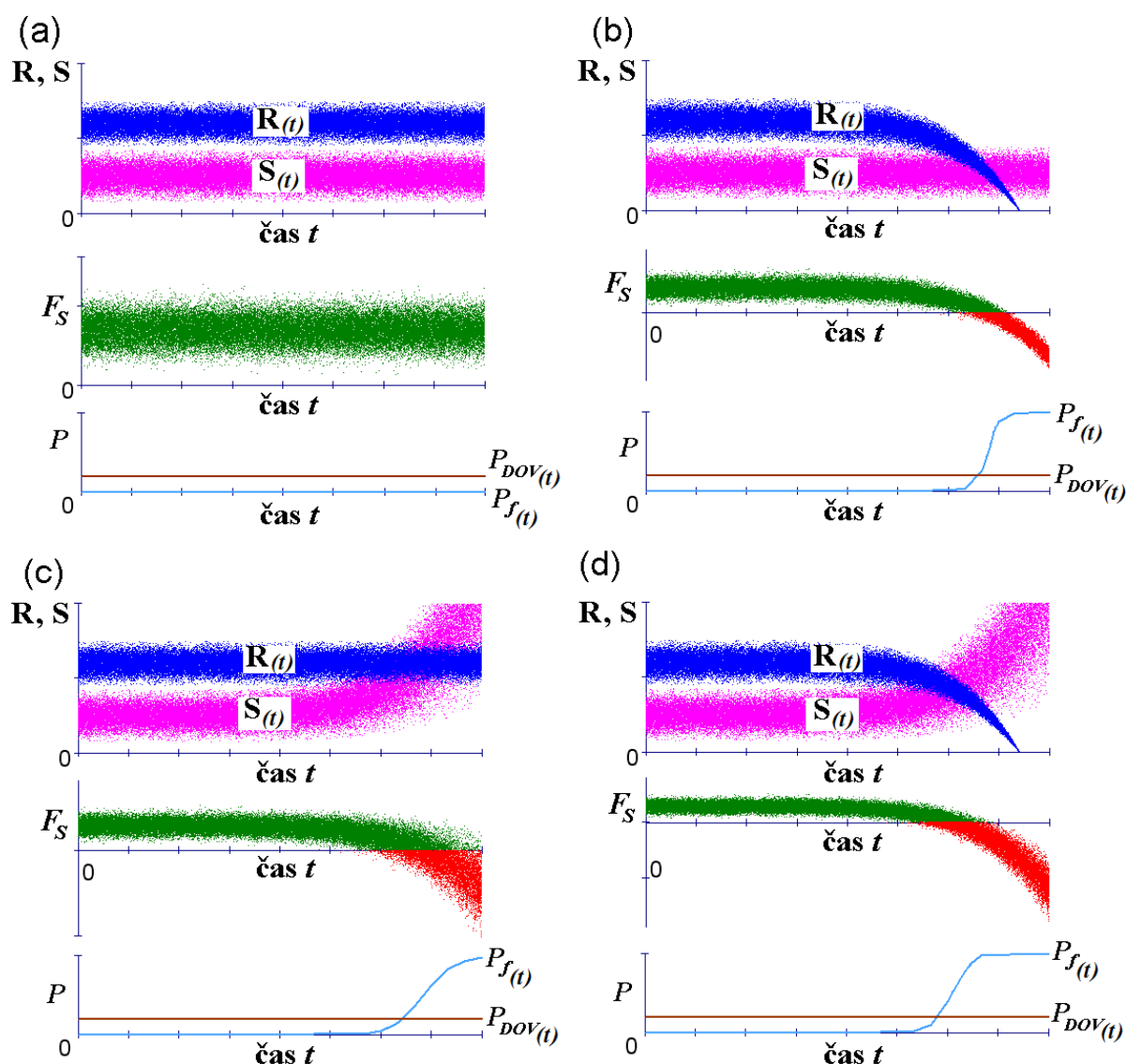
Tab. 29.1 Návrhové pravděpodobnosti poruchy dle normy ČSN 731401, viz [15].

Úroveň spolehlivosti	Návrhová pravděpodobnost poruchy P_{DOV}	
	Mezní stavy únosnosti	Mezní stavy použitelnosti
Snížená	5×10^{-4} , tj. 0.05%	0.16, tj. 16%
Obvyklá	7×10^{-5} , tj. 0.007%	0.07, tj. 7%
Zvýšená	8×10^{-6} , tj. 0.0008%	0.023, tj. 2.3%



Obr. 29.6 k definici Performance-Based Design.

V případech, kdy spolehlivost konstrukce ovlivňuje časově závislá odezva konstrukce $S(t)$ respektive časově závislá referenční funkce $R(t)$, viz Obr. 29.7, lze použít k ověření příslušné podmínky spolehlivosti časově závislou funkci spolehlivosti.



Obr. 29.7 Časově závislý posudek spolehlivosti, viz také [4] až [8].

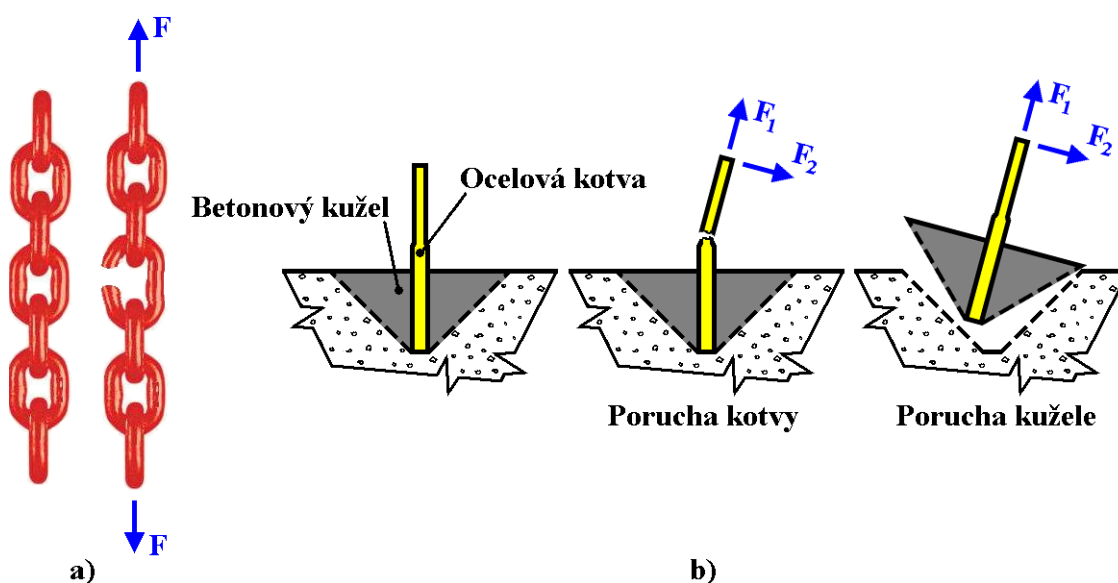
Potom platí zobecněné časově závislé rovnice (29.2) a (29.5), tj.

$$F_{S(t)} = R(t) - S(t) , \quad (29.6)$$

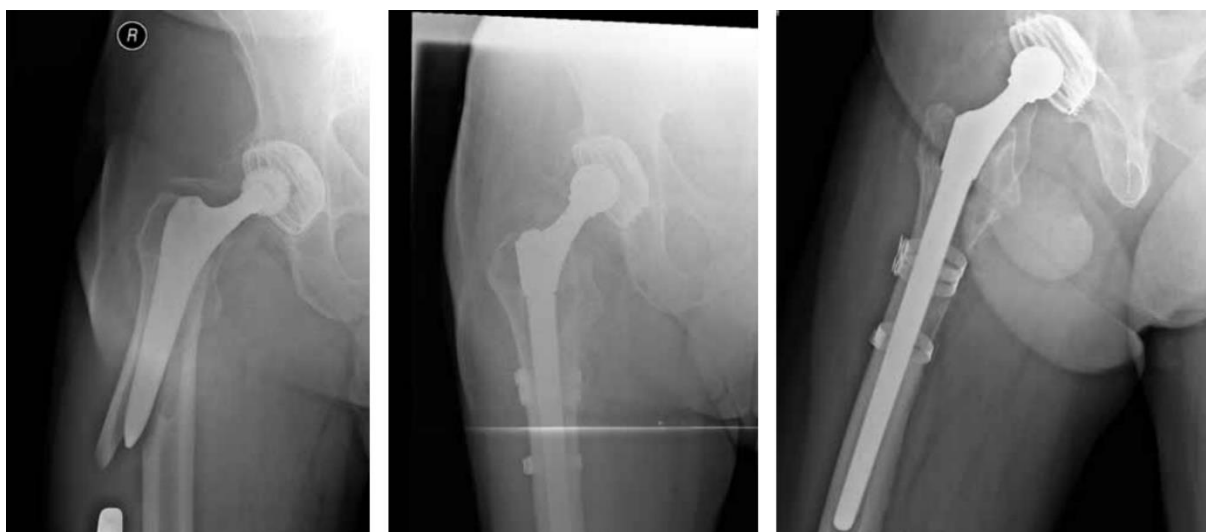
$$P_{f(t)} \leq P_{dov(t)} , \quad (29.7)$$

Komplexní spolehlivost systému (např. budovy, automobilu, ...) odráží jeho celkovou bezpečnost, použitelnost, trvanlivost aj. požadavky. **V současnosti není k dispozici dostupný úplný matematický model, který by popisoval komplexní spolehlivost systému v obecném smyslu.** Na základě této skutečnosti, obsahují současné normy pouze jednotlivé spolehlivostní podmínky pro konstrukční prvky, dílce a části – tzn. posouzení spolehlivosti je založeno na postupu, kdy se konstrukce rozdělí na jednotlivé izolované prvky a ty jsou pak odděleně navrženy a posouzeny. Toto zjednodušení má ovšem za následek neznalost spolehlivosti celého systému. **Jeden z možných postupů, jak analyzovat komplexní spolehlivost celé konstrukce, je sestavení komplexního modelu konstrukce z jednotlivých prvků, které jsou mezi sebou navzájem spojené buď sériově anebo paralelně, viz např. [9] a [20].**

V **sériových systémech** jsou jednotlivé prvky mezi sebou zapojeny do série. Porucha jednoho prvku má za následek selhání celého systému, viz Obr. 29.8 a 29.9. Mezi nejčastěji se vyskytující sériové systémy patří staticky určité konstrukce či lidské končetiny při zlomeninách.



Obr. 29.8 Příklady sériových konstrukčních systémů (a) článkový řetěz, (b) kotvení ve stavebnictví.



Obr. 29.9 Příklad sériového systému - periprotetická zlomenina²²⁶ lidského distálního femuru typu B2 řešená reimplantací dřívku a cerklážními páskami; zdroj rtg. snímku [22].

²²⁶ **Periprotetické zlomeniny** jsou komplikované zlomeniny kostí, vznikající v těsné blízkosti nebo kontaktu s umělými kostními náhradami.

Pravděpodobnost poruchy sériového systému $P_{f_{\text{sériový}}}$ (v případě nulové korelace dílčích funkcí spolehlivosti pravděpodobností poruchy P_{fi} jednotlivých prvků $i = 1, 2, \dots, n$) lze vypočítat z rovnice

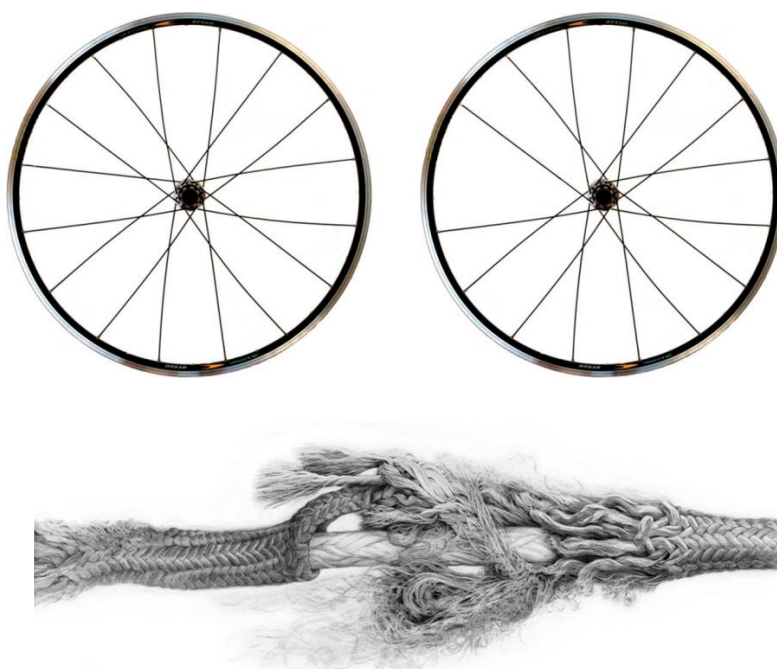
$$P_{f_{\text{sériový}}} = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - P_{fi}) , \quad (29.8)$$

kde n je počet jednotlivých prvků sériového systému.

Z uvedené rovnice vyplývá, že **pravděpodobnost poruchy sériového systému se zvyšuje s počtem prvků a je výrazně závislá na pravděpodobnosti poruchy nejslabšího prvku.**

U **paralelních systémů** jsou jednotlivé prvky mezi sebou zapojeny paralelně, viz např. Obr. 29.10. k **poruše celého systému dojde až v případě poruchy všech prvků nebo části prvků systému.** V případě nulové statistické závislosti funkcí spolehlivosti dílčích prvků, lze **pravděpodobnost poruchy paralelního systému** $P_{f_{\text{paralelní}}}$ vypočítat ze vzorce

$$P_{f_{\text{paralelní}}} = \prod_{i=1}^n P_{fi} . \quad (29.9)$$



Obr. 29.10 Příklad paralelního konstrukčního systému (a) při cestování na kole s poškozeným výpletem je ještě ve většině případů možné bez větších problémů dojet na dané místo (b) poškozené lano ještě může chvíli fungovat; zdroj spodního obrázku Huguette Despault May [23] <http://www.parrotcolor.com/store/blog/?p=873>.

V oblasti navrhování konstrukcí a strojních částí se čistě paralelní systémy vyskytují zřídka. Mnohem častěji se vyskytují **kombinované (smíšené) systémy**, které jsou složeny z dílčích paralelních systémů vzájemně spojených sériově. Mezi tyto systémy se řadí zejména staticky neurčité konstrukce, viz např. Obr. 29.11. Pravděpodobnost poruchy složených systémů lze určit postupnou redukcí na jednodušší systémy.



Výbuch v neděli 24. února 2008 poškodil tři byty v pětipatrovém panelovém domě v Praze 8. Další dva byty poničil částečně. Lidé ze zničených bytů se budou moci na určitou dobu přestěhovat do ubytovny patřící osmé městské části. Do ní budou moci přesídlit i případní zájemci z bytů, které výbuch nepoškodil. Statik, který dům prohlédl, konstatoval, že při výbuchu vypadl panel z vnější stěny domu. Další dva panely v ní budou muset být smontovány. Předsedkyně bytového družstva Daniela Kostková řekla, že vodu už se podařilo zapnout. Většina lidí se podle ní do bytů už vrátila.

Obr. 29.11 Příklad poškození kombinovaného (smíšeného) systému, blíže viz internetové stránky <http://www.novinky.cz/clanek/133908-vybuch-v-byte-v-prazskych-kobylisich-zranil-muze.html>.

Postupný kolaps²²⁷, který je velmi nebezpečný a často i „nečekaný“, může vzniknout u konstrukcí, kde porucha některého z prvků systému zapříčiní poruchu dalších prvků. Dalším příkladem může být kolaps pacienta nebo organismu, či kolaps ekologického či ekonomického systému.

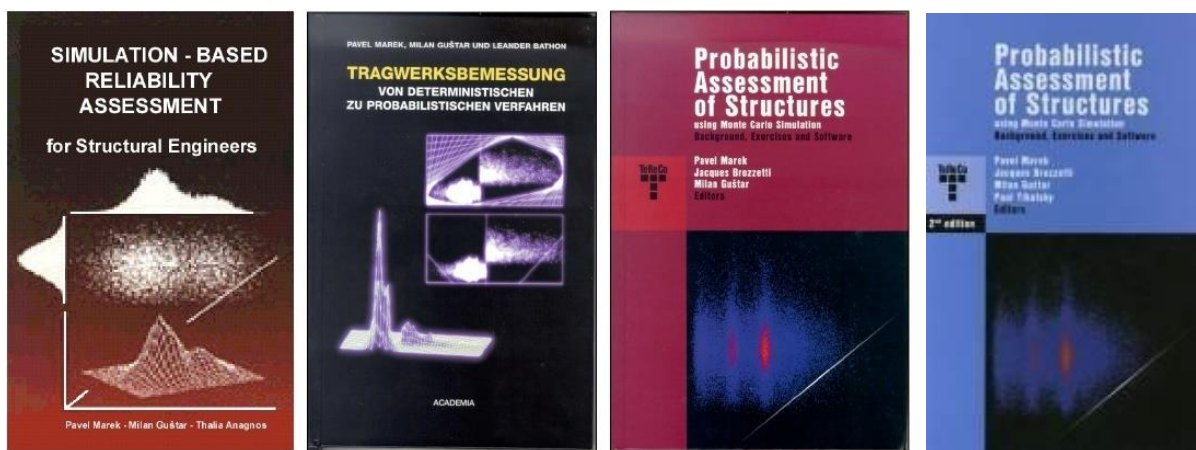
29.4 Metoda Simulation-Based Reliability Assessment (SBRA)

Historické informace o metodě SBRA a také o jejích autorech (Pavel Marek a Milan Guštar) jsou již uvedeny v závěru Kapitoly 27.1. Základní informace o metodě SBRA jsou uvedeny v knihách na Obr. 29.12.

²²⁷ **Kolaps Dvojčat (Světové obchodní centrum, New York, USA, 11. září 2001)**, byl způsoben sérií koordinovaných teroristických útoků, které provedla teroristická islamistická militantní organizace al-Káida.



(zdroj fotografie internet)



Obr. 29.12 Základní publikace týkající se metody SBRA, viz [4] až [7], ve kterých jsou vysvětlena základní pravidla a příklady.

Mezi simulační metody patří tedy i metoda SBRA, vytvořená s cílem využít dostupných výkonných osobních počítačů ke kvalitativnímu zdokonalení posudku spolehlivosti konstrukcí a strojních částí, umožňujícímu přechod od deterministického k pravděpodobnostnímu pojetí posudku spolehlivosti. Vývoj metody SBRA započal v roce 1987, viz Obr. 29.3. Metoda SBRA řeší úlohu určení pravděpodobnost poruchy jako určení hodnoty integrálu (29.3) pomocí metody MC.

Metoda SBRA patří mezi současné „top“ trendy stochastického pohledu na svět, a především fyziku kam samozřejmě patří inženýrské konstruování, mechanika či biomechanika. Přičemž se objevují také aplikace spojené s ekonomikou, ekologií, sociologií atp.

Tato metoda respektuje (pomocí histogramů) variabilitu vstupních veličin. Histogramy a jejich používání a definování, jako charakteristiky hustoty pravděpodobnosti náhodné veličiny, je předvedeno v Kapitolách 27 a 28.

Vstupní i výstupní veličiny pak mají také náhodný charakter, který lépe a přesněji vystihuje reálnou situaci. **Spolehlivost se pak určuje porovnáním vypočtené pravděpodobnosti poruchy s návrhovou pravděpodobností**, viz (29.5) a (29.7).

Použitelnost, aplikovatelnost a rozvoj metody SBRA také souvisí s rozvojem počítačů. Díky stále se zvyšující výkonnosti počítačů, lze již v současné době řešit opravdu rozsáhlé úlohy mechaniky, jejichž řešení bylo před deseti a více lety nemožné.

Problematika kvalitativního zdokonalení posudku spolehlivosti konstrukcí souvisejícího s počítačovou revolucí (80. léta ve světě a 90. léta minuleho století v ČR, kdy se na stole běžného konstruktéra objevil počítač) je stále předmětem mnoha diskusí a úvah. k navrhovaným novým cestám k dosažení kvalitativně nové úrovně navrhování patří „plně“ pravděpodobnostní metoda SBRA spojená s metodou MC, viz také internetové stránky [12] <http://www.noise.cz/sbra/software.html>.

Pro úplnost je třeba dodat, že metoda SBRA a pravděpodobnostní posudek spolehlivosti má také velmi blízko k Stochastické metodě konečných prvků (Stochastic Finite Element Method – SFEM), což ale není tématem této knihy.

Autor této učebnice (podobně jako mnozí další kolegové) věří, že budoucnost (podobně jako současnost) potvrdí stěžejní význam pravděpodobnostního posudku spolehlivosti v rozvoji

vědy a techniky. Veličiny, běžně používané ve vědě a technice, mechanice či biomechanice, jsou totiž téměř výhradně stochastické a stejně tak stochastická je také metoda SBRA.

Jádrem metody SBRA je metoda MC a vstupními veličinami jsou pseudonáhodné (náhodné) proměnné dané ohraničenými histogramy. V rámci jednoho simulačního kroku je pro náhodné vstupní veličiny vygenerován vektor jejich realizací, vyhodnocením modelu jsou vypočteny hodnoty výstupních veličin a tento vektor, tvořící jednu z možných interakcí mezi odolností (referenčními hodnotami) R a účinky S (výpočet), je zaznamenán. Po provedení velkého počtu kroků (tj. simulací N_{celkem}), reprezentují zaznamenané vektory obecně mnohorozměrné empirické rozdělení výstupních veličin. Spolehlivostní funkce F_S , viz rovnice (29.9) je definována jako funkce výstupních náhodných veličin a rozděluje R, S prostor na bezpečnou oblast (tj. $F_S \geq 0$) a nebezpečnou oblast (tj. $F_S < 0$), viz také Obr. 29.4 a 29.5. Toto dvourozměrné zobrazení bodů dvou veličin je v metodě SBRA označováno termínem „mraveniště“²²⁸, jež je tvořeno jednotlivými body - „mravenci“.

Vlastní posudek spolehlivosti je pak prováděn dle postupu v Kapitole 29.3, viz rovnice (29.4) a (29.5).

Z výše uvedené podstaty posudku spolehlivosti, na základě pravděpodobnostní metody SBRA vyplývá, že tento postup nevyžaduje v průběhu stanovení posudku spolehlivosti výpočet střední hodnoty a směrodatné odchylky funkce spolehlivosti ani určení návrhového bodu, indexu spolehlivosti, ani dalších statistických parametrů, jež se uplatňují v pravděpodobnostních metodách nižších úrovní, viz např. [10]. Nicméně, z výsledků metody SBRA je možné střední hodnoty a směrodatné odchylky aj. charakteristiky dopočítat po ukončení simulací, a to jednoduše tak jako pro každý statistický soubor.

29.5 Přesnost a odhad chyby metody SBRA nebo metody MC

Přesnost určení pravděpodobnosti poruchy P_f na základě výpočtu přímou metodou MC (resp. metodou SBRA) je závislá na počtu simulačních kroků a kvalitě náhodného/pseudonáhodného generátoru. Při každé pseudonáhodné generaci vstupů a výpočtů je přesnost jiná, protože jsou jiné vstupní náhodné veličiny.

Základní představu o přesnosti výsledku, si lze udělat z řešení Příkladu 28.1 a 28.2, viz Tab. 28.1 a 28.2.

Požadavek návrhové pravděpodobnosti P_{DOV} ze strany norem či provozovatele může být velmi přísný. Řádově se však obvykle pohybuje od 10^{-1} do 10^{-6} , viz Tab. 29.1. Ke stanovení tak malých pravděpodobností může být zapotřebí generování velkého počtu simulačních kroků. Otázkou stanovení optimálního množství simulačních kroků, ve vztahu k přesnosti výpočtu, se

²²⁸ Mraveniště, nglicky **anthill** – odtud i název sw, viz Kapitola 29.6.



Největší mraveniště v ČR je v Nové Lhotě na Horňácku, (zdroj fotografie http://www.novalhota.cz/vismo/galerie3.asp?id_org=10509&id_fotopary=1090&n=velke%2Dmraveniste&p1=5069)

v minulosti zabývala řada autorů. Například Haldar a Mahadevan [21] a také [11], uvádějí **vztah pro odhad chyby Δ /%/ vypočtené pravděpodobnosti P_f**

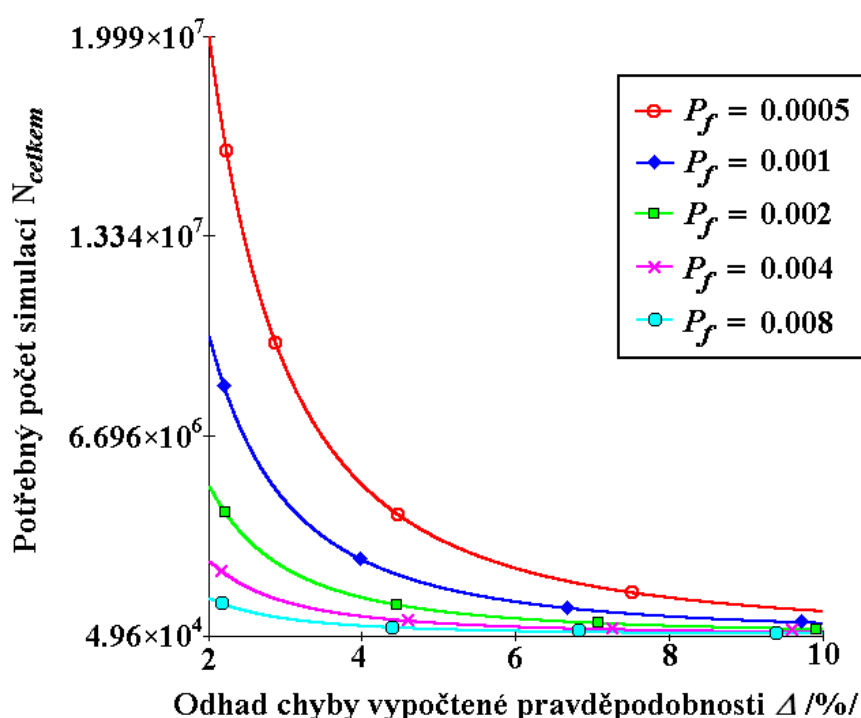
$$\Delta \approx 200 \times \sqrt{\frac{1-P_f}{P_f N_{celkem}}}, \quad (29.10)$$

ze kterého vyplývá, že pro případ kdy $N_{celkem} \rightarrow \infty$ platí $\Delta \rightarrow 0$.

Z rovnice (29.10) vyplývá **vztah pro počet potřebných simulací metodou MC (nebo metodou SBRA) při zvolené chybě vypočtené pravděpodobnosti**

$$N_{celkem} \approx 4 \times 10^4 \frac{1-P_f}{P_f \Delta^2}, \quad (29.11)$$

jejíž závislosti jsou znázorněny na Obr. 29.13.



Obr. 29.13 Potřebný počet simulací pro metodu MC, resp. metodu SBRA, v závislosti na zvolené hodnotě P_f a chybě Δ .

Například, pro požadovanou přesnost odhadu chyby $\Delta = 10\%$ a pro obvyklou úroveň spolehlivosti dle mezního stavu únosnosti $P_f = 7 \times 10^{-5}$, viz Tab. 29.1, vyplývá z rovnice (29.11) potřebný počet simulací $N_{celkem} = 5713886$. Pokud však je požadovaná přesnost odhadu chyby $\Delta = 5\%$ a $P_f = 7 \times 10^{-5}$, pak $N_{celkem} = 22855543$ náhodných simulací.

K odhadu chyby výsledku získaného metodou MC (resp. SBRA) se také často používá střední kvadratická chyba aritmetického průměru, která je také přibližně úměrná $\sqrt{\frac{1}{N_{celkem}}}$. Takže, **orientačně platí, aby se zlepšil výsledek metody MC o jeden řád, musí se počet náhodných simulací N_{celkem} zvýšit alespoň o dva řády.**

Faktem tedy je, že rychlost konvergence chyby výsledku k nulové hodnotě chyby je u metody MC rovna $\approx$ převrácené hodnotě odmocniny z počtu realizovaných pokusů N_{celkem} .

Při porovnání s jinými matematickými metodami plyne, že **metoda MC nepatří mezi metody s nejefektivnější konvergencí**. Nicméně, **výhodou je její srozumitelnost a jednoduchá aplikace**.

Další informace o chybách a jiných způsobech stanovení odhadu počtu potřebných simulací jsou uvedeny v [21] a další informace v [21].

29.6 Software Anthill

Pro rozšíření metody SBRA byl vyvinut **český počítačový program Anthill**, který umožňuje proniknout do podstaty posudku spolehlivosti na základě počítačové simulace metodou MC.

Anthill pro Windows představuje základní nástroj pro výpočet spolehlivosti a statistickou analýzu, viz Obr. 27.28, 27.28 a 28.12, který umožňuje řešit úlohy definované stochastickým matematickým modelem a stochastickou spolehlivostní funkcí (29.2). Vstupní náhodné veličiny jsou popsány buď obecnými diskrétními, nebo po částech spojitými rozděleními. V každém simulačním kroku jsou generovány vstupní veličiny, jež jsou následně vyhodnoceny na základě definovaného matematického modelu, přičemž vybrané výstupní veličiny jsou uchovány v podobě buď numerických hodnot, histogramů nebo celého záznamu. Generování hodnot vstupních veličin, výpočet modelu a záznam hodnot výstupních veličin je opakováno v počtu zadaných simulačních kroků N_{celkem} . Po výpočtu N_{celkem} simulačních kroků, lze zobrazit vypočtené statistiky, histogramy, pravděpodobnosti, kvantily a dvourozměrné grafy. Hledaná pravděpodobnost poruchy zadané spolehlivostní funkce a její vyhodnocení se určí ze vztahů (29.4) a (29.5). Program Anthill je použitý při všech následujících stochastických úlohách řešených v této knize. Více aktuálních informací o programu Anthill, free verzi pro maximálně 50000 simulací, plné (neomezené verzi) a jeho použití je možno nalézt například na internetové adrese [12] <http://www.noise.cz/sbra/software.html>.

Nutno podotknout, že existují také jiné „lepší“ sw, avšak sw Anthill je z hlediska prvotního pochopení programování velmi jednoduchý.

29.7 Dvě aplikace metody SBRA v mechanice a biomechanice

Aplikace v hornickém inženýrství, viz Obr. 29.14.

Aplikace v biomechanice (traumatologie, femorální šroub pro fractura collum femoris – článek ve sborníku konference BIOMECHANICS 2014 - International Conference of the Polish Society of Biomechanics, anglicky). Více informací o této úloze bude prezentováno v dalším dílu této knihy.

Další příklady autorových aplikací metody SBRA lze nalézt např. v [2] a [25] až [29].



Obr. 29.14 Poster – aplikace v hornickém inženýrství.

BIOMECHANICS 2014

- INTERNATIONAL CONFERENCE OF THE POLISH SOCIETY OF BIOMECHANICS

Probabilistic Reliability Assessment of Femoral Screws Intended for Treatment of “Collum Femoris” Fractures

K. FRYDRÝŠEK²²⁹, R. ČADA²³⁰

Key words: femoral neck fracture, femoral screw, strength analyses, beam, probability

1. Extended abstract

Proximal femoral neck fractures, see Fig. 1, remain a vexing clinical problem in traumatology and are one of the common types of trauma, see [1] - [3]. One possible treatment method for femoral neck fractures, is the application of femoral screws made up from stainless steel or Ti6Al4V material; see Fig 1.

Our own analytical model for strength analyses of femoral screws is based on the theory of beams on an elastic foundation, see [4], where the bone is approximated by the elastic foundation. Hence, the femoral screw is resting on an elastic foundation prescribed by stiffness k /Pa/. Three screws of length $L = 90$ mm are applied in parallel positions on the elastic foundation, see Fig. 1 and 2. The force F /N/ acting in one beam (screw) can be defined via total loading force F_m /N/, see Fig. 2, by the equation $F = F_m/n = m \times k_m \times k_{dyn} \times g/n$. The

variables are as follows: m /kg/ is the entire mass of a patient, k_m /1/ is the coefficient of mass reduction (i.e. the mass of one lower limb is not acting), k_{dyn} /1/ is the dynamic force coefficient; g /ms⁻²/ is the gravitational acceleration; and n /1/ is the coefficient of inequality in the division of force F_m into three screws. These variables are defined via truncated histograms (stochastic approach), see Fig. 3 for examples. The force F can be decomposed into forces $F_1 = F \times \cos \alpha$ and $F_2 = F \times \sin \alpha$, see Fig. 4. The femoral screw angle α /deg/, which is defined by the limiting angles of adduction and abduction, and the yield limit Re /MPa/ for material, are likewise defined via truncated histograms.



Fig. 1. Femoral neck fracture and its treatment via three femoral screws

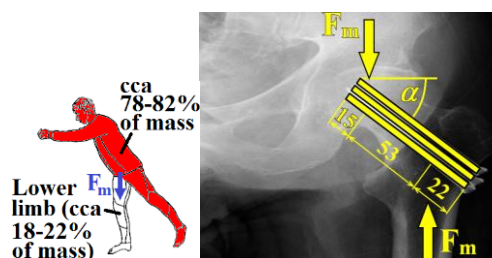


Fig. 2. Femoral screws as beams on elastic foundation and their loading.

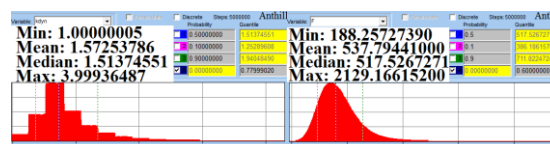


Fig. 3. Examples of histograms for some input parameter k_{dyn} and output parameter F

²²⁹ Assoc. Prof., M.Sc. Karel FRYDRÝŠEK, Ph.D., ING-PAED IGIP, Department of Mechanics of Materials, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB – Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava, Czech Republic, e-mail: karel.frydrysek@vsb.cz

²³⁰ Prof., M.Sc. Radek ČADA, Ph.D., Department of Mechanical Technology, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB – Technical University of Ostrava, 17. listopadu 15/2172, 708 33 Ostrava, Czech Republic, e-mail: radek.cada@vsb.cz

According to the 2nd order theory and the theory of beams on an elastic foundation, three linear differential equations for the intervals $x_{1,2,3}$, can be written as $EJ_{ZT} \frac{d^4 v_i}{dx_i^4} + F_2 \frac{d^2 v_i}{dx_i^2} + kv_i = 0$ together with 12 boundary conditions. EJ_{ZT} /Nm²/ is flexural stiffness, v_i /m/ is displacement and x_i /m/ are coordinates. For more information see [4] and [5]. Hence, bending moments M_{oi} /Nm/, see e.g. Fig. 4, and maximum stresses σ_{MAX} /MPa/, see Fig. 5, can be calculated.

Probabilistic reliability assessment can be carried out via the Simulation-Based Reliability Assessment (SBRA) Method (i.e. direct Monte Carlo approach) by means of the reliability function $RF = \text{Re} - |\sigma_{MAX}|$ /MPa/ (depending on load capacity, compared to the extreme stress values with yield limit). It is then obvious that if $RF < 0$, plastic deformation occurs in the beam (i.e. the yield limit of the material is overcome, see the 2D histogram in Fig. 6a. The probability that plastic deformation will occur

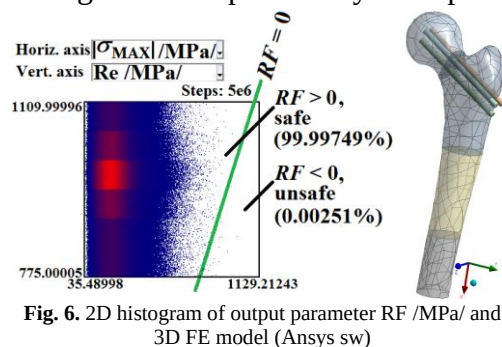


Fig. 6. 2D histogram of output parameter RF /MPa/ and 3D FE model (Ansys sw)

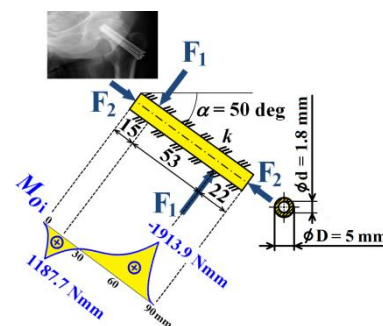


Fig. 4. Example of bending moment distribution for cannulated femoral screw (result of 1 Monte Carlo simulation)

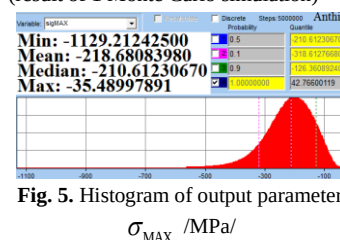


Fig. 5. Histogram of output parameter σ_{MAX} /MPa/

in the beam is $P_{RF < 0} = 2.51 \times 10^{-5} = 0.00251\%$. **Hence, the femoral screws are safe and suitable for patient treatment.** The presented stochastic beam model was compared with 3D FE model with adequate results, see Fig. 6b.

Acknowledgment: The authors gratefully acknowledge the funding from the Czech projects TA03010804, SP2014/193 and SP2014/17.

References

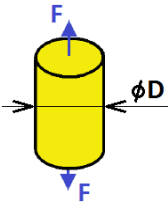
- [1] FRYDRÝŠEK K., JOŘENEK J., UČEŇ O., KUBÍN T., ŽILKA L., PLEVA L.: *Design of External Fixators Used in Traumatology and Orthopaedics – Treatment of Fractures of Pelvis and its Acetabulum*, Procedia Engineering, vol. 48, 2012, pp. 164-173.
- [2] FRYDRÝŠEK K.: *Strength Analyses of Full and Cannulated Femoral Screws Made up from Stainless Steel and Ti6Al4V*, Calculation report, FME VŠB-Technical University of Ostrava, Ostrava, Czech Republic, 2014, pp. 1-43.
- [3] FARHAD N., BRADLEY E.J., HODGSON S.: *Comparison of Two Tools for the Measurement of Interfragmentary Movement in Femoral Neck Fractures Stabilised by Cannulated Screws*, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, vol. 26, issue 6, 2010, pp. 610-615.
- [4] FRYDRÝŠEK K., TVRDÁ K., JANČO R. ET AL: *Handbook of Structures on Elastic Foundation*. VŠB - Technical University of Ostrava, Ostrava, Czech Republic, 2013, ISBN 978-80-248-3238-8, pp. 1-1691.
- [5] MAREK P., BROZETTI J., GUŠTAR M., TIKALSKÝ P. ET AL: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation*, 2nd edition, Institute of Theoretical and Applied Mechanics, Academy of Sciences of the Czech Republic, Prague, Czech Republic, 2003, ISBN 80-86246-08-6, pp. 1-471 (cd attached).

29.8 Příklady

Příklad 29.1: Je třeba stanovit pravděpodobnost vzniku plastických deformací, a to pro tyč průměru D , která je namáhána tahem osamělou axiální silou F , viz Tab. 29.2. Řešení proveďte v sw Anthill. Příklad je koncipován tak, aby se uživatel seznámil také s využitím programu Anthill.

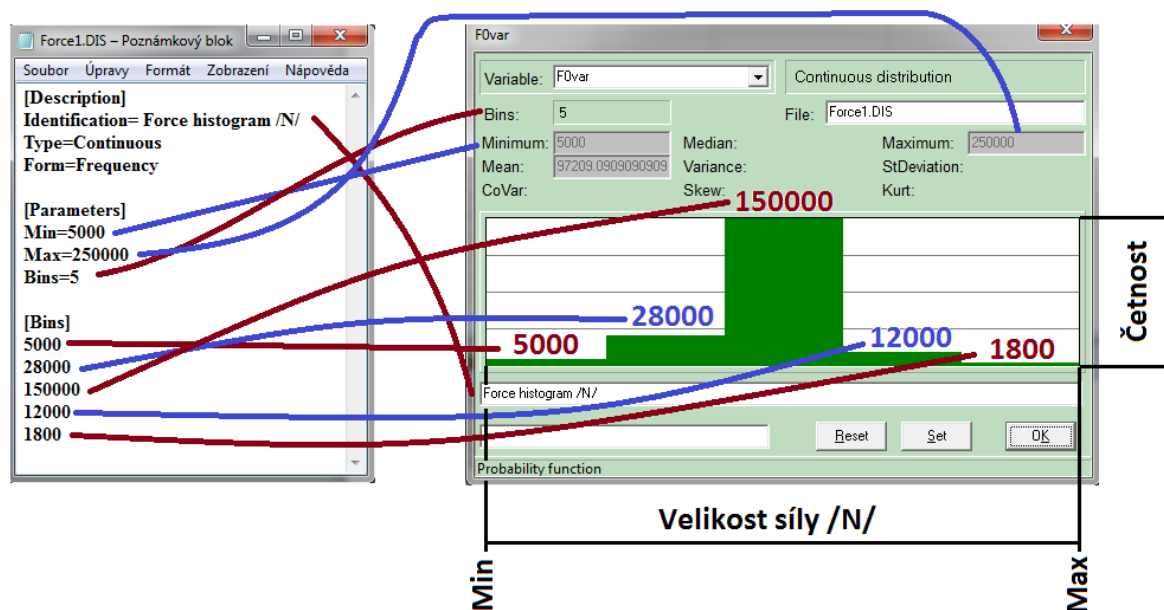
Dáno: stochastické parametry uvedené v Tab. 29.2 a na Obr. 29.15, 29.19 až 29.21 a 29.24.

Tab. 29.2 Vstupní parametry zadání (tyč namáhaná tahem).

	Veličina	Minimum	Medián	Maximum	Poznámka (Anthill sw)
	Průměr D	23.75 mm	25 mm	26.25 mm	Sloupcový předdefinovaný histogram $\pm 5\%$, soubor „N1-05.DIS“ (ohraničené normální rozdělení), viz Obr. 29.21.
	Síla F	5000 N	124222 N	250000 N	Sloupcový uživatelem vytvořený histogram, „Force1.DIS“, viz Obr. 29.15, 29.16, 29.19 a 29.20.
	Mez kluzu σ_K	248 MPa	338.29 MPa	500 MPa	Sloupcový předdefinovaný histogram oceli A36 „A36-M-continuous“, viz Obr. 29.24 a 29.26 a 29.27.

Řešení příkladu je ilustrativní, tak aby každý mohl pochopit práci se sw Anthill, viz [12]. Příklad je převzat, upraven a doplněn pro potřeby této knihy z autorovy práce [3].

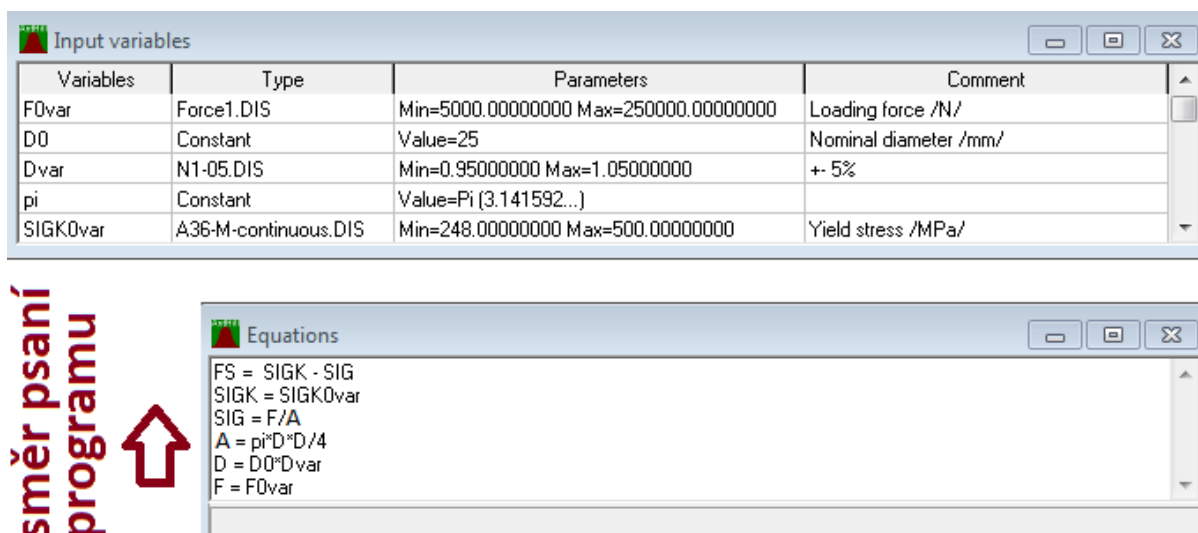
Histogram zátěžné síly F je definován uživatelem a to souborem „Force1.DIS“, viz Obr. 29.15.



Obr. 29.15 Vytvoření souboru/histogramu „Force1.DIS“ (vstupní parametr).

Nejlépe se tento soubor vytvoří v sw Anthill v adresáři „Distributions“ po otevření libovolného již vytvořeného souboru s příponou DIS a přepsáním parametrů dle Obr. 29.15. Síla F je tedy definována histogramem s pěti stejně širokými sloupci s různými četnostmi, které leží v intervalu 5000 až 250000 N. Program Anthill také dopočte aritmetický průměr, který je v Obr. 29.15 označen jako „Mean“.

Vlastní programování úlohy je pak předvedeno na Obr. 29.16, kde jsou nejprve definované histogramy a konstanty (nahore) a definování výpočtu (dole).



Obr. 29.16 Definování úlohy v programu Anthill.

Síla F je tedy definovaná pomocí histogramu „F0var“ (řádek programu $F = F0 \cdot Fvar$), viz Obr. 29.16.

Průměr tyče D je definován pomocí nominálního průměru $D_0 = 25$ mm s variabilitou „Dvar“ (tj. histogram „N1-05.DIS“ z adresáře „Distributions“ s variabilitou ± 5 %). Tj. řádek programu $D = D_0 \cdot Dvar$, viz Obr. 29.16.

Plocha příčného průřezu $A = \frac{\pi D^2}{4}$ (řádek programu $A = \pi \cdot D \cdot D / 4$), viz Obr. 29.16.

Tahové napětí $\sigma = \frac{F}{A}$ (řádek programu $SIG = F/A$), viz Obr. 29.16.

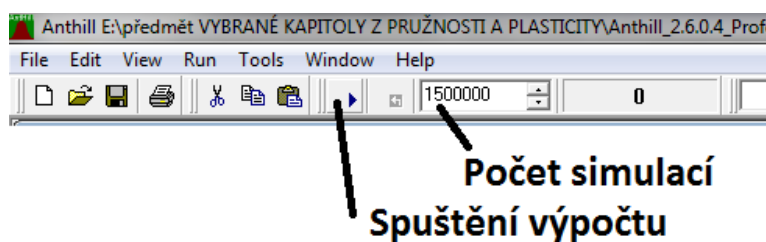
Mez kluzu σ_K je definována histogramem „SIGK0var“ ze souboru „A36-M-continuous.DIS“ (řádek programu $SIGK = SIGK0var$), viz Obr. 29.16. Soubor „A36-M-continuous.DIS“ vznikl modifikací souboru „A36-M.DIS“, kde se nahradilo v horní části textu „Type=Discrete“ za „Type=Continuous“.

Funkce spolehlivosti, viz rovnice (29.2) je definovaná jako

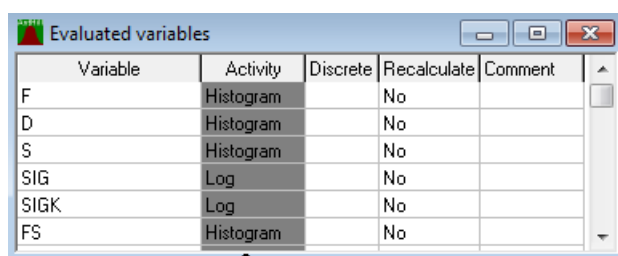
$$F_S = \sigma_K - \sigma, \quad (29.12)$$

viz (řádek programu $FS = SIGK - SIG$) v Obr. 29.16.

Spuštění výpočtu je pak naznačeno na Obr. 29.17 a 29.18. Výpočet bude proveden pro $N_{celkem} = 1.5 \times 10^6$ náhodných MC simulací.

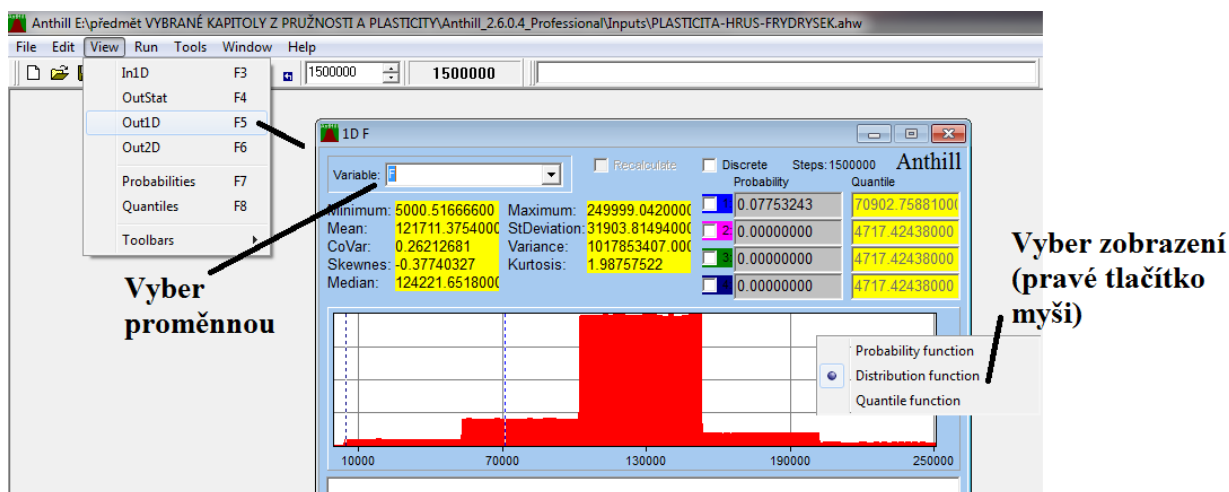


Obr. 29.17 Nastavení počtu Monte Carlo simulací a spuštění programu.

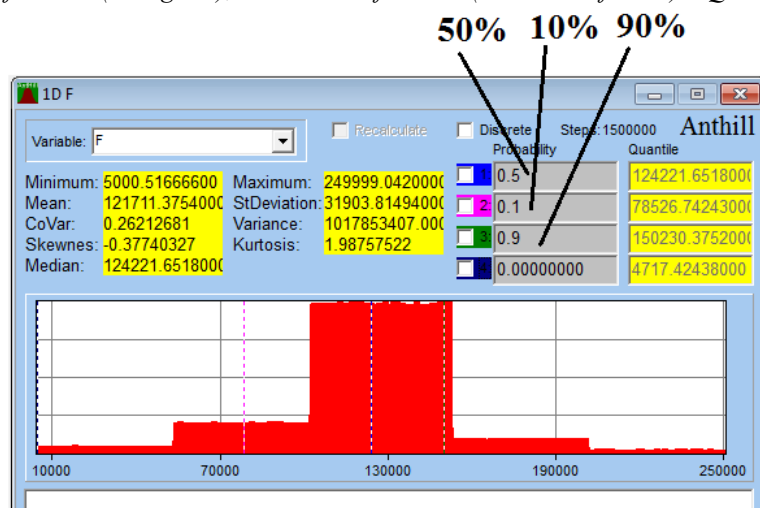


Obr. 29.18 Nastavení počtu Monte Carlo simulací a spuštění programu

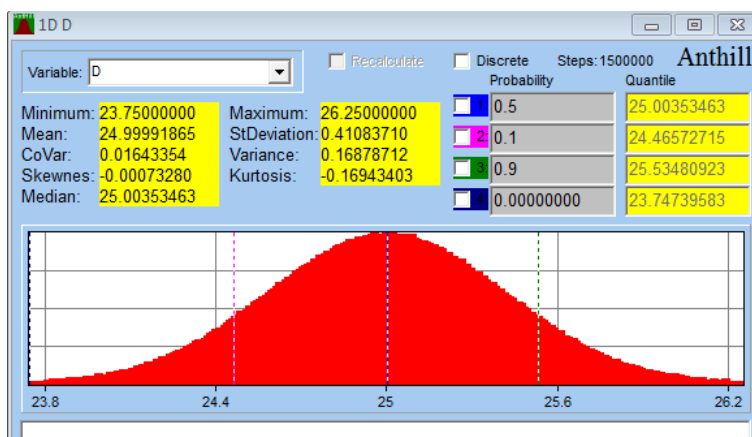
Po skončení výpočtu je vhodné zobrazit výsledky, a to pomocí 1D histogramů, viz Obr. 29.19 až 29.25 a 2D histogramů, viz Obr. 29.26 a 29.27.



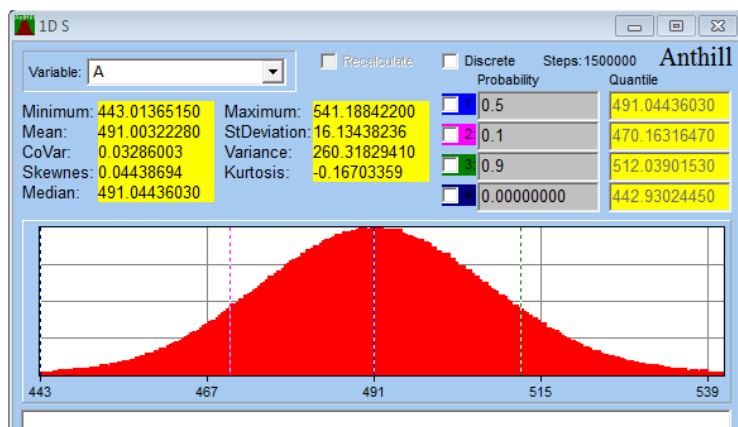
Obr. 29.19 Způsob zobrazování výsledků v sw Anthill. Je znázorněna také možnost zobrazení mezi Probability function (histogram), Distribution function (distribuční funkce) a Quantile function (kvantilová funkce).



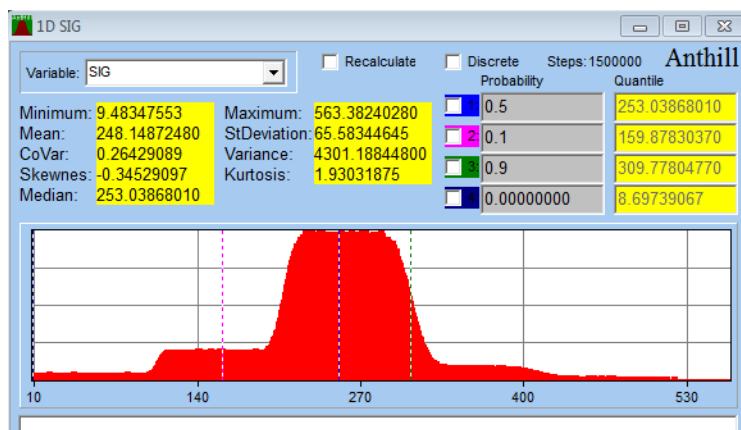
Obr. 29.20 Histogram zadané síly $F \in (5000; 25000)$ N a způsob stanovení kvantilů – výpočet pro $N_{celkem} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací.



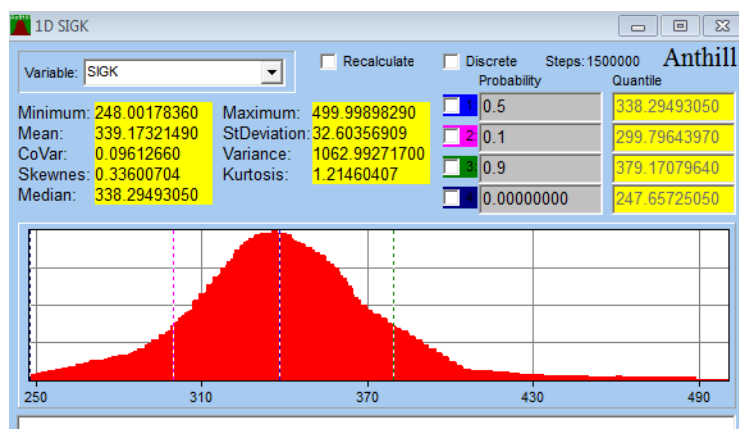
Obr. 29.21 Histogram zadaného průměru $D \in (23.75; 26.25)$ mm – výpočet pro $N_{celkem} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací.



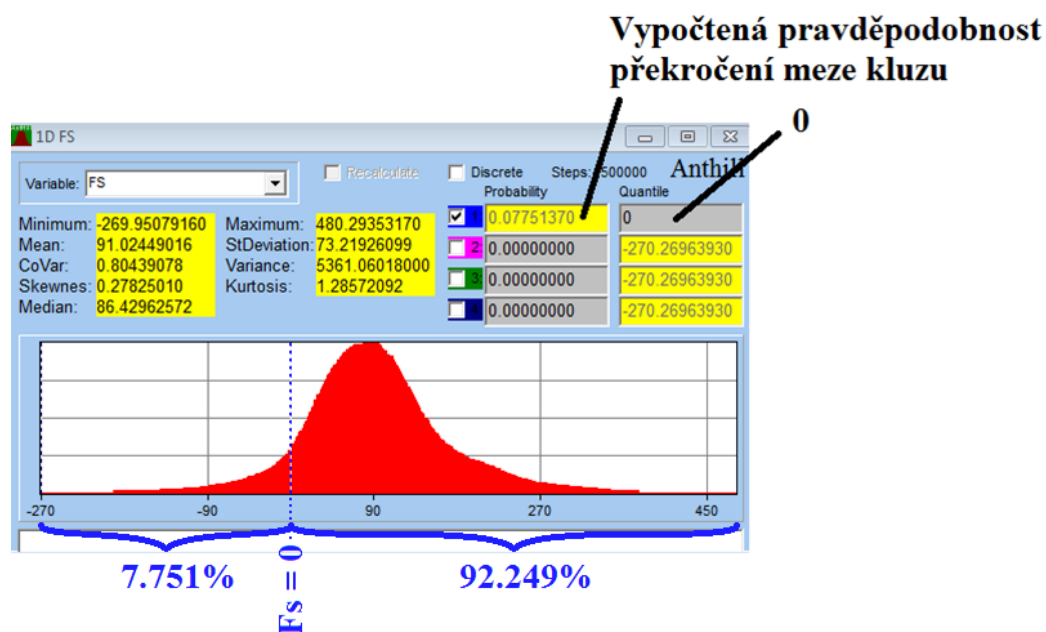
Obr. 29.22 Histogram vypočtené plochy $A \in (443.0; 541.2) \text{ mm}^2$ – výpočet pro $N_{\text{celkem}} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací.



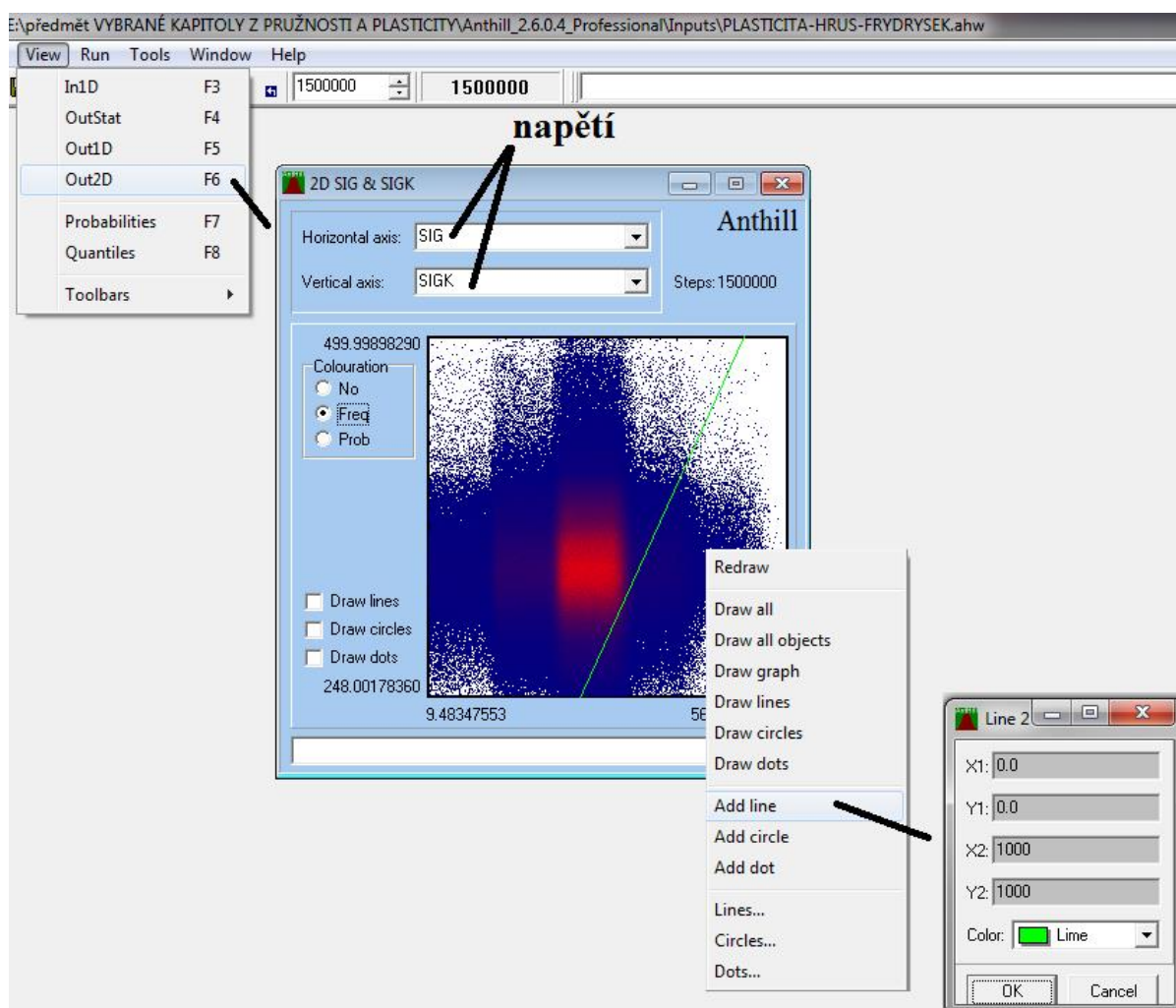
Obr. 29.23 Histogram vypočteného napětí $\sigma \in (9.48; 563.38) \text{ MPa}$ – výpočet pro $N_{\text{celkem}} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací.



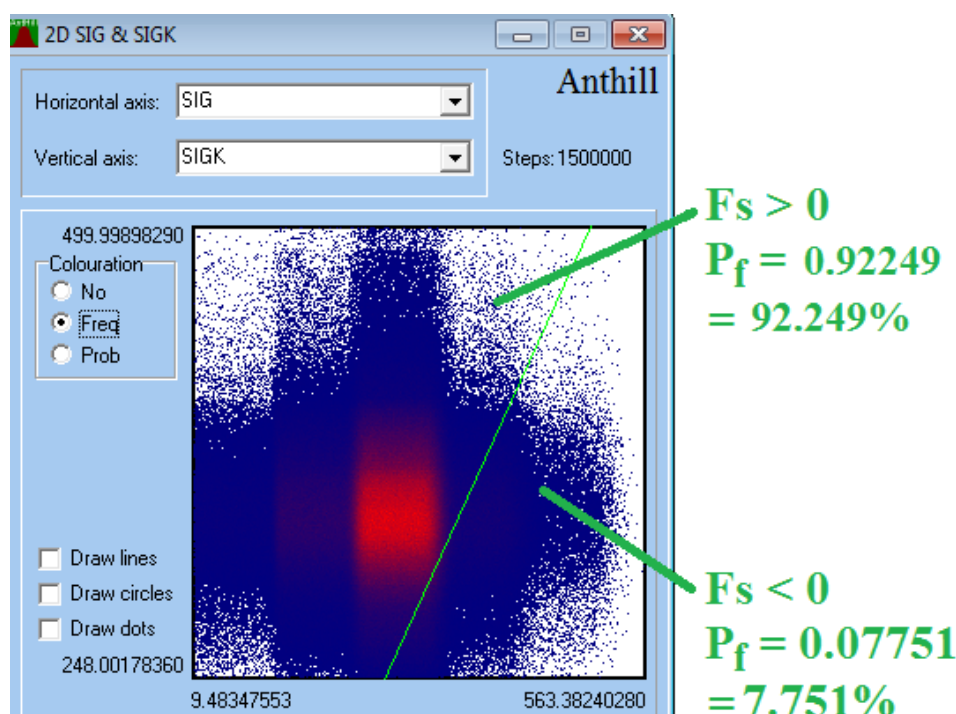
Obr. 29.24 Histogram zadané meze kluzu $\sigma_K \in (248; 500) \text{ MPa}$ – výpočet pro $N_{\text{celkem}} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací.



Obr. 29.25 Vypočtená funkce spolehlivosti F_S a stanovení pravděpodobnosti vzniku plastických deformací – výpočet pro $N_{celkem} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací..



Obr. 29.26 Schéma zobrazení 2D histogramu a jeho vyhodnocení.



Obr. 29.27 Vypočtený 2D histogram napětí σ /MPa/ a meze kluzu σ_K /MPa/ a schéma znázornění bezpečné a nebezpečné oblasti – výpočet pro $N_{celkem} = 1.5 \times 10^6$ náhodných simulací.

Z uvedených výsledků jsou zřejmé intervaly (tj. výrazná variabilita) vstupních a výstupních hodnot, což je typické pro pravděpodobnostní metody.

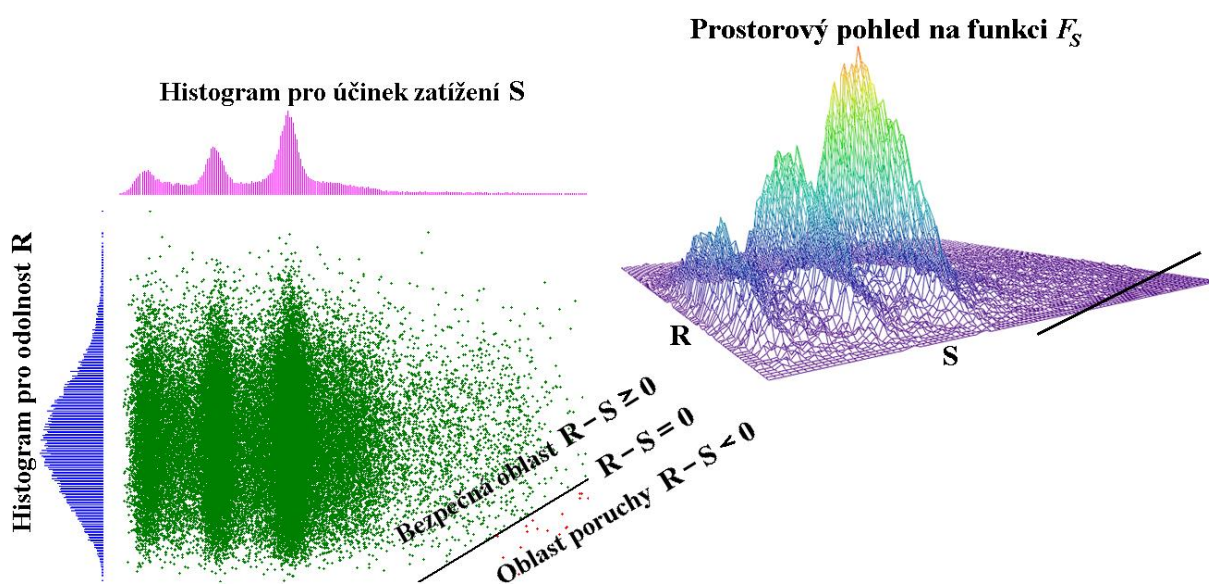
Pravděpodobnost překonání meze kluzu (tj. situace kdy $F_s \leq 0$ a kdy vzniknou plastické deformace) je znázorněna na Obr. 29.25 až 29.27. **Při zadané variabilitě zatížení, geometrie a materiálových vlastností je zřejmé, že mez kluzu bude překročena s pravděpodobností $P_f = 0.07751$ (tj. plastické deformace vzniknou s pravděpodobností 7.751 %).**

Na základě této informace, je nutné vyhodnocení konstruktéra (investora, uživatele), zda pravděpodobnost nežádoucího stavu je přípustná, viz rovnice (29.5).

29.9 Otázky k pochopení látky

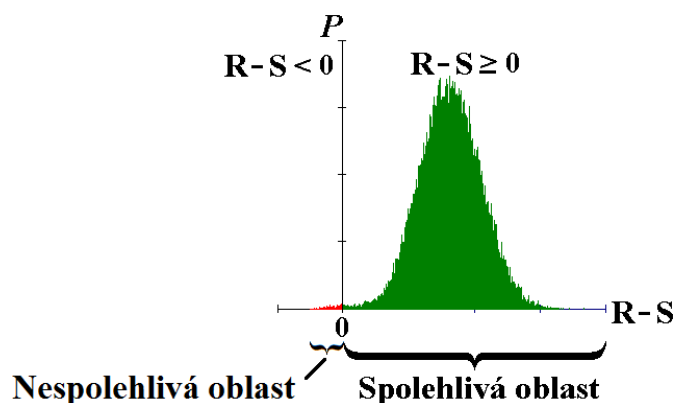
1. Existuje absolutně spolehlivá součást, konstrukce, implantát, metoda léčby atp.?
2. Jaké mohou být příčiny variability veličin?
3. Jak definujete náhodnost?
4. Co je spolehlivost?
5. Co znamená zkratka SBRA?
6. Vysvětlete pojem stochastický charakter veličiny.
7. Jaké znáte posudky spolehlivosti?
8. Co je to mezní stav?
9. Jaké jsou výhody „plně“ pravděpodobnostního posudku spolehlivosti?
10. Jaké jsou nevýhody „plně“ pravděpodobnostního posudku spolehlivosti?
11. Jaké jsou výhody deterministického posudku spolehlivosti?

12. Jaké jsou nevýhody deterministického posudku spolehlivosti?
13. Co je funkce odolnosti S ?
14. Co je funkce účinku R ?
15. Jak souvisí funkce spolehlivosti F_S s funkcí odolnosti a funkcí účinku?
16. Pomocí funkce spolehlivosti vyjádřete, kdy je jev poruchový (nežádoucí)?
17. Vysvětlete, co je na Obr. 29.28.



Obr. 29.28.

18. Vysvětlete, co je na Obr. 29.29.



Obr. 29.29.

19. Vysvětlete výraz $P_f = P_{F_S \leq 0} \approx \frac{N_f}{N_{\text{celkem}}}$.
20. Vysvětlete nerovnici $P_f \leq P_{DOV}$.
21. Vysvětlete vztahy $F_{S(t)} = R(t) - S(t)$, $P_{f(t)} \leq P_{DOV(t)}$.
22. Jaký je rozdíl mezi sériovým a paralelním systémem?

23. Co je postupný kolaps?
24. V kterých letech minulého století začal vývoj metody SBRA?
25. Jaká je spojitost mezi metodou SBRA a metodou MC?
26. Je pravda, že metoda SBRA není simulační metodou?
27. Vysvětlete princip stanovení posudku spolehlivosti metodou SBRA.
28. Co znamená slovo „anthill“ anglicky?
29. Je pravda, že metoda MC, resp. SBRA, konverguje k výsledku velmi rychle?

29.10 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Ověřte řešení Příkladu 27.6 pomocí sw Anthill.

29.11 Reference ke kapitole 29

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Frydrýšek, K.: *Pravděpodobnostní výpočty v mechanice I*, Katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB – Technická univerzita Ostrava, ISBN 978-80-248-2314-0, Ostrava, 2010, pp. 1-149.
- [3] Hruš, T., Frydrýšek, K.: *Vybrané úlohy z pružnosti a plasticity 3 (příklady z plasticity)*, VŠB – Technická univerzita Ostrava, ISBN 978-80-248-3846-5, Ostrava, 2015, pp. 1-109.
- [4] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar M.: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software*, ITAM CAS, Prague, 2001, Czech Republic, ISBN 80-86246-08-6, pp. 1-471 (cd attached).
- [5] Marek, P., Guštar, M., Anagnos, T.: *Simulation-Based Reliability Assessment for Structural Engineers*, CRC Press, Inc., Boca Raton, Florida, USA, 1995, ISBN 0-8493-8286-6, pp. 1-365.
- [6] Marek, P., Guštar, M., Bathon, L.: *Tragwerksbemessung von deterministischen zu probabilistischen verfahren*, Academia, Nakladatelství akademie věd ČR, 1998, ISBN 80-200-0706-7, pp. 1-263.
- [7] Marek, P., Brozzetti, J., Guštar M.: *Probabilistic Assessment of Structures Using Monte Carlo Simulation Background, Exercises and Software*, 2nd edition, ITAM CAS, Prague, 2003, Czech Republic, ISBN 80-386246-08-6, pp. 1-471 (cd attached).
- [8] Konečný, P., Marek, P., Guštar, M.: *Druhá dekáda rozvoje metody SBRA (přehled referencí a hlavních aktivit na UTAM AV ČR, v.v.i. a na VŠB-TU Ostrava za období 1997-2006)*, Ústav teoretické a aplikované mechaniky Akademie věd České republiky, v.v.i., Praha, 2007, ISBN 978-80-86246-30-7, pp. 1-67.
- [9] Teplý, B., Novák, D.: *Spolehlivost stavebních konstrukcí, Teorie, numerické metody, navrhování, software*, (2. opravené vyd.), ISBN 80-214-2577-6, Brno, CERM, 2004, pp. 1-89.
- [10] Konečný, P., Krejsa, M.: *Spolehlivost a bezpečnost staveb*, sylabus, 2011, pp. 1-138.

- [11] Václavek, L.: *Analytické výpočtové modely, teorie druhého řádu a pravděpodobnostní posudek spolehlivosti konstrukcí*, habilitační práce, katedra pružnosti a pevnosti, Fakulta strojní, VŠB-TU Ostrava, Ostrava, 2006, pp. 1-137.
- [12] sbra-software (noise.cz), <http://www.noise.cz/sbra/software.html>.
- [13] Jeřáb bin Ládinovy firmy spadl na mešitu v Mekce: Přes 100 obětí, TN.cz (nova.cz), <https://tn.nova.cz/zpravodajstvi/clanek/319668-jerab-bin-ladinovy-firmy-spadi-na-mesitu-v-mekce-pres-100-obeti>.
- [14] ČSN 73 0035 – 1986, Zatížení stavebních konstrukcí, včetně změny a) (1991) a změny b) (1994).
- [15] ČSN 73 1401: Navrhování ocelových konstrukcí, Český normalizační institut, Praha, 1998.
- [16] ČSN 73 6203 – 1986, Zatížení mostů, včetně změny a) (1988) a změny b) (1989).
- [17] ISO 2394: 1998(E), General Principles on Reliability for Structures, 1998, <http://www.iso.org/iso>.
- [18] ISO 13822: 2001(E), Bases of Design of Structures - Assessment of Existing Structures, 2001, <http://www.iso.org/iso>.
- [19] ISO 15686-1: 2000(E), Building and Constructed Assets - Service Life Planning, 2000, <http://www.iso.org/iso>.
- [20] Sundararajan, C. et. al.: *Probabilistic Structural Mechanics Handbook*, Chapman & Hall, New York, 1994.
- [21] Haldar A., Mahadevan S.: *Probability, Reliability and Statistical Methods in Engineering Design*, John Willey & Sons, Inc, New York, 2001, ISBN 0-471-33119-8.
- [22] Kunovský, R., Pink, T., Shaker, A., Janošík, J., Paša, L., Veselý, R.: Terapie periprotetických zlomenin femuru po implantaci totální endoprotézy kyčelního kloubu, *Acta chirurgiae orthopaedicae et traumatologiae Čechoslovaca*, ISSN 0001-5415, Praha: Galén, 2016, vol. 83, no. 5, pp. 317-326.
- [23] Artist Profile: Huguette Despault May, ParrotTalk (parrotcolor.com), <http://www.parrotcolor.com/store/blog/?p=873>.
- [24] Walls, L., Revie, M., Bedford, T.: *Risk, Reliability and Safety Innovating Theory and Practice*, CRC Press/Balkema, London, UK, ISBN: 978-1-138-02997-2, 2017.
- [25] Frydrýšek, K.: Probabilistic Analysis of the Hard Rock Disintegration Process, *Acta Polytechnica*, ISSN: 1210-2709, Vol. 48, No. 4, 2008, pp.52-59.
- [26] Frydrýšek, K.: Návrh průměru hřídele při zadané přípustné pravděpodobnosti poškození (Performance-Based Design), *Sborník referátů IX. ročník celostátní konference se zahraniční účastí SPOLEHLIVOST KONSTRUKCÍ 2008*, ÚTAM AV ČR Praha v.v.i. & VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-02-02007-3, Praha, 2008, pp. 37-40. (plná verze na CD).
- [27] Frydrýšek, K., Fusek, M., Hrabec, J.: *Praktikum software MSC.MARC/MENTAT - část 2*, Faculty of Mechanical Engineering, VŠB-Technical University of Ostrava, Ostrava, ISBN 978-80-248-2211-2, Ostrava, 2010, Czech Republic, pp. 1-144.
- [28] Frydrýšek, K., Jančo, R.: *Nosníky a rámy na pružném podkladu 2*, FS VŠB-TU Ostrava, ISBN 978-80-248-1743-9, Ostrava, 2008, pp. 1-516.

- [29] Frydrýšek, K.: The Probabilistic Approach and its Practical Applications in Medical and Mechanical engineering, *RISK, RELIABILITY AND SAFETY: INNOVATING THEORY AND PRACTICE*, 26th Conference on European Safety and Reliability (ESREL 2016), ISBN 978-1-315-37498-7, Glasgow, Scotland, 2017, CRC PRESS-TAYLOR & FRANCIS GROUP, pp. 2453-2460.

30. HISTORIE LÉKAŘSTVÍ, LÉKAŘSKÉ OBORY A JEJICH DEFINICE

Tato kapitola se stručně zabývá historií lékařství, jeho definicí, a také definuje jednotlivé lékařské obory.

Lékařství (zdravotnictví, medicína) je jedním z hlavních příležitostí aplikace teoretické i praktické biomechaniky. Z tohoto důvodu je důležité se mu věnovat. Kapitola navazuje na předchozí poznatky a lze ji považovat za základní vhled do problematiky. Některé informace byly již uvedeny v prvním díle této knihy, viz [1].

Nicméně, univerzální lék či univerzální metoda léčby stále neexistuje ☺.

Autory této kapitoly jsou Jana Pometlová, Karel Frydryšek, Leopold Pleva, Roman Madeja, Jiří Szeliga a Martin Pompach.

30.1 Definice lékařství

Lékařství, nazývané také **medicína**²³¹, je **aplikovaná biologická věda o zdraví, nemocech a stavech lidí, zvířat a rostlin. Zabývá se diagnostikou, terapií, prevencí a řešení následků onemocnění a úrazů. Je to také respektovaný multiobor, který silně využívá poznatků dalších vědeckých oborů.** V dalším textu je zaměření primárně na lékařství člověka.

Etický rozměr lékařství je již vysvětlen v Kapitole 20.3.

Zdravotnictví lze definovat jako široký a ucelený soubor opatření, postupů a zařízení tvořící systém organizace zdravotní péče a zajišťování veřejného zdraví. Zdravotnická zařízení jsou nemocnice, ordinace lékařů, zdravotnická záchranná služba, hygienická služba, lékárny, specializované léčebné ústavy, výzkumné ústavy, laboratoře a podobná lékařská zařízení. Jeho činnost je definovaná a řízená zákony a vyhláškami v dané zemi.

Blíže také reference [2] a [3].

30.2 Bolest

S léčením mnohdy souvisí **bolest**²³², což je určitý psychický stav, prožitek či zážitek pacienta. Není to jen fyzický pocit, ale přesněji vzájemně vázaný komplexní biologický, psychologický a sociální pocit, který zahrnuje neurologické, psychologické a sociální faktory a reakce člověka. Nelze ji objektivizovat má vždy osobní individuální rozměr, který nelze plně sdělit, protože každý ji prožívá jedinečně. Souvisí tedy s tělem i psychikou a znamená to, že může být léčena či regulována nejen léky a operacemi, ale také technikami psychologie a podporou blízkých lidí. **Bolest nemusí mít vždy jasnou příčinu.** Blíže [24] a [25].

Během bolesti se vytváří poměrně složitá interakce mezi tělem a myslí (vědomím). Vědomí není jen pasivním tvůrcem toho, jak je bolest prožívána, ale také aktivním tvůrcem toho, jak je bolest prožívána a jak se na ni reaguje. Blíže např. [24].

Bolest se obvykle dělí na **akutní bolest**, což je často symptom úrazu nebo určitého kratšího období nemoci, a **chronickou bolest**, která trvá déle než 3 až 6 měsíců a je obvykle spojena i s psychickými změnami (např. depresemi, změnami osobnosti aj.). Existuje také **subakutní bolest**, která je mezistupněm mezi akutní a chronickou bolestí. Blíže [24] a [25].

²³¹ **Medicína** je slovo latinského původu. Slovo se odvozuje se od latinského *ars medicina* = umění léčit.

²³² **Bolest**, latinsky **dolor** a řecky **poiné**.

Bolest lze také dělit podle její intenzity, a to na žádnou, malou (mírnou), střední, velkou a nesnesitelnou bolest.

Více o bolesti lze nalézt např. v referencích [24] a [25].

30.3 Historie lékařství

Pro doplnění informací o historii lékařství, v kontextu biomechaniky a anatomie, je možné také nahlédnout do prvního dílu této knihy do kapitoly 1.2 a 7.1, viz [1].

- **Pravěk**

Vzhledem k tomu, že nemoci a úrazy provází lidstvo již od jeho počátků, lze jednoznačně předpokládat, že jistá forma primitivní medicíny a snaha o léčbu různorodých nemocí existovala již v pravěku²³³. Ačkoli pro to neexistují přesvědčivé ranné archeologické důkazy, někteří antropologové se správně domnívají, že v každém sociálním společenství existovala osoba, která ostatním členům komunity pomáhala při nemoci a poranění. Nejstarší léčebné postupy se řídily instinkty, např. vyvolání zvracení po konzumaci nevhodné potravy, působení tepla a chladu. Postupem času se tyto postupy upravovaly podle nasbíraných zkušeností předávaných z generace na generaci. Z těch nejzkušenějších a nejtalentovanějších se pak stávali primitivní lékaři, léčitelé, případně kněží či šamani.

„Od pradávna“ se začaly v léčbě využívat některé druhy rostlin nebo částí zvířat. Při léčbě zlomenin se využívaly různé druhy **primitivní fixace**²³⁴, zřejmě z větví stromů a kůže zvířat. Příčiny nemocí se nejčastěji dávaly do spojitosti s nadpřirozenými bytostmi, jako jsou bohové nebo démoni, nebo s jinými lidmi, kteří škodí ostatním uhranutím či prokletím, anebo s tresty za provinění. Při léčbě se tak používaly mimo jiné různé magické rituály.

Podle kosterních nálezů je patrné, že již v paleolitu²³⁵ se prováděly trepanace²³⁶ lebky, viz Obr. 30.1 a [4] až [6], a to zřejmě za účelem léčby, magického rituálu nebo trestu. Podle přítomnosti hojivých změn na kosterních pozůstatcích je jisté, že pacienti tyto zákroky přežívali.

²³³ **Pravěk** je obvykle označení dějin lidstva, ze kterého nejsou známy a nezachovaly se žádné písemné prameny. Obvykle je to tedy období do vzniku písma.

²³⁴ **Fixace** je úkon léčby zlomenin. Může být buď konzervativní, tj. umístění sádry, obvazu či dlahy na tělo nebo chirurgický. V chirurgii existuje **vniřní fixace** (aplikace dlahy či hřebu atp. na kost intraoseálně či extraoseálně) a **zevní fixace** (aplikace zevního fixátoru mimo tělo pomocí šroubů nebo drátů v kosti). Blíže další díl této knihy.

²³⁵ **Paleolit** je starší doba kamenná. Slovo vzniklo složením řeckých slov pálaios = starý a líthos = kámen.

²³⁶ **Trepanace** je chirurgický úkon vytvoření otvoru v lebce.



Obr. 30.1 Prehistorická trepanovaná lebka v Muzeu hlavního města Prahy, zdroj [4] https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Treated_skull,_prehistoric_times,_City_of_Prague_Museum,_175646.jpg.

Ukončení kočovného loveckého způsobu života a přechod na zemědělský způsob se vznikem trvalých osídlení s sebou přineslo změnu v nemocnosti lidské populace. Vlivem koncentrace většího množství lidí na malé ploše se začaly častěji vyskytovat epidemie přenosných onemocnění a zvýšilo se množství parazitů napadajících člověka. Hromadící se odpady v blízkosti lidských sídel přilákaly různé hlodavce a hmyz. Díky domestikaci některých druhů zvířat a jejich dlouhodobému úzkému kontaktu s lidmi se některé původně zvířecí nemoci staly přenosnými na člověka. **Zdá se tedy, že pandemie, podobné např. pandemii koronaviru covid-19²³⁷, byly součástí lidské civilizace již od jejího počátku.**

Více o historii pravěkého lékařství lze nalézt v [7] a [8].

- **Starověk**

²³⁷ **Covid-19**, nebo COVID-19 (z anglického **coronavirus disease 2019**) je vysoce infekční onemocnění způsobené koronavirem SARS-CoV-2. První případ onemocnění byl identifikován v čínském Wu-Hanu v prosinci 2019, rozšířil se po celém světě a způsobil tak globální pandemii. Příznaky onemocnění jsou různé, od bezpříznakového stavu až úmrtí.

Významným světovým archeologickým nálezem je také objev ledovcové mumie **Ötzi**²³⁸, která s vysokou pravděpodobností také dokládá nejstarší použití **akupunktury**²³⁹ či **akupresury**²⁴⁰ na světě.

Nejstarší starověké civilizace ještě nerozlišovaly mezi racionální vědou, magií nebo náboženstvím. Při léčbě se často používaly jak magické, tak i léčebné postupy. Nejstarší lékařský předpis je dochován ze starověké Mezopotámie z období třetí dynastie (asi 2112–2004 př. Kr.).

Postupně se od sebe oddělily dvě skupiny léčitelů. Jedna se věnovala **duchovní strážce nemoci** a **exorcismu**, a druhá pak léčila **fyzické symptomy nemoci** pomocí bylin, živočišných výtažků, lektvarů, mastí, obkladů a dlah. Například, ve starověkém Egyptě působili chirurgové, kteří se věnovali převazům a fixaci zlomenin pomocí dlah, léčbě zubů aj.

Jména schopných starověkých lékařů byla zaznamenávána v písennictví, předávána ústně a někdy i mytologizovaná. Postupně se pak někdy stávali „bohy“ lékařství (např.

Imhotep²⁴¹ ve starověkém Egyptě nebo **Asklépios**²⁴² ve starověkém Řecku).

²³⁸ **Ötzi**, nazývaný také **Der Mann aus dem Eis**, **Ledovcový muž** či **Homo tyrolensis**, je dobře zachovalá nejstarší přirozená lidská mumie v Evropě, která pochází z doby měděné. Byl nalezena v Ötztalských Alpách na rakousko-italské hranici v září 1991. Blíže [20] <https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%96tzi>.



Ötzi (zdroj obrázku internet)

²³⁹ **Akupunktura** je metoda alternativní medicíny, která je některými odborníky považovaná za pseudovědeckou metodu. Do akupunkturních bodů těla se zapichují jehly, které se někdy také nahřívají nebo magnetizují. Pochází z tradiční čínské medicíny. Více např. na [21] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Akupunktura>.

²⁴⁰ **Akupresura** je metoda alternativní medicíny, která se někdy používá ve spojení s akupunkturou. Při léčbě se aplikuje fyzický tlak na akupunkturní/akupresurní body. Tlak může být vyvíjen rukou, loktem nebo nástroji. O účinnosti akupresury nejsou vždy spolehlivé důkazy, a proto je některými odborníky považovaná za pseudovědeckou metodu. Blíže např. [22] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Akupresura>.

²⁴¹ **Imhotep**, v egyptštině „Ten, který přichází v míru“ nebo „Vítaný“, byl egyptský vezír, kněz, architekt, stavitel, lékař a mudrc, který se narodil roku 2700 př. Kr. Později byl pokládán za jednoho z bohů a patrona lékařů. Jeho nejslavnějším dílem je asi Džoserova pyramida. V literatuře bývá ztotožňován se starořeckým Asklépiem. Blíže [23] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Imhotep>.



Džoserova pyramida, jejímž architektem a stavitelem byl Imhotep (zdroj obrázku internet)

²⁴² **Asklépios**, latinsky **Aesculapius** a počestně také **Eskulap** či **Aeskulap**, byl údajný starořecký léčitel a lékař, jež měl žít ve 13. století př. Kr. Nakonec byl prohlášen v řecké mytologii za boha lékařství. V literárních pramenech bývá ztotožňován s egyptským Imhotepem.

Také mnohým „bohům“ byla přisuzována léčebná moc, např. řecký **Apollón**.²⁴³

Z této doby pochází první písemné popisy symptomů, diagnostiky a léčby nemocí vycházející z **empirického sledování** (např. babylonská Diagnostická příručka nebo 13 lékařských papyrů ve starověkém Egyptě).

Asi **první historicky doloženou epidemií moru**, či nějaké „záhadné“ či „nadpřirozeně způsobené“ nemoci, je epidemie, která postihla oblast Palestiny roku 1060 př. Kr. Je popsána v Bibli ve Starém zákoně jako Boží trest za uloupení posvátné archy úmluvy. Krádež tehdy provedli Pelištejci²⁴⁴ Izraelcům, viz [10] <http://bible.patroni.cz/index.php?id=7319>.

Stejně jako v současnosti, i ve starověkých kulturách bylo nutné řídit vztahy mezi jedinci ve společnosti pomocí zákonů. Jelikož na lékařství bylo pohlíženo jako na řemeslo, které může ovlivnit život pacienta, týkaly se tyto zákony i povinností a zodpovědnosti lékaře. V nejstarším dochovaném **Chammurapiho**²⁴⁵ **zákoníku** (nazývaný také **kodeks krále Chammurapiho**) vydaném kolem roku 1760 př. Kr. se 9 paragrafů z 282 týkalo činnosti lékařů, stanovovaly odměny za úspěšnou léčbu a tresty za neúspěšnou léčbu včetně proslulého výroku „oko za oko ...“.

Mnohem známější je dílo z pozdějšího klasického období řeckých dějin, tzv. **Hippokratova**²⁴⁶ **přísaha**. Její původní obsah byl poplatný lékařským znalostem a možností léčby v době svého vzniku a není zcela aplikovatelný na současnou medicínu. Do současné podoby se zachovaly hlavní myšlenky: cílem léčby je pacientovi pomoci a léčbou jej nepoškodit. Hippokratově přísaze je věnována Kapitola 30.3.

Z pozdějších staletí se nám dochovalo mnohem více písemných pramenů, které dokumentují vznik různých lékařských škol, které se již oprostily od vlivu kouzel a pověr. Lékaři vycházeli z pečlivé anamnézy a vyšetření pacienta. Sledovali změny teploty, pulsu, dýchání, vlasů, nehtů, moči, stolice a dalších tělesných tekutin. Tím se medicína stávala skutečnou vědou.

²⁴³ **Apollón** je bůh z řecké mýologie. Byl bohem slunce, světla, hudby, proroctví, léčitelství, umění, moru, věštění aj.

²⁴⁴ **Pelištejci** (staročesky **Filištini**) byl indoevropský národ v Palestině, pocházející asi z Kréty, který zanikl ve 4. století př. Kr. po babylonské a perské invazi. Blíže [9] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Peli%C5%A1tejci>.

²⁴⁵ **Chammurapi**, nazývaný také pod jménem **Chammurabi** (1792–1750 př. Kr.), byl král, vojevůdce a reformátor správy starobabylonské říše. Známý je především Chammurapiho zákoníkem vztahujícím se k tehdejšími otázkám veřejného i soukromého života.



Dioritová stéla s Chamurapiho zákoníkem, kde v horní části je znázorněn reliéf sedícího Chammurapiho a boha Šamaše (zdroj obrázku internet).

²⁴⁶ **Hippokratés** (460 př. Kr. – cca 370 př. Kr.) byl nejslavnější lékař starověku, považovaný za zakladatele lékařské vědy.

Za „otce evropské medicíny“ je považován **Hippokrates**. Jeho **teorie čtyř tělesných šťáv ovlivňujících zdraví člověka**, která je již dnes překonaná, **ovlivnila lékařství až do novověku**. V současnosti se ještě můžeme setkat s charakteristikou člověka **melancholik**²⁴⁷, **sangvinik**²⁴⁸, **cholerik**²⁴⁹ a **flegmatik**²⁵⁰ vycházející právě z této teorie nerovnováhy „tělesných šťáv“.

O významné propojení vědomosti lékařů starověkého Egypta, Mezopotámie, Indie a Řecka se zasloužil při svém tažení **Alexandr Makedonský**²⁵¹ na konci 4. století př. Kr. Nově založená Alexandrie v Egyptě se pak stala centrem starověké vzdělanosti. V této době vznikla **první díla zabývající se anatomií a fyziologií člověka**.

Ve starověkém Římě bylo lékařské řemeslo považováno za podřadné a jeho provozování bylo svěřováno specializovaným otrokům (servi medici). Na přelomu letopočtu je doloženo zakládání prvních historicky doložených nemocnic nejčastěji pro římské legionáře. V 1. a 2. století po Kr. byla ve starověkém Římě sepsána celá řada významných medicínských děl. Nejznámější jsou díla **Aula Cornelia Celsa**²⁵², ve kterých popisuje příznaky zánětu a od **Claudia Galéna**²⁵³, která se stala základní učebnicí medicíny až do novověku.

Soranos z Efesu²⁵⁴ sepsal díla o porodnictví a gynekologii, viz Obr. 30.2, a řecký lékař **Discordius** sepsal knihu *Materia Medica*, kde vydal lékopis s předpisy pro cca 600 léčivých přípravků a také informace o jedech a pojednání o soudním lékařství.

²⁴⁷ **Melancholik** je jeden ze čtyř druhů temperamentu dle Hippokrata – stručně je to labilní introvert.

²⁴⁸ **Sangvinik** je jeden ze čtyř druhů temperamentu dle Hippokrata – stručně je to stabilní extrovert.

²⁴⁹ **Cholerik** je jeden ze čtyř druhů temperamentu dle Hippokrata – stručně je to labilní extrovert.

²⁵⁰ **Flegmatik** je jeden ze čtyř druhů temperamentu dle Hippokrata – stručně je to stabilní introvert.

²⁵¹ **Alexandr Makedonský** nazývaný také **Alexandr Veliký** nebo **Alexandr III. Makedonský** (356 př. Kr. – 323 př. Kr.) byl známý řecký král, vojevůdce a dobyvatel. Svými činy se také zasloužil o šíření řecké vzdělanosti a kultury.

²⁵² **Aulus Cornelius Celsus** (25 př. Kr. – 50 po Kr.) – psal encyklopedie o zemědělství, válečném umění, rétorice, filosofii, zákonu a medicíně.

²⁵³ **Galénos, Galén** (latinsky **Claudius Galenus**) žil v letech 129–200. Patřil mezi nejznámější starověké lékaře. Stojí u základů anatomie, fyziologie, patologie, farmakologie a neurologie. Byl také významným filosofem.

²⁵⁴ **Soranos z Efesu** (žil v 1. a 2. století po Kr.) byl řecký lékař.



Obr. 30.2 Pozice plodu v uteru (děloze). Středověká kopie díla Sorána z Efezu, viz [11]
[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soranus_of_Ephesus_Gynaecology_Brussels, Ms. 3714.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soranus_of_Ephesus_Gynaecology_Brussels_Ms_3714.jpg).

Přibližně ve stejné době vzniklo první velké lékařské dílo v Číně. Jde o kánon Chuang-ti nej-ťing (česky Vnitřní kniha Žlutého císaře), podávající formou otázek a odpovědí návod na diagnostiku i terapii řady chorob. Je to základní dílo **tradiční čínské medicíny (TCM)**²⁵⁵. V Indii v té době byly na vzestupu chirurgické léčebné metody, zejména plastiky obličeje pomocí kožních laloků aj.

Blíže o historii starověkého lékařství např. reference [7] a [8].

• Středověk

Středověké lékařství v Evropě čerpá hlavně z poznatků antiky a středověk byl převážně dobou stagnace medicíny v křesťanské Evropě. Od 4. století péči o nemocné postupně přebírala

²⁵⁵ **Tradiční čínská medicína** vychází z tradičního čínského léčitelství, je považována za alternativní, avšak mnohdy kontroverzní až pseudovědeckou, viz např. [12]
https://cs.wikipedia.org/wiki/Tradi%C4%8Dn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADnsk%C3%A1_medic%C3%ADna

církev²⁵⁶. První ekumenické koncily ukládají biskupům zakládat tzv. xenodochia (útulky pro cizince, chudé a nemocné) ve svých diecézích.

Roku 529 Benedikt z Nursie shromáždil mnišskou komunitu, ve které klášter odpovídal za nemocné ve své oblasti. Kromě architektonicky izolovaných prostor pro nemocné a zahrady s léčivými bylinami měl totiž každý klášter svou knihovnu a předávání zkušeností ze starších generací na mladší patřilo k tradiční řeholní praxi. Díky benediktinům²⁵⁷ vznikl pro pozdější rozvoj lékařství velmi důležitý fenomén, který dnes označujeme jako **klášterní medicína**, viz [13] https://cs.wikipedia.org/wiki/Kl%C3%A1tern%C3%AD_medic%C3%ADna. Péče o nemocné byla v této době postavena na úroveň službě Kristu. Díky propojení léčení s církví do léčby opět pronikaly iracionální/duchovní prvky a **modlitba** se stala součástí léčby.

Příkladem takové řeholní praxe může být jediný původně český a jediný ženou založený katolický církevní řád na světě, nazvaný **Rytířský řád křižovníků s červenou hvězdou**²⁵⁸. Řád založila Anežka Přemyslovna²⁵⁹, v roce 1233, viz také Obr. 30.3.

NEJSTARŠÍ LÉKAŘSTVÍ V ČECHÁCH

THE OLDEST MEDICINE IN BOHEMIA

Prvním českým lékařem dle pramenů byl osobní lékař Boleslava II. biskup Thiddag (†1017), lékařství vystudoval v korbejském opatství v severním Porýní-Vestfalsku (klášter Corvey), kde byl mnichem.

První špitál v Praze byl při týnském dvoře, tzv. Ungelt. Byl založen v roce 1100. V roce 1135 zde byla zpřístupněna první lékárna.

První křižovnícký špitál byl založen Anežkou Přemyslovnou v roce 1232 a nacházel se u kostela sv. Haštala v Praze.

According to sources, the personal physician of Boleslaus II, bishop Thiddag, was the first Czech physician. Bishop Thiddag (†1017) studies medicine in the Imperial Abbey of Corvey in North Rhine-Westphalia where he served as a monk.

The first hospital in Prague was located at the Týn Yard (the "Ungelt"). It was founded in 1100. The first pharmacy was opened to the public in 1135.

The first Knights of the Cross hospital was founded by saint Agnes in 1232 and was located near the church of St. Haštal in Prague.

PRVNÍ LÉKÁRNÍČÍ V PRAZE / FIRST PHARMACISTS IN PRAGUE

1275–Conradus apotecarius Pragensis
 1287–Bandinus de Aretico (pocházel z Arezza, Toskánsko) / (from Arezzo in Tuscany)
 1296–Conradus dictus Riczhardus Apothecarius (pražský měšťan) / (a Prague townsman)



*Konstantin provádí uroskopii 13. století
Konstantin performs uroscopy, 13th century*

Obr. 30.3 Nejstarší písemné informace o lékařství v Čechách, fotografie z Muzea Karlova mostu v Praze.

Vlivem křesťanské nauky se na utrpení pohlíželo jako na test boží, který nabízí možnost vykoupení z hříchů. Podle některých církevních hodnostářů tak byla léčba nemocí zásahem do vůle Boha. Výroba léčivých přípravků byla často zaměňována za provádění čarodějnických

²⁵⁶ **Církev**, respektive křesťanská církev, je náboženskou organizací sjednocenou vyznáním víry v Ježíše Krista.

²⁵⁷ **Řád benediktinů**, přesněji **Řád svatého Benedikta** (latinsky **Ordo Sancti Benedicti**) je nejstarší existující mnišský řád západního křesťanství.

²⁵⁸ **Rytířský řád křižovníků s červenou hvězdou** (latinsky **Ordo militaris Crucigerorum cum rubea stella**) má sídlo v Praze I na Starém městě u paty Karlova mostu (ulice Platněřská 191/4), viz [14] https://cs.wikipedia.org/wiki/Ryt%C3%AD%C5%99sk%C3%BD_%C5%99%C3%A1d_k%C5%99i%C5%BEO_vn%C3%ADk%C5%AF_s_%C4%8Dervenou_hv%C4%9Bzdou.

²⁵⁹ **Anežka Přemyslovna**, zvaná **Česká** (1211? – 1282) byla česká princezna, která patřila k významným představitelkám Přemyslovské dynastie. Byla řeholnicí a výraznou osobností politického, kulturního a společenského života.

rituálů a násilně potlačována ze strany církve. Chirurgie byla církví oficiálně zakázána ediktem a základní chirurgické ošetření prováděli lazebníci, holiči nebo kati.

Arabská říše měla zdravotnictví ve středověku na poměrně dobré úrovni, arabští lékaři vycházeli z poznatků antických lékařů. Antické spisy byly přeloženy do arabštiny a z té pak v následujících stoletích do latiny. Nejvýznamnější lékaři té doby byli **Rhazes** a **Avicenna**²⁶⁰, kteří byli uznáváni i katolickou církví.

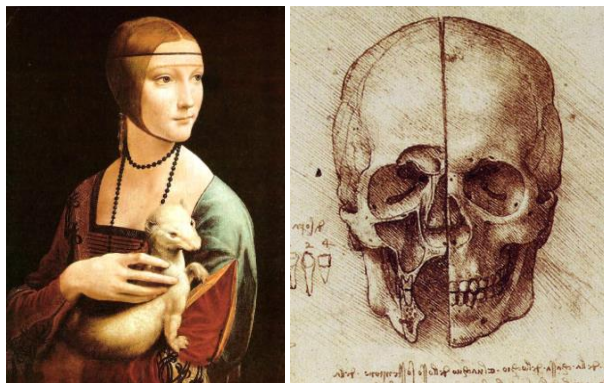
Více o historii středověkého lékařství např. reference [7] a [8].

- **Novověk**

Novověk s sebou přinesl znovuobjevení zapomenutých antických vědomostí, jejich případnou kritiku a na ně navázání nových objevů. V této době byl v medicíně patrný rozmach anatomických a fyziologických objevů. V 16. století **Leonardo da Vinci**²⁶¹ **nakreslil topografické řezy lidským tělem**, **Andreas Vesalius** popsal řadu orgánů a zavedl nové anatomické názvosloví. Odpůrcem učení Galéna a Avicenny byl **Paracelsus**²⁶², který zdůrazňoval vliv diet, léčivých bylinek a prostředí, kde je pacient léčen. Jeho učení je považováno za předchůdce farmaceutické chemie. O století později **Robert Boyle**²⁶³ **odmítl**

²⁶⁰ **Avicenna**, známý také pod jménem **Ibn Síná** (asi 980–1037), byl středověký perský filosof, slavný lékař a polyhistor.

²⁶¹ **Leonardo di ser Piero da Vinci** (1452–1519) byl italský malíř, sochař, architekt, přírodovědec, hudebník, spisovatel, konstruktér ...



Příklady z díla da Vinciho – Dáma s hranostajem a anatomie crania (zdroj internet)

²⁶² **Paracelsus**, celým vlastním jménem **Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim**, (1493–1541) byl alchymista, astrolog, přírodovědec a lékař, který reformoval lékařství a předznamenal tak vznik novodobého lékařství. Jméno Paracelsus si zvolil, aby vyjádřil svou větší významnost než uznávaný starořímský lékař Celsus.

²⁶³ **Robert Boyle** (1627–1691) byl irský přírodovědec, chemik, fyzik a vynálezce. Je považován za zakladatele moderní chemie. Známý je Boyle–Mariottův zákon ideálního plynu, viz Kapitola 15.12 v prvním dílu této knihy [1].



Zdroj obrázku internet

Hippokratovo učení o čtyřech tekutinách a nahradil ho teorií prvků. William Harvey²⁶⁴ popsal krevní oběh a zamítl tak již zastaralé závěry Galénova učení.

S rozmachem vědeckých vynálezů vzrostly možnosti poznávání lidského organismu a jeho chorob. S rozšiřujícím poznáním lidského těla se postupně začala formovat jednotlivá medicínská odvětví.

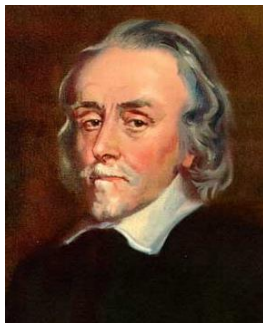
Za zakladatele moderní chirurgie je považován **Ambroise Paré²⁶⁵**, jako vojenský lékař zavedl v 16. století metodu podvazování cév a obvazy se směsí vaječného žloutku, růžového oleje a terpentýnu místo vypalování ran žhavým železem nebo vřelým olejem. To samozřejmě vedlo k vyšší úspěšnosti léčby.

Více o historii novověkého lékařství lze nalézt v [7] a [8].

• Osvícenství a 19. století

Zkonstruování mikroskopu umožnilo poznání buněčné stavby lidského těla. **Anthony van Leeuwenhoek²⁶⁶** popsal jako první pruhované kosterní svaly, spermatozoa, červené krvinky a prvky roku 1703. Roku 1709 **Gabriel Daniel Fahrenheit²⁶⁷** objevil lihový a rtuťový

²⁶⁴ **William Harvey** (1578–1657) byl anglický lékař známý objasněním krevního oběhu a odmítnutím teorie samoplození.



Zdroj obrázku internet

²⁶⁵ **Ambroise Paré** (1510–1590) byl francouzský královský chirurg. Vynikal především v chirurgii a léčení ran. Je považován za jednoho z otců moderní chirurgie, soudní patologie a moderního vojenského lékařství.



Zdroj obrázku internet

²⁶⁶ **Antoni van Leeuwenhoek** (1632–1723) byl nizozemský amatérský přírodovědec, inženýr, výrobce mikroskopů a obchodník, který je nazýván „otcem mikrobiologie“ průkopník mikroskopie.

²⁶⁷ **Daniel Gabriel Fahrenheit** (1686–1736) byl fyzik polsko-německého původu.



Zdroj obrázku internet

teploměr a zavedl teplotní stupnici. Roku 1816 **René Laënnec** zkonstruoval **stetoskop**²⁶⁸ a popsal hrudní ozvy. **Scipione Riva-Roca** roku 1895 sestavil přístroj k měření tlaku krve a pulsu.

Antoine-Laurent de Lavoisier²⁶⁹ objasnil roli kyslíku při dýchání a spalování v roce 1774. **Claude Bernard** studoval metabolismus cukrů a trávicí pochody, popsal udržování stálého vnitřního prostředí a princip **homeostázy**²⁷⁰ v letech 1848-1859. **Hermann Emil Fischer** vyslovil teorii enzymové katalýzy a trávení. **G.B.A. Duchenne** studoval poruchy nervů a svalů, využíval elektrické impulzy při diagnostice a léčbě v roce 1855.

V roce 1858 **Rudolf Virchow**²⁷¹ popsal reprodukci buněk a vznik všech buněk dělením vajíčka. Popsal princip rozvoje rakoviny jako šíření změněných buněk dále do těla. **Johann Gregor Mendel**²⁷² popsal zákonitosti křížení a přenosu dědičných informací podle zcela přesných poměrů. Jako jeden z prvních biologů využil pro své závěry statistiku a výsledky publikoval v roce 1866.

²⁶⁸ **Stetoskop**, či **fonendoskop**, je jednou ze základních diagnostických pomůcek lékařů. Je používán k poslechovému (auskultačnímu) vyšetření orgánů, jejichž činnost provází akustické fenomény. Součástí stetoskopu je naslouchátko, které snímá zvuk a pomocí speciální membrány a případně i kabelu vedou do ucha lékaře. Nejčastěji se stetoskopy používají k poslechu srdce, plic, střev, při klasickém měření krevního tlaku s tonometrem nebo v porodnictví.

²⁶⁹ **Antoine-Laurent de Lavoisier** (1743–1794) byl francouzský šlechtic, chemik, ekonom, právník a daňový úředník.



Zdroj obrázku internet

²⁷⁰ **Homeostáze/Homeostáza** je schopnost udržovat stabilní vnitřní prostředí jako nezbytnou podmínku existence organismu. Blíže 1. díl této knihy, viz [1].

²⁷¹ **Rudolf Ludwig Karl Virchow** (1821–1902) byl německý lékař a politik. Je považován za jednoho ze zakladatelů moderní patologie a sociální hygieny obyvatelstva. Známy je výroky „Omnis cellula e cellula“, tj. že dceřiné buňky vznikají dělením z buněk mateřských.

²⁷² **Johann Gregor Mendel** (1822–1884) byl německo-český přírodovědec, opat Starobrněnského kláštera, významný výzkumník a biolog považovaný za zakladatele a „otce“ genetiky.



Zdroj obrázku internet

Ignaz Philipp Semmelweis²⁷³ snížil úmrtnost rodiček na poporodní infekce zavedením přísných hygienických pravidel na porodnicích, když v roce 1847 zavedl mytí rukou chlorovým vápnem před ošetřením rodičky. **Joseph Lister**²⁷⁴ zavedl do chirurgické praxe princip antiseptiky, ničení choroboplodných zárodků chemickými prostředky. Roku 1865 provedl úspěšnou operaci po desinfekci operačního pole kyselinou karbolovou. Stejně tak se začaly desinfikovat chirurgické nástroje.

Edward Jenner²⁷⁵ roku 1796 provedl první **očkování (vakcinace)**. Naočkoval malému chlapci kravské neštovice, který následně získal imunitu proti pravým lidským neštovicím²⁷⁶. **Luis Pasteur**²⁷⁷ prokázal, že bakterie mohou být původci onemocnění. Propagoval imunizaci zvířat i lidí, v roce 1885 sám sebe imunizoval a následně nakazil vzteklinou. **Robert Koch** vyvinul metodu kultivace bakteriálních kultur, objevil/potvrdil řadu mikrobiálních původců onemocnění (např. objevil původce tuberkulózy), formuloval podmínky, podle kterých lze prohlásit mikroorganismus za původce onemocnění. Jeho práce vycházely v letech 1876–1904. **Emil von Behring** objevil imunizaci proti záškrtu 1890 a tetanu 1892, zavedl léčbu pomocí séra s protilátkami.

Humphrey Davy²⁷⁸ objevil rajský plyn a jeho účinky v roce 1799.

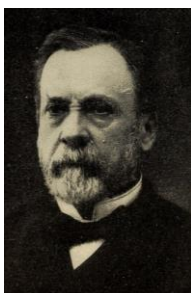
²⁷³ **Ignác Filip Semmelweis**, maďarsky **Semmelweis Ignác Fülöp**, (1818–1865) byl maďarsko-německý lékař, zabýval se zkoumáním příčin epidemii horečky omladnic (febris puerperalis) v porodnicích. Zjistil, že nákazu přenáší sami lékaři při přecházení mezi pitevnou a jinými odděleními. Formuloval zásady antiseptiky, které se postupně staly obecným nemocničním standardem. Nicméně, jeho názory byly nejprve odmítány, protože lékaři „obtížně“ přijímali, že by svou „nedostatečnou“ hygienou mohli být přenašeči infekce.

²⁷⁴ **Joseph Lister, 1. baron Lister** (1827–1912) byl britský lékař, který způsobil převrat při chirurgických operacích objevem a zaváděním antiseptiky.

²⁷⁵ **Edward Jenner** (1749–1823) byl britský vesnický lékař, který jako první vytvořil vakcínu proti pravým neštovicím. Při tom využil kravské neštovice, jež vytvořily imunitu proti nebezpečným pravým neštovicím bez toho, aby byl nakažený ohrožen na zdraví, životě či znetvořením.

²⁷⁶ **Pravé neštovice**, nazývané také **černé neštovice** (lat. *Variola* nebo *Variola vera*) jsou způsobeny virem z čeledi Poxviridae. Jsou prudce nakažlivou a jednou z nejnebezpečnějších akutních chorob. Jen v průběhu 20. století zahubily 300 až 500 milionů lidí.

²⁷⁷ **Louis Pasteur** (1822–1895) byl francouzský profesor biolog a chemik, jeden z nejvýznamnějších vědců 19. století. Byl průkopníkem nových vědeckých oborů stereochemie, mikrobiologie a imunologie, objevil vakcíny proti sněti slezině a vzteklině.



Zdroj obrázku internet

²⁷⁸ **Humphry Davy** (1778–1829) byl anglický chemik, fyzik, geolog, experimentátor, zakladatel elektrochemie a objevitel řady chemických prvků.



Zdroj obrázku internet

Roku 1815 **Michael Faraday**²⁷⁹ popsal účinky éteru a roku 1842 byla provedena první operace při použití éteru jako anestetika²⁸⁰. **Felix Hoffman** roku 1895 syntetizoval první analgetikum – kyselinu acetylsalicylovou (aspirin).

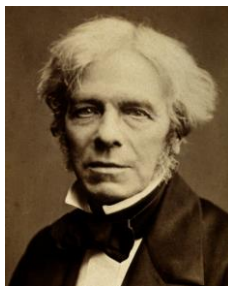
Alexander Wood²⁸¹ roku 1853 představil jehlu a injekční stříkačku k podkožní aplikaci látek.

Koncem 19. století se vědecký výzkum koncentruje i na psychiku člověka a začíná se formovat psychiatrie a psychologie. Jejím nejvýraznějším propagátorem byl **Sigmund Freud**.

S medicínou je neoddělitelně spojeno ošetrovatelství, za jeho propagátorku a průkopnici je považována zdravotní sestra **Florence Nightingale**²⁸², která se podílela v druhé polovině 19. století na reorganizaci nejprve vojenských nemocnic v Krymské válce²⁸³.

V roce 1864 byl založen **Červený kříž**²⁸⁴, jako instituce poskytující zdravotní služby. Byla stanovena pravidla práce zdravotníků a jejich ochrany zejména při ozbrojených konfliktech, tato pravidla byla zakotvena v **První ženevské úmluvě**.

²⁷⁹ **Michael Faraday** (1791–1867) byl anglický chemik, fyzik a vynálezce. V roce 1831 objevil elektromagnetickou indukci.



²⁸⁰ **Anestetikum** je chemická látka používaná k navození anestezie, tj. je stavu, kdy je vyraženo vnímání bolesti a a případně i vědomí. Existují četné typy anestetik.

²⁸¹ **Alexander Wood** (1817–1884) byl skotský lékař.

²⁸² **Florence Nightingale** (1820–1910) byla anglická ošetrovatelka, průkopnice srovnávací lékařské statistiky, zakladatelka ošetrovatelství jako vědy. Její principy pomohly snížit úmrtnost pacientů. Založila první zdravotnickou školu pro dívky.



Zdroj obrázku internet

²⁸³ **Krymská válka** (1853–1856) mezi carským Ruskem a Osmanskou říší podpořenou koalicí Francie, Spojeného království a Sardinského království. Válku způsobila mocenská expanze Ruska. Výsledkem byla porážka Ruska stvrzená Pařížskou mírovou smlouvou.

²⁸⁴ **Červený kříž**, resp. **mezinárodní červený kříž**, je mezinárodní hnutí organizující právně nezávislé národní společnosti Červeného kříže. Červený kříž pracuje na základě společných zásad, cílů a předpisů. Je založen na dobrovolnické pomoci. Snaží se chránit životy, zdraví, důstojnost a snižovat utrpení lidí v nouzi následkem válek, přírodních nebo technických katastrof a epidemií bez ohledu na národnost, původ, náboženství nebo politický názor postižených. Blíže např. [15]

https://cs.wikipedia.org/wiki/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD_%C4%8Derven%C3%BD_k%C5%99%C3%AD_%C5%BE.

Od 18. století probíhala řada reforem k vytvoření uceleného systému zdravotní správy, které by garantovaly vzdělání zdravotníků a kvalitu péče. Ke zlepšení péče přispělo i zakládání specializovaných ústavů pro nemocné – všeobecné nemocnice, porodnice, nalezince (pro opuštěné děti), chorobince (pro dlouhodobě nemocné a nevyléčitelně nemocné) a ústavy choromyslných.

Více o historii lékařství v osvěcenství a 19. století lze nalézt v [7] a [8].

• 20. století

Ve 20. století se rozmach medicíny ještě zvýraznil spolu s postupujícím vědeckotechnickým rozvojem. V první polovině 20. století převažovaly objevy v biochemii a fyziologii člověka a příčinách nemocí. Postupně pak začaly převažovat technické a farmakologické vynálezy, které zlepšily možnosti léčby nemocí. Množství objevů v tomto období by vydalo na několik publikací. Nicméně, je zde uvedeno jen několik převratných objevů, z nichž některé jsou uvedeny také v 1. dílu této knihy.

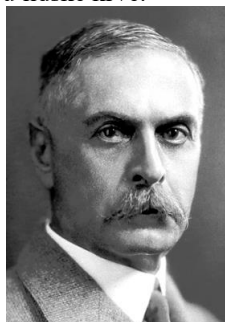
V roce 1900 lékař **Karl Landsteiner**²⁸⁵ stanovil krevní skupiny²⁸⁶ na základě existence různých typů červených krvinek.

V roce 1901 byla udělena Nobelova cena za **objev „paprsků X“**²⁸⁷, které se dodnes užívají v radiodiagnostice onemocnění či úrazů.

V roce 1913 byly popsány **vitaminy**²⁸⁸ jako skupiny látek nezbytných pro život a zdraví.

Izolace inzulinu²⁸⁹ v roce 1921 umožnila cílenou léčbu do té doby smrtelné cukrovky²⁹⁰.

²⁸⁵ **Karl Landsteiner** (1868–1943) byl rakouský biolog, lékař a patolog, který v roce 1930 získal Nobelovu cenu za fyziologii a medicínu, a to za výzkumy typů lidské krve.



Karl Landsteiner (zdroj obrázku internet)

²⁸⁶ **Krevní skupina** nebo **krevní typ** je popis vlastností červených krvinek, který je určen antigeny na jejich buněčné membráně. Dvě základní klasifikace lidských krevních skupin jsou podle AB0 a podle Rhesus faktoru (Rh faktor).

²⁸⁷ **Paprsky X**, nazývané také rentgenové záření či RTG, je forma elektromagnetického záření o vlnových délkách 10 nm až 1 pm. Používá se především v lékařských vyšetřeních, krystalografii, detekčních metodách materiálových vad, optice, chemii a astronomii. Je to ionizujícího záření a je zdraví nebezpečné.

²⁸⁸ **Vitamin** je nízkomolekulární látka potřebná pro život. V lidském organismu mají funkce katalyzátorů biochemických reakcí a podílejí se na metabolismu bílkovin, tuků a cukrů.

²⁸⁹ **Inzulin** je hormon produkováný B buňkami Langerhansových ostrůvků slinivky břišní. Snižuje hladinu cukru v krvi. Je antagonistou glukagonu.

²⁹⁰ **Cukrovka (diabetes mellitus** či **úplavice cukrová)** je název pro skupinu závažných chronických autoimunitních onemocnění. Projevují se poruchou metabolismu sacharidů. Existují diabetes I. typu a diabetes II. typu, které vznikají buď důsledkem absolutního nebo relativního nedostatku inzulinu.

V roce 1928 sir **Alexander Fleming**²⁹¹ začal zkoumat účinky **penicilinu**²⁹², který se pak začal od roku 1941 používat v medicíně. Tím byla umožněna velmi účinná léčba infekčních onemocnění.

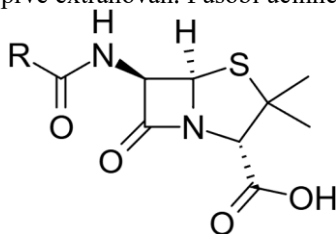
Roku 1950 byla provedena první úspěšná **transplantace ledviny**.

Objev molekuly DNA roku 1953 objasnil genetický přenos informací. Roku 1958 byl voperován první **kardiostimulátor** pacientovi s poruchami srdečního rytmu. V roce 1960 se podařilo v Československu vymýtít dětskou obrnu. V roce 1961 byly vyrobeny první měkké **kontaktní čočky**²⁹³. V roce 1967 byla provedena první **transplantace srdce**. Roku 1968 byl zkonstruován první typ **Leksellova gama nože**, který umožňuje ozáření chorobného ložiska uvnitř lebky bez nutnosti chirurgické trepanace. V té době se také začínalo s využitím **počítačové tomografie** a **magnetické rezonance** v zobrazovacích technikách.

Roku 1978 se narodilo první „dítě ze zkumavky“ po umělém oplodnění. Roku 1983 byl objeven **virus HIV**²⁹⁴ jako původce nového onemocnění **AIDS**. V roce 1986 byl poprvé využit laser k rozrušení žlučových kamenů, od té doby se využití laseru rozšířilo do mnoha medicínských odvětví. V 80. letech se začal úspěšně používat **laparoskopický** postup při odstranění žlučníku. Tato metoda se při současném technickém vylepšování postupně rozšířila na celé spektrum operací v dutině břišní a hrudní, kloubech, cévách aj. Ve stejné době se začaly využívat **robotické systémy na operačním sále**. Nejprve k polohování pacienta a podávání nástrojů při operaci. Na konci 90. let dvacátého století byly provedeny **první robotické operace**. V roce 1996 byl poprvé **naklonován savec – britská ovce Dolly**.

²⁹¹ **Alexander Fleming** (1881–1955) byl skotský lékař. Za objev penicilinu z plísně *Penicillium chrysogenum*, získal v roce 1945 společně s Howardem Floreyem a Ernstem Chainem Nobelovu cenu za fyziologii a lékařství.

²⁹² **Penicilin** je v širším smyslu slova označení pro beta-laktamová antibiotika. Název je odvozen od plísně *Penicillium* (štětičkovce) ze které byl poprvé extrahován. Působí účinně baktericidně a mají nízkou toxicitu.



Zdroj obrázku https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Penicillin_Core_v2.svg

²⁹³ **Kontaktní čočky** jsou optickou zdravotní pomůckou určenou k nasazení přímo na oční rohovku. Jsou povětšinou alternativou brýlí a používají se obvykle ke korekci zrakových vad. První skleněné kontaktní čočky byly vyrobeny v roce 1887. Později se používalo plexisklo a od roku 1955 se vyrábějí také z hydrofilního gelu, a to na základě praktického objevu českého profesora, kterým byl Otto Wichterle (1913–1998).



Otto Wichterle (zdroj obrázku internet)

²⁹⁴ **HIV** (z anglického **H**uman **I**mmunodeficiency **V**irus, česky **virus lidské imunitní nedostatečnosti**) je virus z čeledi retroviridae (retroviry). Způsobuje nemoc **AIDS** (z anglického **A**cquired **I**mmune **D**eficiency **S**yndrome nebo **A**cquired **I**mmunodeficiency **S**yndrome, česky **syndrom získané imunitní nedostatečnosti** nebo **syndrom získaného selhání imunity**).

20. století je také rozvojem širokého spektra implantologie²⁹⁵, plastické chirurgie, aloplastiky, aplikací nových materiálů. Významné jsou také aplikace počítačů a počítačových metod v celém spektru lékařství.

Více o historii lékařství 20. století lze nalézt v [7] a [8].

• 21. století a budoucnost

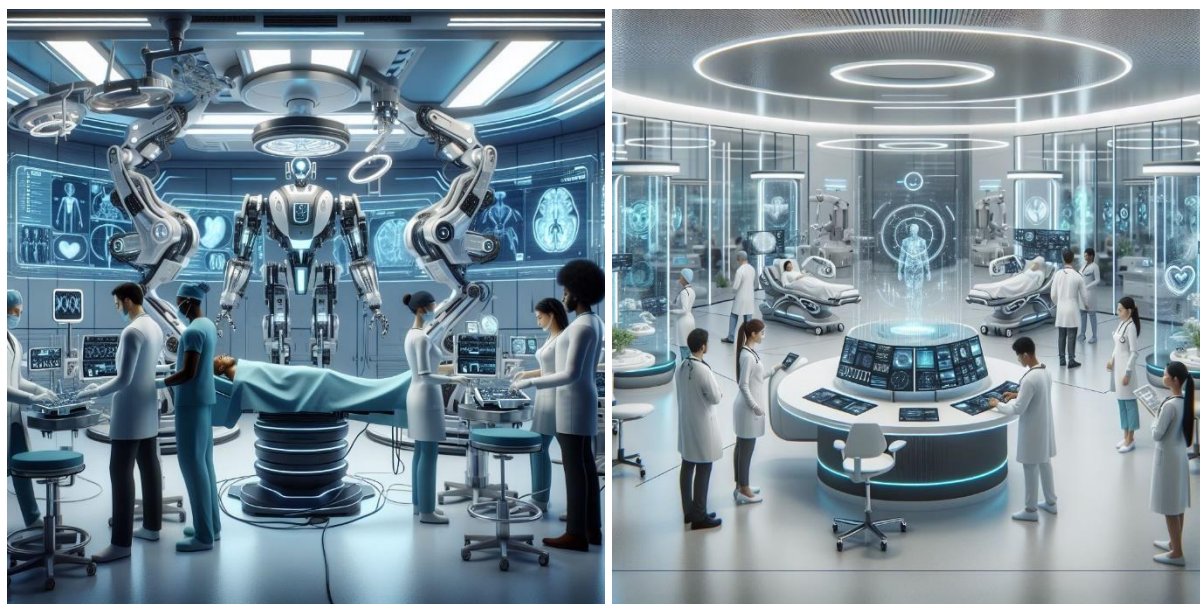
21. století plynule navazuje na lékařské zkušenosti a tradice 20. století.

Jedním z dominantních výzev současnosti je pandemie covid-19, která nabrala globální význam a ovlivňuje nejen zdravotnictví, ale všechny odvětví lidské činnosti.

Novým silně se rozvíjejícím trendem je využívání umělé inteligence, robotiky a využívání vysoce výkonných počítačů nebo superpočítačů.

Významný je také rozvoj a aplikace nanotechnologií a genetiky.

Co lze očekávat v budoucnosti? Lze jasně odhadovat další robotizaci celého zdravotnictví za používání rozvinuté umělé inteligence, viz např. autorova představa na Obr. 30.4. Novými výzvami bude také lékařství ve vesmíru. Lze očekávat nové zobrazovací techniky nové operační postupy, biosenzory, nové implantáty, rapidní rozvoj tkáňového a genového inženýrství, prodlužování lidského věku aj. Dalším směrem vývoje bude aktivní prevence nemocí. Zřejmě se ale objeví také nové nemoci, nové politické a národnostní problémy s dostupností a etikou lékařství atd.

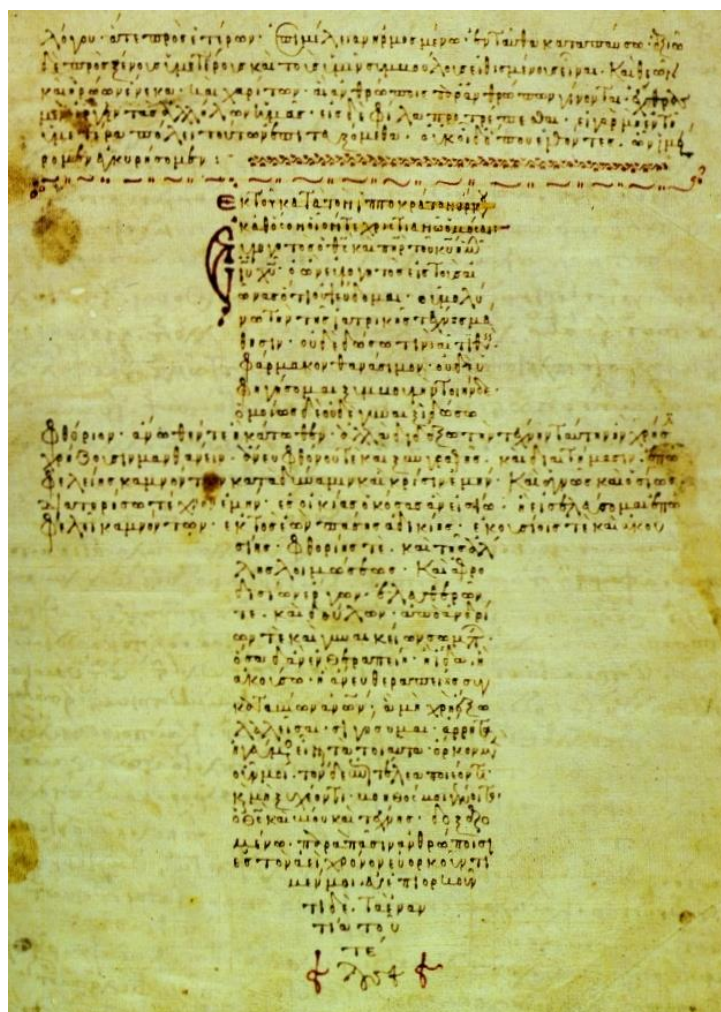


Obr. 30.4 Autorovy sci-fi představy lékařského vědeckého pracoviště budoucnosti (vytvořeno v CAD, grafickém editoru a s využitím umělé inteligence Copilot).

²⁹⁵ **Implantologie** je vědecká disciplína zabývající se návrhem, výrobou a zaváděním implantátů do živých organismů. Blíže také Kapitola 32 této knihy.

30.4 Hippokratova přísaha

Hippokratova přísaha je přísaha, která je skládaná lékaři. Obsahuje základní etické principy povolání lékaře. Je také součástí starověkých textů knih Hippokratovská sbírka (latinsky *Corpus Hippocraticum*). Tradičně je její autorství připisováno Hippokratovi či některému jeho žáku, avšak její kořeny jsou zřejmě v učení Pythagorejců. **Součaná podoba Hippokratovy přísahy se od původní liší a to podle států a univerzit.** Obvykle může být vypuštěno odvolávání se na bohy nebo Boha, slib o vyučování lékařství pouze mužům nebo části zakazující vyvolat potrat a provádět eutanazii. Blíže např. [16] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hippokratova_přísaha. Příklad textu středověké Hippokratovy přísahy je uveden na Obr. 30.5.



Obr. 30.5 Hippokratova přísaha na byzantském svitku ze 12. století sepsaná ve tvaru kříže, viz [17] https://cs.wikipedia.org/wiki/Hippokratova_přísaha#/media/Soubor:HippocraticOath.jpg.

- **Pravděpodobný původní text Hippokratovy přísahy**

Přisahám a volám Apollóna lékaře a Asklépia a Hygieiu a Panakeiu a všechny bohy a bohyně za svědky, že budu tuto smlouvu a přísahu dle svých možností a dle svého svědomí dodržovat.

Toho, kdo mě naučil umění lékařskému, budu si vážit jako svých rodičů a budu ho ze svého zajištění podporovat. Když se dostane do nouze, dám mu ze svého, stejně jako i jeho

potomkům dám a budou pro mne jako moji bratři. Pokud po znalosti tohoto umění (lékařského) zatouží, budu je vyučovat zdarma a bez smlouvy. Seznámím své syny a syny svého učitele a všechny ustanovené a na lékařský mrav přísahající s předpisy, přednáškami a se všemi ostatními radami. Jinak však s nimi neseznámím nikoho dalšího.

Lékařské úkony budu konat v zájmu a ve prospěch nemocného, dle svých schopností a svého úsudku. Vystříhám se všeho, co by bylo ke škodě a co by nebylo správné.

Nepodám nikomu smrtící prostředek, ani kdyby mne o to kdokoli požádal, a nikomu také nebudu radit (jak zemřít). Žádné ženě nedám prostředek k vyhnání plodu.

Svůj život uchovám v čistotě a bohabojnosti, stejně tak i své lékařské umění. Nebudu (lidské tělo) řezat, ani ty, co trpí kameny, a tento zákrok přenechám mužům, kteří takovéto řemeslo provádějí.

Do všech domů, kam vstoupím, budu vstupovat ve prospěch nemocného, zbaven každého vědomého bezpráví a každého zlého činu. Zvláště se vystříhám pohlavního zneužití žen i mužů, svobodných i otroků. Cokoli, co při léčbě i mimo svou praxi ve styku s lidmi uvidím a uslyším, co se nesmí sdělit, to zamlčím a uchovám v tajnosti.

Když tuto přísahu dodržím a neporuším, nechť ve mém životě i ve mém umění skromně dopředu postoupím. Tak získám si vážnost všech lidí po všechny ty časy. Když ale zákazy přestoupím a přísahu poruším, nechť stane se pravý opak.

• Hippokratova přísaha na Lékařské fakultě Ostravské univerzity

Latinsky:

PRIMUM vos huius Universitatis, in qua summum in arte medica gradum ascenderitis, piam perpetuo memoriam habituros, eiusque res ac rationes, quoad poteritis, adiuturos:

DEIN Vos semper vivendi rationem, quoad facultate et iudicio consequi poteritis, sanis aegrisque utilem praescripturos, vitam atque vestram castam et ab omni scelere puram servaturos animumque vestrum soli saluti hominum observandae intenturos, quae vero inter curandum aut in vita hominum vel videritis, vel audieritis, quae minime efferre conveniat, sicut arcana silentio suppressuros.

POSTREMO Vos Universitatis Ostraviensis, necnon eius facultatis medicae in qua medicinae universae doctoris gradum consequimini piam perpetuamque memoriam habituros. Doctrinam, qua vos nunc polettis, cum industria vestra culturos et cum omnibus incrementis, quae progrediente tempore haec ars ceperit, aucturos et in prosperitatem hominum studiose conversuros, denique cunctis officiis, quae probum medicum sponsoni Hippocraticae obtemperantem decent, ea quae par est humanitate erga quemcunque functuros esse.

Volně přeloženo:

ZA PRVÉ: budete s vděčností vzpomínat na tuto Univerzitu, na které jste získali nejvyšší lékařské vzdělání, a budete jí podporovat podle svých nejlepších možností.

ZA DRUHÉ: povedete řádný a počestný život podle vašich nejlepších znalostí a úsudků a tento život doporučíte zdravým i nemocným. Vše, co při léčbě nemocného uvidíte a uslyšíte, udržíte v tajnosti a tichosti.

NAKONEC: Budete mít neustále na mysli Ostravskou univerzitu a její lékařskou fakultu, na které získáváte doktorát z všeobecné medicíny. Budete neustále prohlubovat své vědomosti a zručnost o nové poznatky, tak jak budou v průběhu času přibývat. A všechny tyto poznatky budete využívat pro blaho lidstva. A věrni Hippokratově přísaze, kterou nyní složíte, budete poskytovat lékařskou péči komukoliv bez rozdílu.

30.5 Lékařské obory

Z uvedené historie v předchozím textu, je patrné, že medicína jako věda se ve svých počátcích zabývala diagnostikou a „farmakologickou“ léčbou nemocí. Zavedení principů asepse²⁹⁶ a antisepte²⁹⁷ snížilo míru infekčních komplikací po chirurgických výkonech a spolu se zavedením anestetik umožnilo rozvoj chirurgie. S dalším rozšiřováním znalostí v medicíně se postupně začaly oddělovat specializace lékařů na různé obory. Lze tedy jednoznačně konstatovat, že s rozvojem vědy a techniky se také rozvíjí lékařství.

Lékařský obor (lékařská odbornost) je zaměření lékařské vědy nebo praxe na definovanou skupinu pacientů, nemocí, dovedností nebo filozofii léčby. Po úspěšném absolvování lékařské fakulty si lékaři obvykle prohlubují své lékařské vzdělání v určitém oboru medicíny a po složení **atestace**²⁹⁸ se stávají specialistou, tj. odborným lékařem.

Lékařské obory lze klasifikovat podle několika hledisek:

- **Chirurgické**²⁹⁹ (využívají primárně technik operace, viz např. Obr. 30.6) nebo **interní obory**³⁰⁰ (vnitřní lékařství, kde se primárně využívají jiné lékařské techniky).

²⁹⁶ **Asepsa** je nepřítomnost choroboplodných zárodků, tj. bakterií, virů, plísní či parazitů. Prakticky se asepse rozumí opatření a postupy bránící kontaminaci sterilního prostředí např. při chirurgických úkonech.

²⁹⁷ **Antisepe**, resp. **antiseptikum** (z řeckého anti = proti a septikos = hnilobný) je protimikrobiální látka aplikovaná na živou tkáň za účelem snížení rizika infekce, sepe nebo hniloby. Některá antiseptika jsou baktericidní (schopna ničení mikrobů), zatímco jiná působí bakteriostaticky (brání množení mikrobů).

²⁹⁸ **Atestace** je získání specializované způsobilosti k výkonu povolání lékaře. V každé zemi je upraveno zákony a vyhláškami.

²⁹⁹ **Chirurgie** pochází ze starořeckého termínu cheiourgia, které je spojením cheir (ruka) a ergein (pracovat). Lze tedy říci, že je to „ruční práce“. Léčí nemoci a úrazy či provádí diagnostiku převážně operativně manuálním a instrumentálním ošetřením.

³⁰⁰ **Interní obory (vnitřní lékařství)** se zabývají diagnózou a převážně nechirurgickou léčbou onemocnění vnitřních orgánů u dospělých. Interními chorobami dětí se zabývá spíše pediatrie.



Obr. 30.5 Chirurgie – konkrétně traumatologie – Osteosyntéza zlomeniny femuru ve FNO Ostrava.

- Podle věkového rozmezí pacientů na **pediatrické** či **geriatrické** obory.
- Podle úkonů na **diagnostické** (např. patologie) a **terapeutické** obory
- Podle zaměření na **orgánové** (cíleně na orgány) nebo **technicky zaměřené** (cíleně na techniku léčby např. radiologie).
- Podle zaměření na obory **teoretické** (nepracující přímo s pacienty např. histologie, anatomie, fyziologie) a obory **klinické** (ošetřující nemocné).

V souvislosti s výše uvedeným, je zřejmé, že obory lze kombinací blíže specifikovat, např. terapie v pediatrické chirurgii.

Dlouhodobě tedy přetrvává **základní dělení** na **obory interní (vnitřní lékařství)** a **chirurgické**. Nicméně, přesná hranice mezi lékařskými obory, podobně jako v ostatních vědeckých disciplínách, neexistuje ☺.

Mezi **interní obory** patří např. **nefrologie** (problematika onemocnění ledvin), **gastroenterologie** (problematika onemocnění trávicího traktu), **hepatologie** (problematika onemocnění jater), **kardiovaskulární lékařství** (problematika onemocnění srdce a cév), **plicní lékařství**, **neurologie** (problematika onemocnění nervů), **rehabilitace**, **infekční lékařství**, **dermatovenerologie** (problematika onemocnění kůže), **onkologie** (problematika nádorových onemocnění), **hematologie** (problematika onemocnění krve), **imunologie** a **alergologie**, **psychiatrie**, **geriatrie** (problematika onemocnění a změny organismu ve stáří) a **pediatrie** (problematika dětského lékařství).

Mezi **chirurgické obory** řadíme např. **anesteziologii** (podávání anestezie při operacích a jiných lékařských úkonech), **resuscitační** a **intenzivní medicínu** (problematika podpory selhávajících životních funkcí), **chirurgii břišní**, **chirurgii hrudní**, **traumatologii (úrazovou chirurgii)**, **ortopedii**, **popáleninovou medicínu**, **plastickou** a **rekonstrukční chirurgii**, **neurochirurgii** (operace nervového systému), **kardiochirurgii** (operace srdce), **urologii**

(intervence na močovém systému), **ORL (otorinolaryngologie, tj. ušní, nosní a krční), oftalmologii** (oční) a **stomatochirurgii** (operace obličejové části hlavy a zubů).

Mezi chirurgické obory se řadí již historicky samostatná gynekologie a porodnictví.

S rozvojem diagnostických možností se vyčlenily i **samostatné obory** např. **klinická biochemie, klinická farmakologie, radiodiagnostika** (diagnostika pomocí přístrojů na bázi RTG záření, magnetické rezonance), **lékařská genetika, patologie** (diagnostika nemocí za pomoci zkoumání pod mikroskopem či při pitvě), **soudní (forenzní) lékařství** a **nukleární medicína** (diagnostika a léčba pomocí radionuklidů).

Svou historicky danou samostatnost si uchovalo **zubní lékařství (stomatologie)**, které má samostatné fakulty a studijní plány rozdílné od „klasického“ lékařství.

Vzhledem k strategickému významu armády a specifickým podmínkám poskytování zdravotní péče ve válečných situacích studují vojenští lékaři obvykle na vojenských vysokých školách a svou erudici si udržují ve vojenských nemocnicích.

V České republice je možné na Institutu vzdělávání lékařů v současné době studovat 42 základních lékařských oborů, 44 nástavbových oborů, 3 základní obory zubních lékařů, 5 základních oborů farmaceutů a 4 nadstavbové obory farmaceutů, viz následující Tab. 30.1 až 30.4.

Tab. 30.1 Základní obory – Lékaři.

Základní obory lékařů	
Alergologie a klinická imunologie	Nefrologie ³⁰¹
Anesteziologie a intenzivní medicína	Neurochirurgie
Cévní chirurgie	Neurologie
Dermatovenerologie	Nukleární medicína
Dětská a dorostová psychiatrie	Oftalmologie
Dětská chirurgie	Ortopedie a traumatologie pohybového ústrojí
Dětská neurologie	Otorinolaryngologie a chirurgie hlavy a krku
Endokrinologie ³⁰² a diabetologie	Patologie
Gastroenterologie	Pediatric
Geriatric	Plastická chirurgie
Gynekologie a porodnictví	Pneumologie a ftizeologie ³⁰³
Hematologie a transfúzní lékařství	Psychiatric
Hygiena a epidemiologie	Radiační onkologie
Chirurgie	Radiologie a zobrazovací metody
Infekční lékařství	Rehabilitační a fyzikální medicína
Kardiochirurgie	Revmatologie ³⁰⁴
Kardiologie	Soudní lékařství
Klinická biochemie	Urgentní medicína
Klinická onkologie	Urologie
Lékařská genetika	Vnitřní lékařství
Lékařská mikrobiologie	Všeobecné praktické lékařství
Maxilofaciální chirurgie ³⁰⁵	

³⁰¹ **Nefrologie** je lékařská věda zabývající se diagnózou a léčbou ledvin, transplantací ledvin a dialýzou. Někdy sem bývá zařazena také léčba močové inkontinence u dětí a dospělých. Název pochází z řeckého nefrós = ledviny.

³⁰² **Endokrinologie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou a léčením hormonálních poruch.

³⁰³ **Ftizeologie** je nauka o prevenci, diagnóze a léčení plicní tuberkulózy (TBC), což je infekční onemocnění způsobené bakteriemi.

³⁰⁴ **Revmatologie** je lékařský obor, který se zabývá diagnostikou a konzervativní léčbou onemocnění pohybového aparátu (klouby, kosti, páteř, svaly, vazy).

³⁰⁵ **Maxilofaciální chirurgie** je nauka o chirurgii ústní dutiny (cavum oris), čelistí (maxilla) a obličeje (facies).

Tab. 30.2 *Nástavbové obory – Lékaři.*

Nástavbové obory lékařů	
Algeziologie ³⁰⁶	Koloproktologie ³⁰⁷
Angiologie ³⁰⁸	Korektivní dermatologie
Dětská dermatovenerologie	Lékařská psychoterapie
Dětská endokrinologie a diabetologie	Návykové nemoci
Dětská gastroenterologie a hepatologie	Neonatologie ³⁰⁹
Dětská kardiologie	Onkogynologie
Dětská nefrologie	Onkochirurgie
Dětská onkologie a hematologie	Onkourologie
Dětská otorinolaryngologie	Paliativní medicína ³¹⁰
Dětská pneumologie	Perinatologie ³¹¹ a fetomaternální medicína ³¹²
Dětská revmatologie	Popáleninová medicína
Dětská urologie	Posudkové lékařství
Foniatry ³¹³	Pracovní lékařství
Gerontopsychiatrie	Psychosomatika
Gynekologie dětí a dospívajících	Reprodukční medicína
Hrudní chirurgie	Sexuologie
Intenzivní medicína ³¹⁴	Spondylochirurgie ³¹⁵
Intervenční kardiologie	Tělovýchovné lékařství
Intervenční radiologie	Úrazová chirurgie
Klinická farmakologie	Urogynologie ³¹⁶
Klinická osteologie	Vaskulární intervenční radiologie
Klinická výživa a intenzivní metabolická péče	

Tab. 30.3 *Základní obory a nástavbové obory zubních lékařů.*

Základní obory dentistů	Nástavbové obory dentistů
Orální maxilofaciální chirurgie	Orální medicína
Ortodoncie ³¹⁷	
Klinická stomatologie	

Tab. 30.4 *Základní obory a nástavbové obory zubních lékařů.*

Základní obory farmaceutů	Nástavbové obory farmaceutů
Farmaceutická technologie	Nemocniční lékárenství
Klinická farmacie	Farmakoekonomika
Laboratorní a vyšetřovací metody ve zdravotnictví	Adiktologická ³¹⁸ péče v lékárně
Radiofarmaka ³¹⁹	Farmaceutická péče o geriatrické pacienty
Praktické lékárenství	

Vzhledem k tomu, že nemoc či zranění postihne člověka komplexně, začala v posledních letech vznikat **specializovaná centra na léčbu některých onemocnění**. Např. onkologické centrum poskytne nemocnému veškerou diagnostiku a terapii nádorového onemocnění. Má k dispozici odborníky z oboru radiodiagnostiky, patologie, chirurgie, onkologie, nukleární medicíny, rehabilitace, algeziologie, psychologie. Tito odborníci spolu spolupracují a zajišťují pro nemocného nejlepší a navazující léčbu. Na stejném principu fungují centra traumatologická (pro úrazy) a iktová centra pro cévní mozkové – (cerebrovaskulární) příhody.

Seznam lékařských odborností, včetně jejich dělení na **ambulantní péči** (9 skupin) a **lůžkovou péči**, (9 skupin) a jejich značení je uveden např. v [18]
https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_l%C3%A9ka%C5%99sk%C3%BDch_odbornost%C3%AD.

Do jisté míry je lékařským oborem také biomedicínské inženýrství či biomechanika, které jsou tématem této knihy.

30.6 Otázky k pochopení látky

1. Jaká je definice lékařství/medicíny?
2. Co je zdravotnictví?
3. Co je to trepanace?
4. Stručně (v několika větách) popište historii lékařství do konce 19. století.

³⁰⁶ **Algeziologie** je lékařská věda zabývající se léčbou chronické bolesti, která často doprovází onemocnění pohybového aparátu. Nutno podotknout, že bolest je vždy subjektivní zkušenost každého jedince – nelze ji tedy objektivně změřit.

³⁰⁷ **Koloproktologie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou a operační i neoperační léčbou onemocnění střeva, konečníku a rektu.

³⁰⁸ **Angiologie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou a nechirurgickou terapií onemocnění krevních a lymfatických cév.

³⁰⁹ **Neonatologie** je lékařská věda zabývající péčí o fyziologické i patologické novorozence.

³¹⁰ **Paliativní medicína** je lékařská věda zabývající se léčbou nevléčitelně nemocných pacientů. Cílená je zde snaha o dosažení nejlepší možné kvality života pacienta.

³¹¹ **Perinatologie** je lékařská věda zabývající se perinatálním obdobím, tj. obdobím konce těhotenství a prvními dny po narození.

³¹² **Fetomaternální medicína** je lékařská věda zabývající se plodem (fetus) a matkou. Patří do gynekologie.

³¹³ **Foniatrie** je lékařským oborem zaměřeným na léčení poruch a diagnostiku sdělovacích funkcí člověka, tj. na hlas, řeč a sluch.

³¹⁴ **Intenzivní medicína** je lékařská věda zabývající se péčí o nemocné se selháním nebo o nemocné s možným selháním jedné či více životních funkcí. Zaměření je na poměrně široké spektrum pacientů od pooperační péče, srdeční či dechovou nedostatečnost až po těžká polytraumata.

³¹⁵ **Spondylochirurgie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou, a především chirurgickou léčbou poškození a poranění páteře v celé své délce včetně anatomických krajin přiléhajících k páteři.

³¹⁶ **Urogynekologie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou a léčbou poruch pánevního dna u žen. Věnuje se zejména problematice samovolného a nechtěného úniku moči (inkontinence) žen.

³¹⁷ **Ortodoncie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou, léčbou a prevencí zubních a obličejových anomálií a nepravidelností chrupu.

³¹⁸ **Adiktologie** je lékařská věda zabývající se diagnostikou, léčbou a prevencí závislosti či závislostí na návykových látkách.

³¹⁹ **Radiofarmaka** (složenina z latinského radius = paprsek a řeckého fármakon = jed, droga, lék) jsou léčiva obsahující jeden či více radionuklidů. Molekula radiofarmaka se skládá z nosné sloučeniny a navázaného radionuklidu. Nosná sloučenina se obvykle naváže na tkáň či buňky a radionuklid funguje jako signalizace množství dané sloučeniny v místě těla. Dělí se na diagnostické a terapeutické použití. Vývojem a používáním se zabývá také samostatný lékařský obor nukleární medicína.

5. Stručně (v několika větách) popište historii lékařství 20. století.
6. Co je to Hippokratova přísaha.
7. Jak se podle Vás bude vyvíjet lékařství v budoucnosti?
8. Jak se definuje lékařský obor?
9. Co je vnitřní lékařství?
10. Jaký je rozdíl mezi geriatrií a pediatrií?
11. Co je ORL?
12. Uveďte alespoň jednu klasifikaci dělení lékařských oborů.
13. Co znamená slovo cerebrovaskulární?
14. Co je nefrologie?
15. Co je angiologie?
16. Co je adiktologie?
17. Co je spondylochirurgie?
18. Co je paliativní medicína,
19. Co je ftizeologie?
20. Co je ortodontie?
21. Co je algeziologie?
22. Co je koloproktologie?
23. Co je fetomaternální medicína?
24. Co je intenzivní medicína?
25. Co je revmatologie?
26. Co je geriatrie?
27. Co je iktové centrum?

30.7 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Lékař uklidňuje pacienta před operací: „Prosím, jenom žádnou paniku. Tuto operaci jsme již prováděli mnohokrát a jednou se přece musí povést“.
2. Paní učitelka se ptá: „Pepíčku, čím chceš být až vyrosteš?“ Pepíček odpoví: „Panem doktorem.“ Paní učitelce to nedá a řekne: „Pepíčku, vždyť ty se přece bojíš injekcí.“ Pepíček rázně odpoví: „Bojím, ale až budu pan doktor, tak budu na bezpečnější straně jehly já.“

30.8 Reference ke kapitole 30

- [1] FRYDRÝŠEK, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Úvod, IPVZ, <https://www.ipvz.cz/>.
- [3] Lékařství – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/L%C3%A9ka%C5%99stv%C3%AD>.
- [4] Trepanace – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Trepanace>.
- [5] File: Treated skull, prehistoric times, City of Prague Museum, 175646.jpg – Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Treated_skull,_prehistoric_times,_City_of_Prague_Museum,_175646.jpg.
- [6] Tajemství dřevých hlav: Po stopách mistrovství pravěkých neurochirurgů, 100+1 zahraniční zajímavost (stoplusjednicka.cz) <https://www.stoplusjednicka.cz/tajemstvi-deravych-hlav-po-stopach-mistrovstvi-pravekych-neurochirurgu>.
- [7] Dějiny lékařství – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/D%C4%9Bjiny_l%C3%A9ka%C5%99stv%C3%AD.
- [8] Říhová, Milada et al, *Kapitoly z dějin lékařství*, Praha, Karolinum, 2005, ISBN 80-246-1021-3
- [9] Pelištejci – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Peli%C5%A1tejci>.
- [10] Bible online - Pelištejci vzali Boží schránku a zanesli ji z Eben-ezeru do Ašdódu. 1 Samuelova 5,1 (patroni.cz), <http://bible.patroni.cz/index.php?id=7319>.
- [11] File: Soranus of Ephesus, Gynaecology, Brussels, Ms. 3714.jpg – Wikimedia Commons https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Soranus_of_Ephesus,_Gynaecology,_Brussels,_Ms._3714.jpg.
- [12] Tradiční čínská medicína – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Tradi%C4%8Dn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADnsk%C3%A1_medic%C3%ADna.
- [13] Klášterní medicína – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Kl%C3%A1tern%C5%A1tern%C3%AD_medic%C3%ADna.
- [14] Rytířský řád křižovníků s červenou hvězdou – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Ryt%C3%AD%C5%99sk%C3%BD_%C5%99%C3%A1d_k%C5%99i%C5%BEovn%C3%ADk%C5%AF_s_%C4%8Dervenou_hv%C4%9Bzdou.
- [15] Mezinárodní červený kříž – Wikipedie (wikipedia.org) https://cs.wikipedia.org/wiki/Mezin%C3%A1rodn%C3%AD_%C4%8Derven%C3%BD_k%C5%99%C3%AD%C5%BE.
- [16] Hippokratova přísaha – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Hippokratova_p%C5%99%C3%ADsaha.

- [17] HippocraticOath - Hippokratova přísaha – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Hippokratova_p%C5%99%C3%ADsaha#/media/Soubor:HippocraticOath.jpg.
- [18] Seznam lékařských odborností – Wikipedie (wikipedia.org), https://cs.wikipedia.org/wiki/Seznam_l%C3%A9ka%C5%99sk%C3%BDch_odbornost%C3%AD.
- [19] File: Penicillin Core v2.svg, commons.wikimedia.org https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/cb/Penicillin_Core_v2.svg.
- [20] Ötzi – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/%C3%96tzi>.
- [21] Akupunktura – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Akupunktura>.
- [22] Akupresura – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Akupresura>.
- [23] Imhotep – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Imhotep>.
- [24] KOLÁŘ, P. *Labyrint bolesti a jak se v něm neztratit*, ISBN 978-80-267-3109-2 Vyšehrad, Praha, 2025, pp. 1-224.
- [25] Bolest – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Bolest>.

31. JEDNODUCHÝ DETERMINISTICKÝ A STOCHASTICKÝ MODEL SEDÍCÍHO ČLOVĚKA

Tato kapitola řeší problematiku statiky sedícího člověka z pohledu biomechaniky a využívá pro sestavení modelu sedícího člověka poznatků uvedených v prvním dílu této knihy, viz [1], a v předchozích kapitolách této knihy.

Kapitola vysvětluje sestavení jednoduchého rovinného modelu zatěžování sedícího člověka a následné řešení deterministickým a stochastickým přístupem. Aplikace lze využít při různorodém ergonomickém návrhu sedadel pro potřeby konkrétního jedince lidské populace či výzkumu zatěžování částí lidského těla.

Nicméně, uvedené principy se dají jistě rozšířit také na jiné polohy a pohyby těla, kterými jsou například stoj, ležení, chůze, polohy při práci a sportu atp. Použití modifikovaných principů je možné i pro zvířata.

Autory této kapitoly jsou Daniel Čepica, Karel Frydrýšek a Tomáš Halo. Při tvorbě této kapitoly byly využity práce [2] a [3].

31.1 Proč zkoumat sedícího člověka

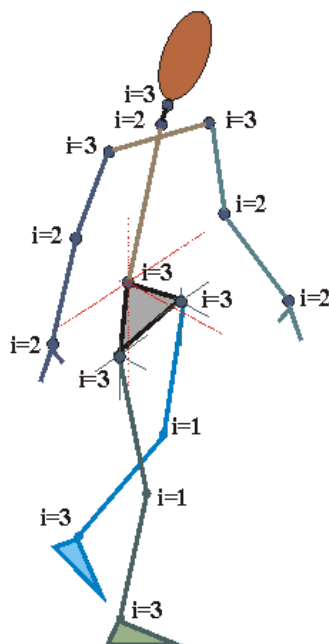
Znáмым faktem je, že lidé tráví sezením podstatnou část života. Sedící pozice může být příčinou bolesti v různých oblastech těla a špatné sezení může způsobit/ovlivnit různé deformity nebo nemoci páteře, opěrného aparátu aj. Proto je důležité zabývat se sezením z pohledu:

- **Lékařského** (nesprávný způsob sezení na nesprávném sedadle může vést k problémům se zády).
- **Antropometrického a ergonomického** (příjemné pocity, pohodlí a bezpečnost práce). Například, dlouhodobé sezení na špatném sedadle je minimálně nezdravé. Nebo sedadla pro děti či tělesně postižené lidi jsou jiné než pro dospělé nebo zdravé lidi.
- **Biomechanického** (výzkum mechanického zatížení, nedokrvování a namáhání orgánů při sezení či interakce těla se sedadlem).
- **Konstrukčního a designerského** (pevnostní analýza sedadel, správná volba materiálu, konstrukce a designu sedadla, architektura nábytku atp.).
- **Ekonomického**, kde například, sedadlo a pohodlí v 1. třídě vlaku či letadle je jiné než v nižších třídách dopravních prostředků nebo prodej sedadel a jejich doplňků či léčebných procesů a léčiv výše uvedených příčin bolesti zad. To vše je samozřejmě spojeno s tokem financí.

Výše uvedené body nelze přesně od sebe oddělit.

31.2 Člověk jako mechanismus

Pro méně složité výpočty z oblasti biomechaniky se lidské tělo, případně zvířecí, často nahrazuje jako přijatelné zjednodušení reality mechanismem (tj. přijatelným modelem), viz Obr. 31.1, který se skládá z tuhých členů (náhrada segmentů). Jednotlivé členy jsou spojeny vazbami a tvoří tak (bio)kinematické dvojice. Více (bio)kinematických dvojic tvoří (bio)kinematický řetězec, obdobně jako v běžné mechanice.

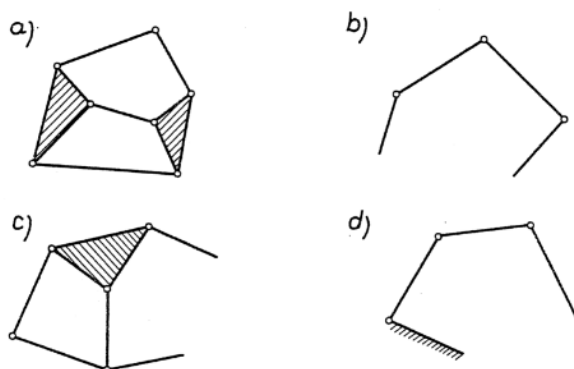


Obr. 31.1 Člověk jako jednoduchý mechanismus, viz [2], kde i značí počet stupňů volnosti.

31.3 (Bio)kinematický řetězec

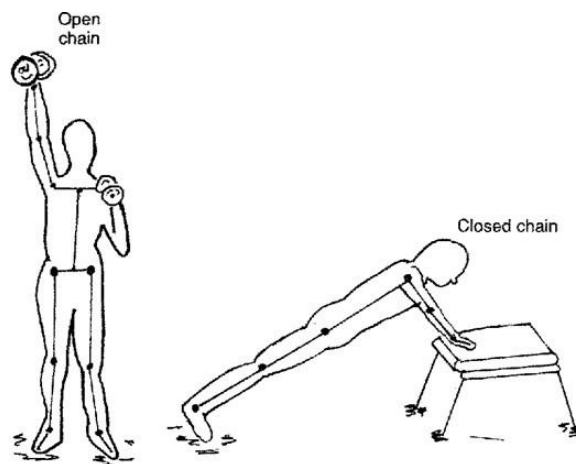
Jak již bylo zmíněno, několik (bio)mechanických dvojic tvoří (bio)mechanický řetězec. Podle uspořádání je lze rozdělit:

- Otevřené/uzavřené – V uzavřeném řetězci je každý člen součástí alespoň dvou (bio)kinematických dvojic, viz Obr. 31.2 (a). Je-li nějaký člen pouze v jedné (bio)kinematické dvojici, jedná se o otevřený řetězec, viz Obr. 31.2 (b).
- Jednoduché/složené – Jednoduchý řetězec má členy s maximálně dvěma (bio)kinematickými dvojicemi, viz Obr. 31.2 (b), složený s více, viz Obr. 31.2 (a, c).
- Volné/vázané – Řetězec, který je spojen s rámem je vázaný, viz Obr. 31.2 (d), jinak se jedná o volný.
- Rovinné/prostorové – Dle pohybu (bio)kinematické dvojice v prostoru se dělí na rovinné a prostorové.



Obr. 31.2 Příklady kinematického řetězce, viz [2].

U pohybujícího se tělesa (člověk) je kinematický řetězec závislý na poloze, na Obr. 31.3(a) člověk tvoří otevřený (bio)kinematický řetězec, na Obr. 31.3(b) tvoří uzavřený.



Obr. 31.3 (Bio)kinematický řetězec podle polohy člověka, viz [2].

31.4 Deterministický model sedícího člověka (úvod a jednodušší varianta s uvažováním normálových sil a bez uvažování posouvajících sil a ohybových momentů)

Sedící poloha může být doprovázena zdravotními problémy, zejména v oblasti zad, viz např. Obr. 31.4 a [2].



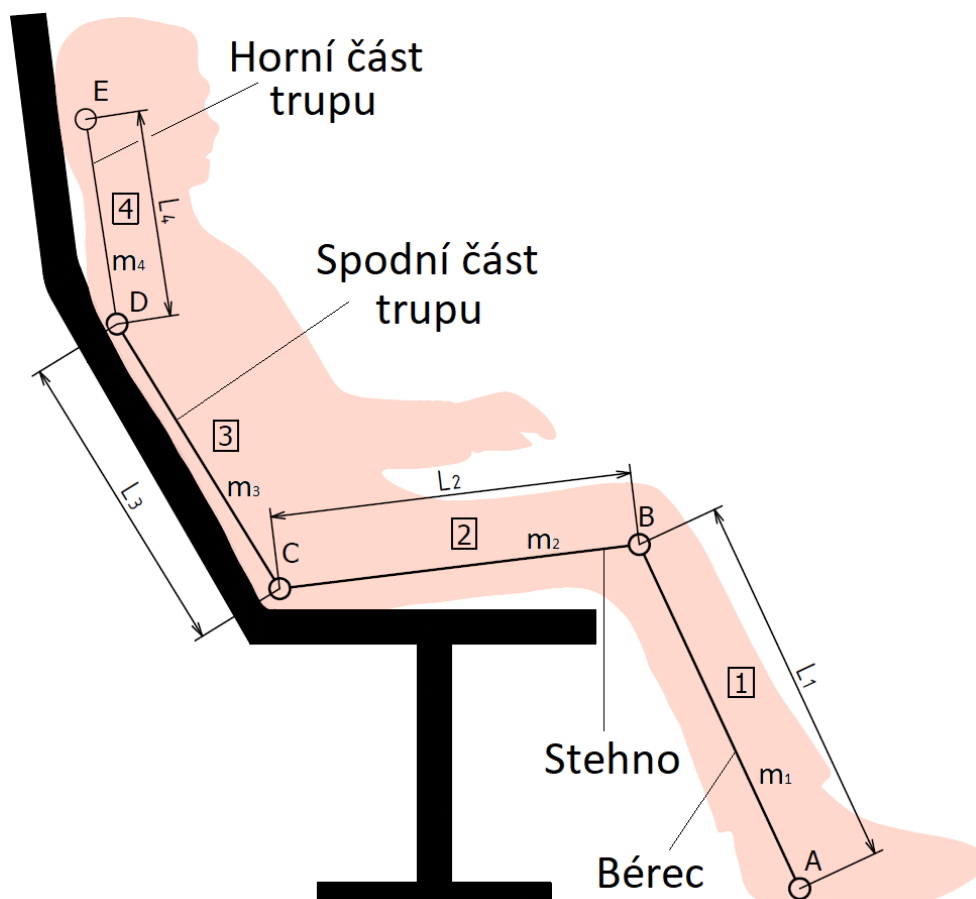
Obr. 31.4 Kostra středověké ženy trpící silnou skoliózou³²⁰ páteře (Limburgs Museum, Venlo, Nizozemí), viz [3] a [4] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Skoli%C3%B3za>.

³²⁰ **Skolióza** (latinsky **Scoliosis**) je patologická trojrozměrná deformita páteře (columna vertebralis) se sklonem k posunutí obratlů ve frontální sagitální i transverzální rovině. Léčba se provádí konzervativním nebo operačním způsobem.

Pro posouzení zatížení, která působí na sedícího člověka, je možno v prvotním přiblížení použít jednoduchý, několika segmentový rovinný model zatížen tíhovými silami v těžištích segmentů.

Pro výpočet v této monografii se uvažuje rozdělení lidského těla na čtyři segmenty, a to na bérce (včetně nohy), stehno, spodní část trupu a horní část trupu (včetně hlavy). Protože se jedná o rovinný model, což je přijatelné a ilustrativní zjednodušení vhodné pro prvotní vysvětlení, jsou bérce spojeny v jeden segment (obdobně to je se stehny). Na

Obr. 31.5 je zobrazen použitý model.



Obr. 31.5 Rovinný čtyřsegmentový model člověka.

K výpočtu zatížení je nutno znát hmotnosti a délky jednotlivých segmentů 1 až 4, definovaných na Obr. 31.5. Popisem těchto parametrů se zabývá antropometrie a existuje mnoho různých způsobů, jak je určit, podrobněji je tato problematika popsána v kapitole 16 prvního dílu této knihy [1]. Zde se pro názornost vychází z jednoduchých vztahů. Délky segmentů jsou stanoveny podle Wintera a hmotnosti jsou určeny metodou relativních hmotností dle Sušanky. Použité vztahy jsou uvedeny v Tab. 31.1.

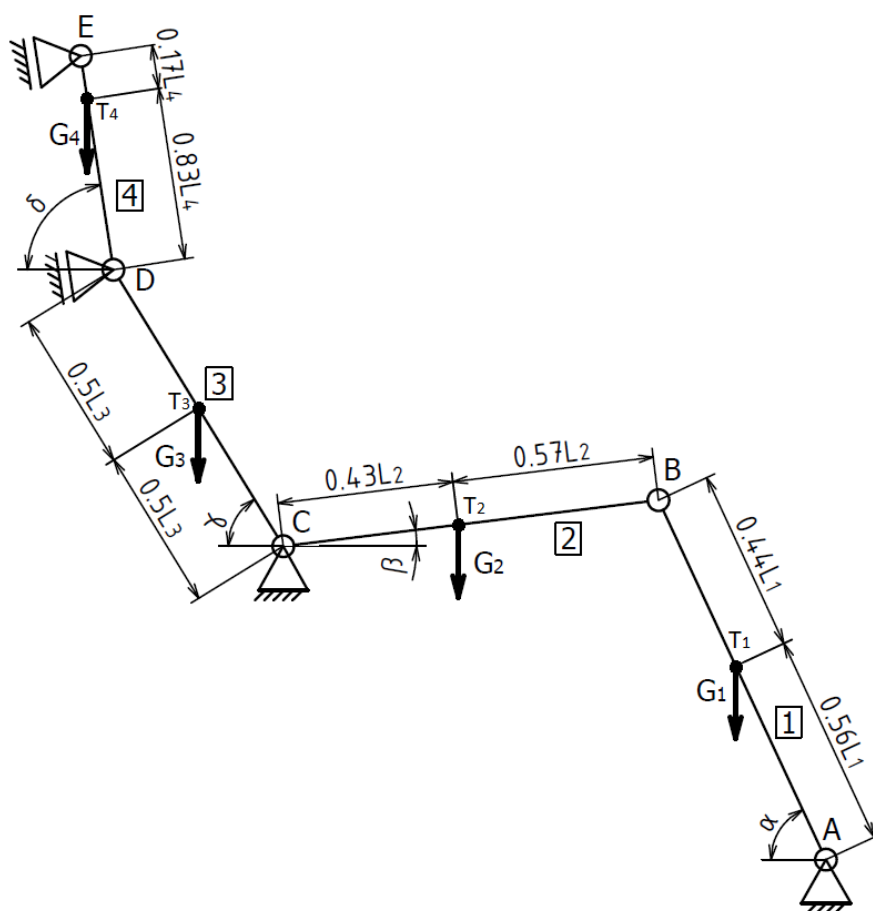
Tab. 31.1 Délky a hmotnosti segmentů 1 až 4.

Název veličiny		Symbol	Vztah délky L_i a hmotnosti m_i segmentů
Délka /m/	Segment č. 1	L_1	$L_1 = 0.285 \times h$
	Segment č. 2	L_2	$L_2 = 0.245 \times h$
	Segment č. 3	L_3	$L_3 = 0.24 \times h$
	Segment č. 4	L_4	$L_4 = 0.165 \times h$
Hmotnost /kg/	Segment č. 1	m_1	$m_1 = 2 \times 0.062 \times m = 0.124 \times m$
	Segment č. 2	m_2	$m_2 = 2 \times 0.124 \times m = 0.248 \times m$
	Segment č. 3	m_3	$m_3 = 0.4 \times m$
	Segment č. 4	m_4	$m_4 = m - (m_1 + m_2 + m_3) = 1 - (0.124 + 0.248 + 0.4) = 0.228 \times m$

Dále je potřeba určit těžiště jednotlivých segmentů. Jelikož se jedná o jednoduchý model, došlo ke slučování segmentů (dolní končetina a horní končetina je uvažována dvakrát, tj. s dvojnásobnými hmotnostmi).

Tíhu je možno rozložit po délce segmentů jako spojité zatížení $/Nm^{-1}/$, ale správně předepsat toto rozložení není úplně jednoduché, proto se v prvotním přiblížení uvažuje, že je tíha soustředěna v těžištích segmentů.

Poloha člověka při sezení je dána úhly α až δ . Těžiště i úhly jsou na Obr. 31.6.



Obr. 31.6 Těžiště a úhel jednotlivých segmentů.

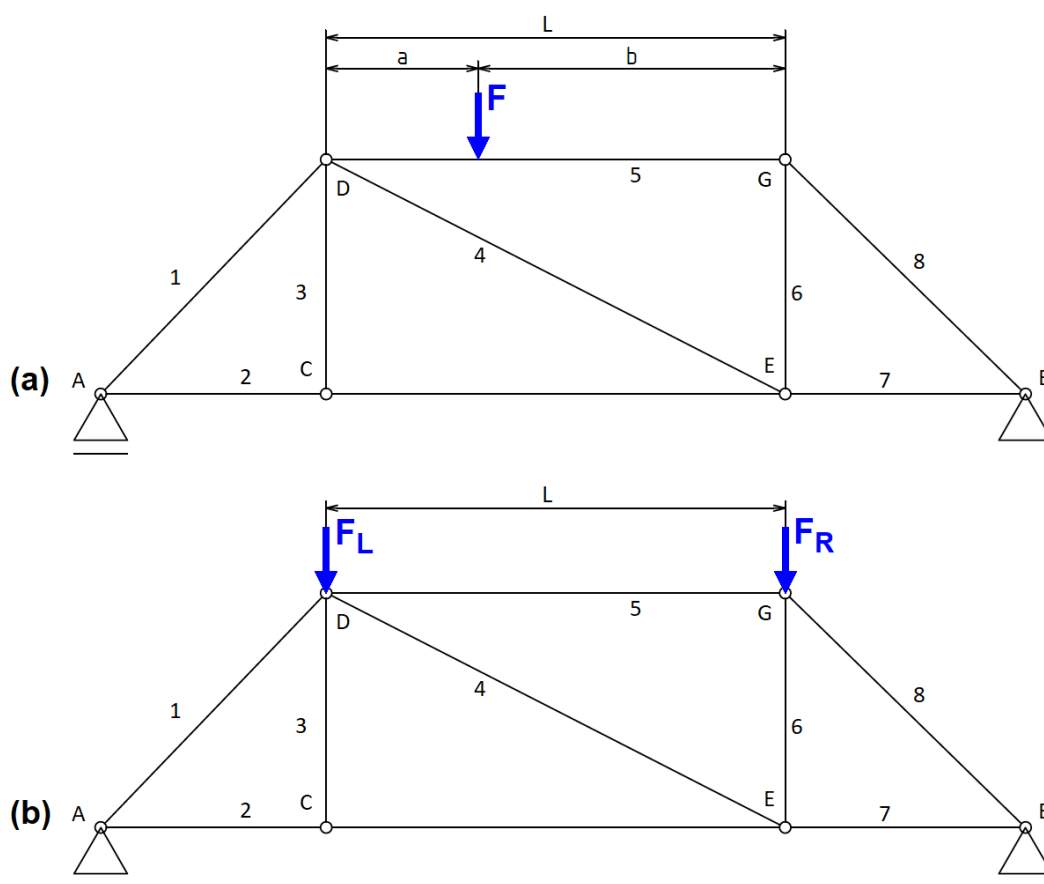
Pro správné vyřešení tohoto modelu je potřeba mít znalosti z oblasti statiky – k řešení tohoto jednoduchého rovinného modelu se přistupuje stejně jako k prutovým soustavám. Je známo, že jedním ze základních předpokladů řešení prutových soustav je, že zatížení působí pouze ve styčnících³²¹. Z Obr. 31.6 je však patrné, že sedící člověk je zatížen tíhovými silami G_1 až G_4 , které působí v těžištích segmentů T_1 až T_4 , a tedy mimo styčnící (styčnící jsou označeny písmeny A až E).

Při výpočtu je v této kapitole použito dvojí značení z důvodu, že se k modelu přistupuje jako k prutové soustavě. Platí tedy ekvivalence, že **segment** $\equiv$ **prut**, a **kloub** $\equiv$ **styčník**.

V dalším kroku (nejjednodušší postup řešení) je tedy potřeba přenést tyto síly do styčníků. Tento proces se ilustruje na jednoduché (mechanické) prutové soustavě, viz

Obr. 31.7. Prutová soustava má 8 prutů (1 až 8) a 6 styčníků (A až G kromě F), a prut 5 je zatížen silou F mimo styčnící. Tato síla F se rozloží na sílu F_L do styčnící D a sílu F_R do styčnící G. Tyto síly jsou v opačném poměru jako vzdálenosti působíště síly od styčnící ku celkové délce prutu. To se dá dokázat z potřebných vztahů pro výpočet sil F_L a F_R , viz rovnice (31.1) a (31.2).

³²¹ **Styčník** (anglicky **joint**) je pojem z mechaniky a v tomto případě znamená ideální kloub. Blíže např. v [5] <https://cs.wikipedia.org/wiki/Sty%C4%8Dn%C3%ADk>.



Obr. 31.7 Prutová soustava – přenesení mimostyčně působící síly F do styčníků pomocí sil F_L a F_R .

$$F = F_L + F_R, \quad (31.1)$$

$$F \cdot a = F_R(a + b) \rightarrow F_R = F \frac{a}{L}, \quad (31.2)$$

$$F \cdot b = F_L(a + b) \rightarrow F_L = F \frac{b}{L}.$$

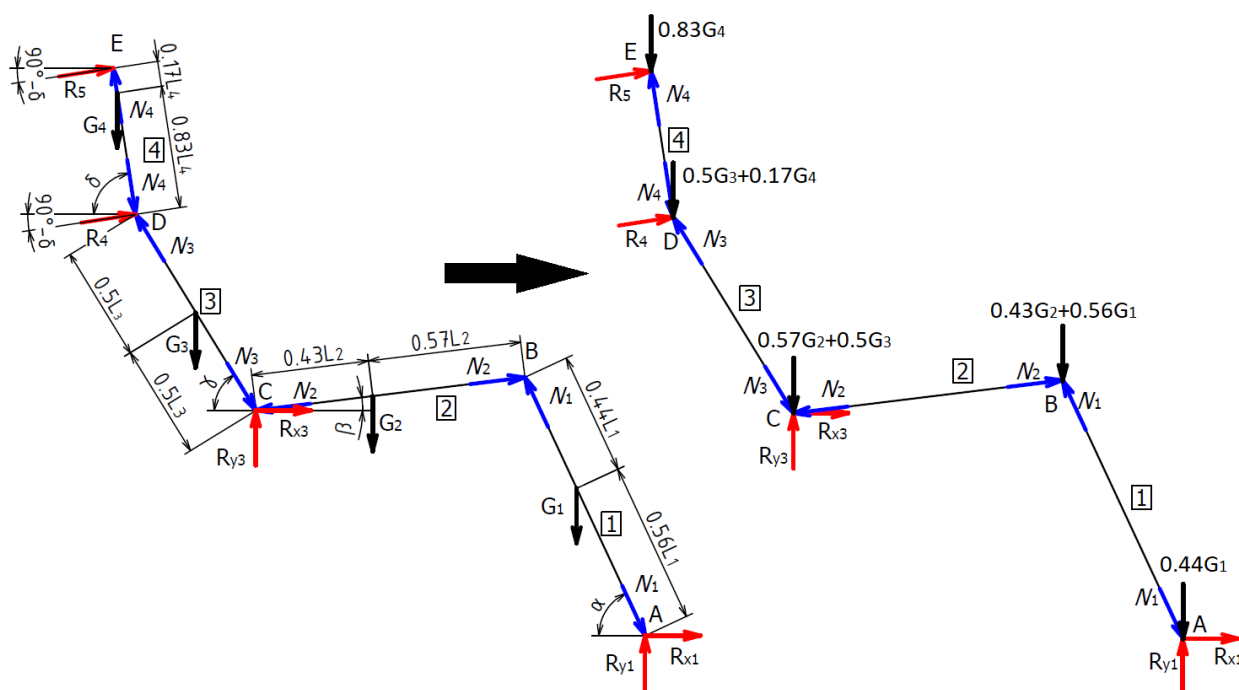
V následujícím textu se pokračuje s nákresem uvedeným na Obr. 31.6. Dalším krokem je určení statické určitosti modelu. Pokud by model nebyl staticky určitý, byla by úloha složitější a bylo by nutné přidat další doplňující rovnice. Staticky neurčité úlohy jsou také tématem dalšího dílu této knihy. Pro výpočet statické určitosti i /1/ platí

$$i = 2 \cdot s - p - n_R = 2 \cdot 5 - 4 - 6 = 0, \quad (31.3)$$

kde s /1/ je počet styčníků, p /1/ je počet prutů, n_R /1/ je počet reakčních sil (počet odebraných stupňů volnosti vnějšími vazbami).

Protože $i = 0$, je úloha sedícího člověka staticky určitá.

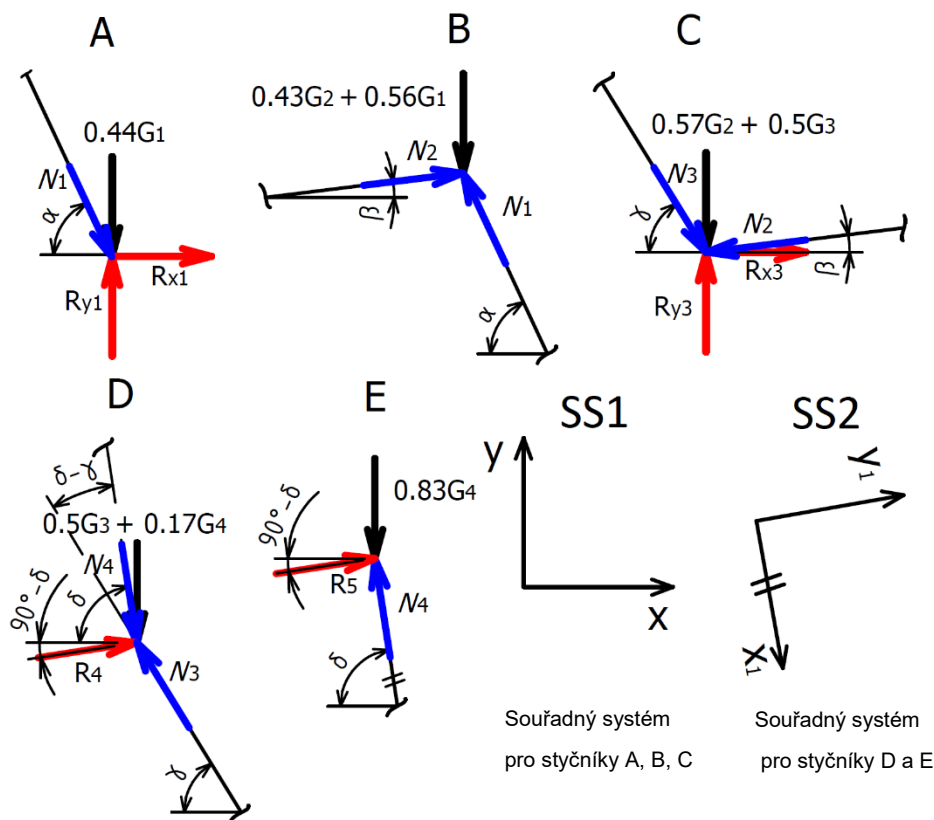
Následným krokem je převedení sil do styčníků a zavedení reakcí a vnitřních sil. Reakční síly se určí podle typu vazeb. Ve styčnících A a C, viz Obr. 31.6, jsou pevné kloubové vazby, které odebírají 2 stupně volnosti a proto zde vznikají 2 reakce, které lze nejjednodušeji považovat jako navzájem kolmé. Zbývající 2 vazby D a E, viz Obr. 31.6, jsou kloubové posuvné, které odebírají pouze jeden stupeň volnosti. Jako přijatelné zjednodušení uvažujeme, že reakční síly R_4 a R_5 jsou rovnoběžné. Model s uvolněnými vazbami je na Obr. 31.8.



Obr. 31.8 Připravený výpočetní model – vlevo model s tíhovými silami v těžištích, vpravo převedený model se silami ve styčnicích.

Pro vyřešení úlohy je použita obecná **styčnická metoda**³²². Principem této metody je uvolnění vazeb a sestavení rovnic rovnováhy pro každý styčník (jednotlivé styčníky musí být v rovnováze), blíže také první díl této knihy [1]. Uvolněné styčníky jsou na Obr. 31.9, kde jsou také uvedeny 2 různé souřadné systémy (SS). Souřadný systém SS1 odpovídá styčníkům A až C a SS2 odpovídá styčníkům D a E. Systém SS2 byl vytvořen pro ulehčení výpočtu, jinak samozřejmě lze počítat v libovolném souřadném systému, ale je třeba tomu vždy přizpůsobit sestavení rovnic.

³²² **Styčnická metoda** (anglicky **Joint Method**) se používá pro řešení prutových soustav a mechanismů.



Obr. 31.9 Uvolněné styčníky a jejich souřadné systémy.

Dle Obr. 31.9 jsou sestaveny rovnice rovnováhy, viz vztahy (31.4) až (31.13).

Styčník A:

$$\sum F_{xi} = R_{x1} + N_1 \cos(\alpha) = 0, \quad (31.4)$$

$$\sum F_{yi} = R_{y1} - 0.44G_1 - N_1 \sin(\alpha) = 0. \quad (31.5)$$

Styčník B:

$$\sum F_{xi} = -N_1 \cos(\alpha) + N_2 \cos(\beta) = 0, \quad (31.6)$$

$$\sum F_{yi} = -0.56G_1 - 0.43G_2 + N_1 \sin(\alpha) + N_2 \sin(\beta) = 0. \quad (31.7)$$

Styčník C:

$$\sum F_{xi} = R_{x3} - N_2 \cos(\beta) + N_3 \cos(\gamma) = 0, \quad (31.8)$$

$$\sum F_{yi} = R_{y3} - 0.57G_2 - 0.5G_3 - N_2 \sin(\beta) - N_3 \sin(\gamma) = 0. \quad (31.9)$$

Styčnick D:

$$\sum F_{xi} = N_4 + 0.5G_3 \cdot \sin(\delta) + 0.17G_4 \sin(\delta) - N_3 \cos(\delta - \gamma) = 0, \quad (31.10)$$

$$\sum F_{yi} = R_4 - 0.5G_3 \cos(\delta) - 0.17G_4 \cos(\delta) - N_3 \sin(\delta - \gamma) = 0. \quad (31.11)$$

Styčnick E:

$$\sum F_{xi} = -N_4 + 0.83G_4 \sin(\delta) = 0, \quad (31.12)$$

$$\sum F_{yi} = R_5 - 0.83G_4 \cos(\delta) = 0. \quad (31.13)$$

Z rovnic rovnováhy (31.4) až (31.13) se vypočou neznámé vnitřní normálové (osové, axiální) síly N_1 až N_4 a reakční síly R_{x1} až R_5 .

Z rovnic (31.4) a (31.5) se vyjádří reakce R_{x1} a R_{y1}

$$R_{x1} = -N_1 \cos(\alpha),$$

$$R_{y1} = 0.44G_1 + N_1 \sin(\alpha).$$

Z rovnice (31.6) se vyjádří N_2 a dosadí do (31.7), čímž se získají vnitřní síly N_1 a N_2

$$N_2 = N_1 \frac{\cos(\alpha)}{\cos(\beta)},$$

$$N_1 = \frac{0.56G_1 + 0.43G_2 - N_2 \sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

Z (31.8) a (31.9) se získají reakce R_{x3} a R_{y3}

$$R_{x3} = N_2 \cos(\beta) - N_3 \cos(\gamma),$$

$$R_{y3} = 0.57G_2 + 0.5G_3 + N_2 \sin(\beta) + N_3 \sin(\gamma).$$

Z (31.10) se vyjádří N_4 a z (31.11) reakce R_4

$$N_3 = \frac{N_4 + 0.5G_3 \sin(\delta) + 0.17G_4 \sin(\delta)}{\cos(\delta - \gamma)},$$

$$R_4 = 0.5G_3 \cos(\delta) + 0.17G_4 \cos(\delta) + N_3 \sin(\delta - \gamma).$$

Z rovnice (31.12) se získá vnitřní síla N_4 a z (31.13) reakce R_5

$$N_4 = 0.83G_4 \sin(\delta),$$

$$R_5 = 0.83G_4 \cos(\delta).$$

Výsledné síly jsou po dosazení a úpravě viz rovnice (31.14) až (31.23).

$$N_1 = \frac{(0.56G_1 + 0.43G_2) \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (31.14)$$

$$N_2 = \frac{(0.56G_1 + 0.43G_2) \cos(\alpha)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (31.15)$$

$$N_3 = \frac{(0.5G_3 + G_4) \sin(\delta)}{\cos(\delta - \gamma)}, \quad (31.16)$$

$$N_4 = 0.83G_4 \sin(\delta), \quad (31.17)$$

$$R_{x1} = -\frac{(0.56G_1 + 0.43G_2) \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (31.18)$$

$$R_{y1} = 0.43G_1 + \frac{(0.56G_1 + 0.43G_2) \sin(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)}, \quad (31.19)$$

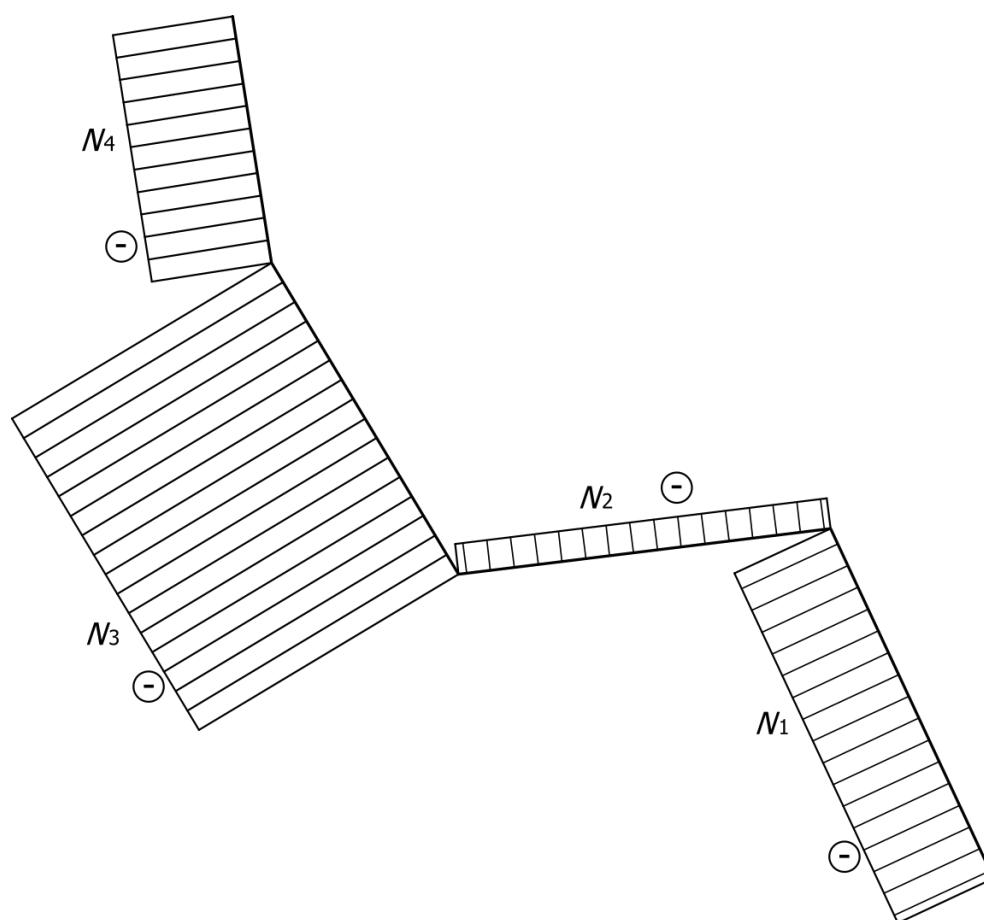
$$R_{x3} = \frac{(0.56G_1 + 0.43G_2) \cos(\alpha) \cos(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} - \frac{(0.5G_3 \cdot \sin(\delta) + G_4 \sin(\delta)) \cos(\gamma)}{\cos(\delta - \gamma)}, \quad (31.20)$$

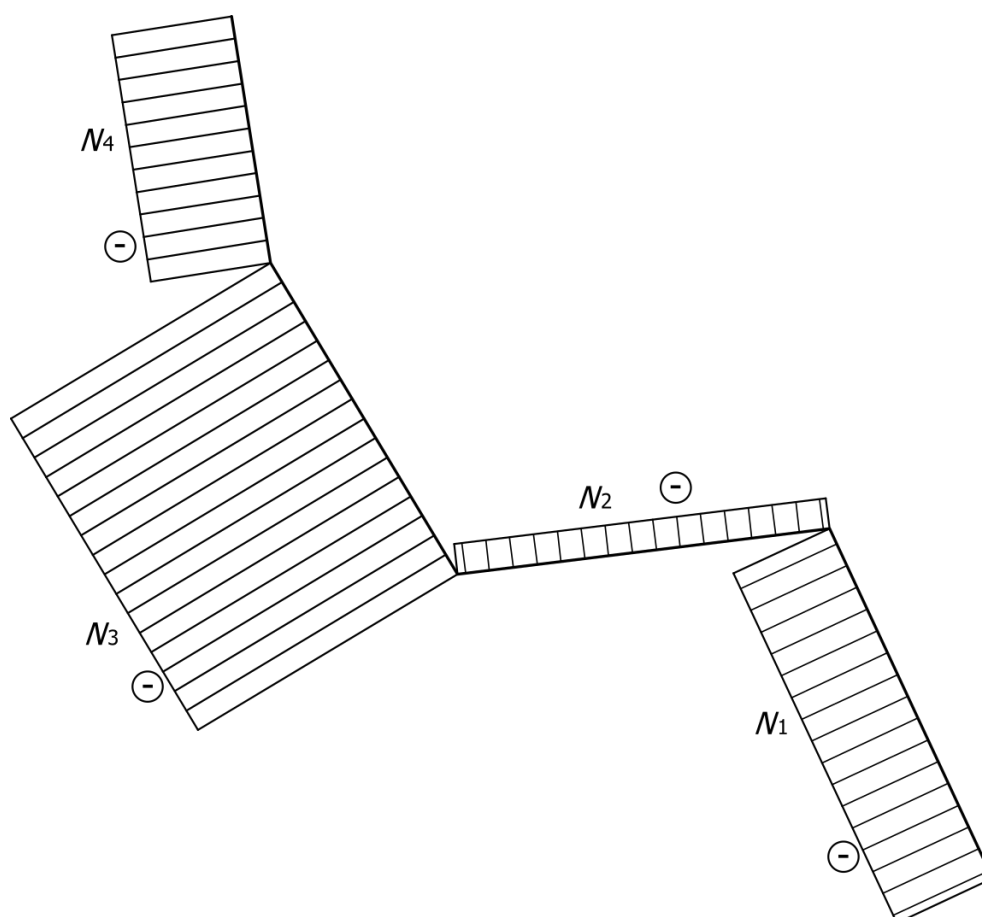
$$R_{y3} = 0.57G_2 + 0.5G_3 + \frac{(0.56G_1 + 0.43G_2) \cos(\alpha) \sin(\beta)}{\sin(\alpha + \beta)} + \frac{(0.5G_3 + G_4) \sin(\gamma) \sin(\delta)}{\cos(\delta - \gamma)}, \quad (31.21)$$

$$R_4 = (0.5G_3 + 0.17G_4) \cos(\delta) + \frac{(0.5G_3 + G_4) \sin(\delta) \sin(\delta - \gamma)}{\cos(\delta - \gamma)}, \quad (31.22)$$

$$R_5 = 0.83G_4 \cos(\delta). \quad (31.23)$$

Průběhy vypočtených normálových sil pro hodnoty z Tab. 31.2 jsou vidět na

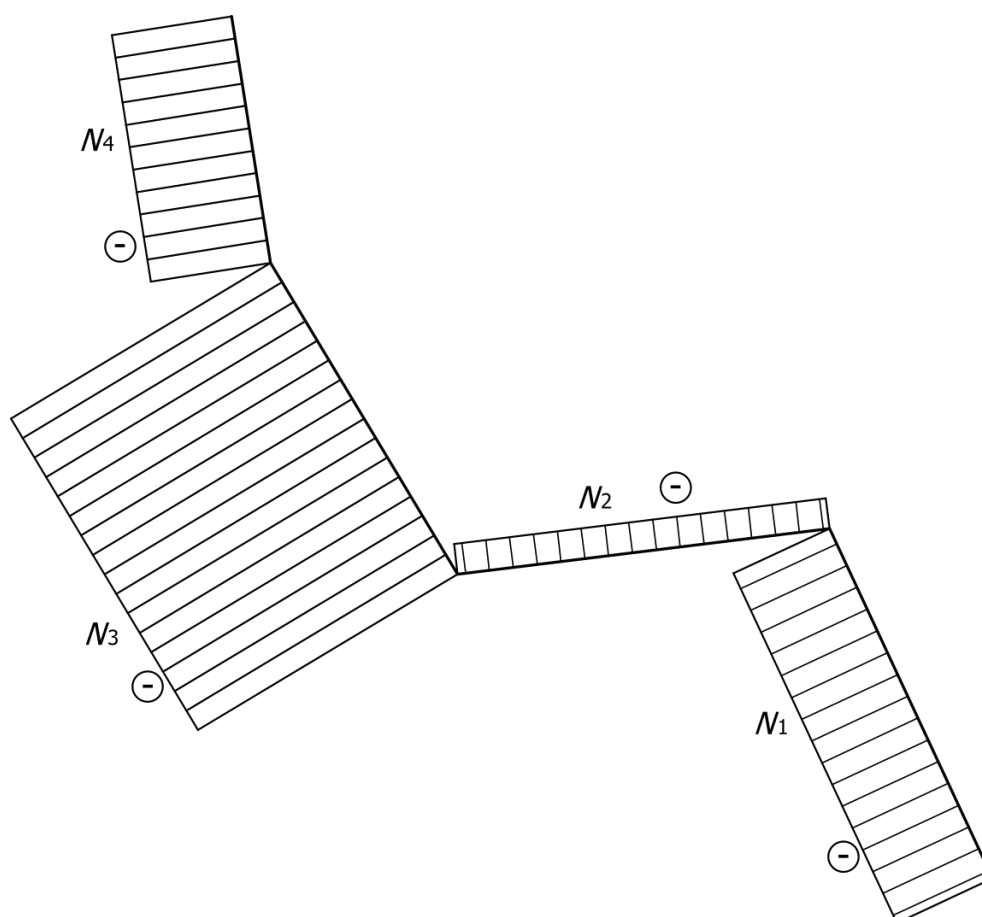




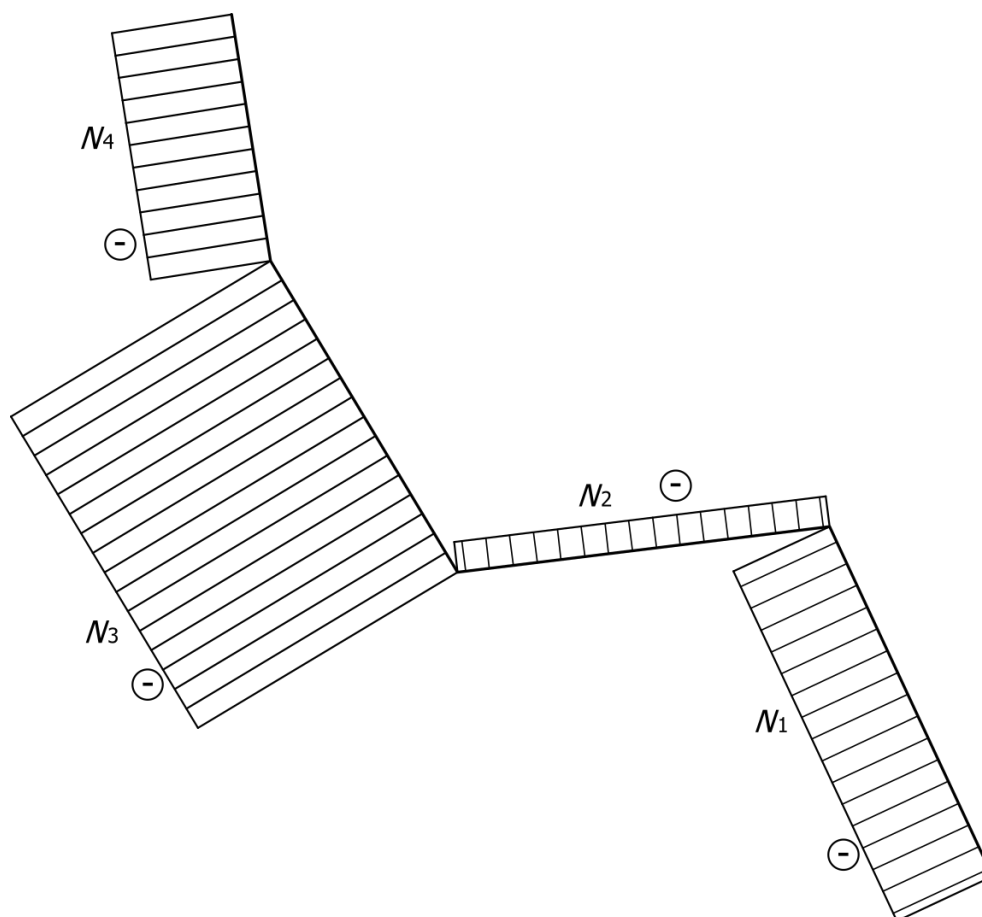
Obr. 31.10

Tab. 31.2 Vstupní hodnoty pro vykreslení vnitřních statických účinků – Příklad 31.1.

Veličina /m/	Hodnota	Veličina /kg/	Hodnota	Veličina /°/	Hodnota
L_1	0.513	m_1	9.92	α	80
L_2	0.441	m_2	19.84	β	10
L_3	0.432	m_3	32	γ	70
L_4	0.297	m_4	18.24	δ	75



Obr. 31.10, Příklad 31.2 (Obr. 31.13, Obr. 31.14 a Obr. 31.15).

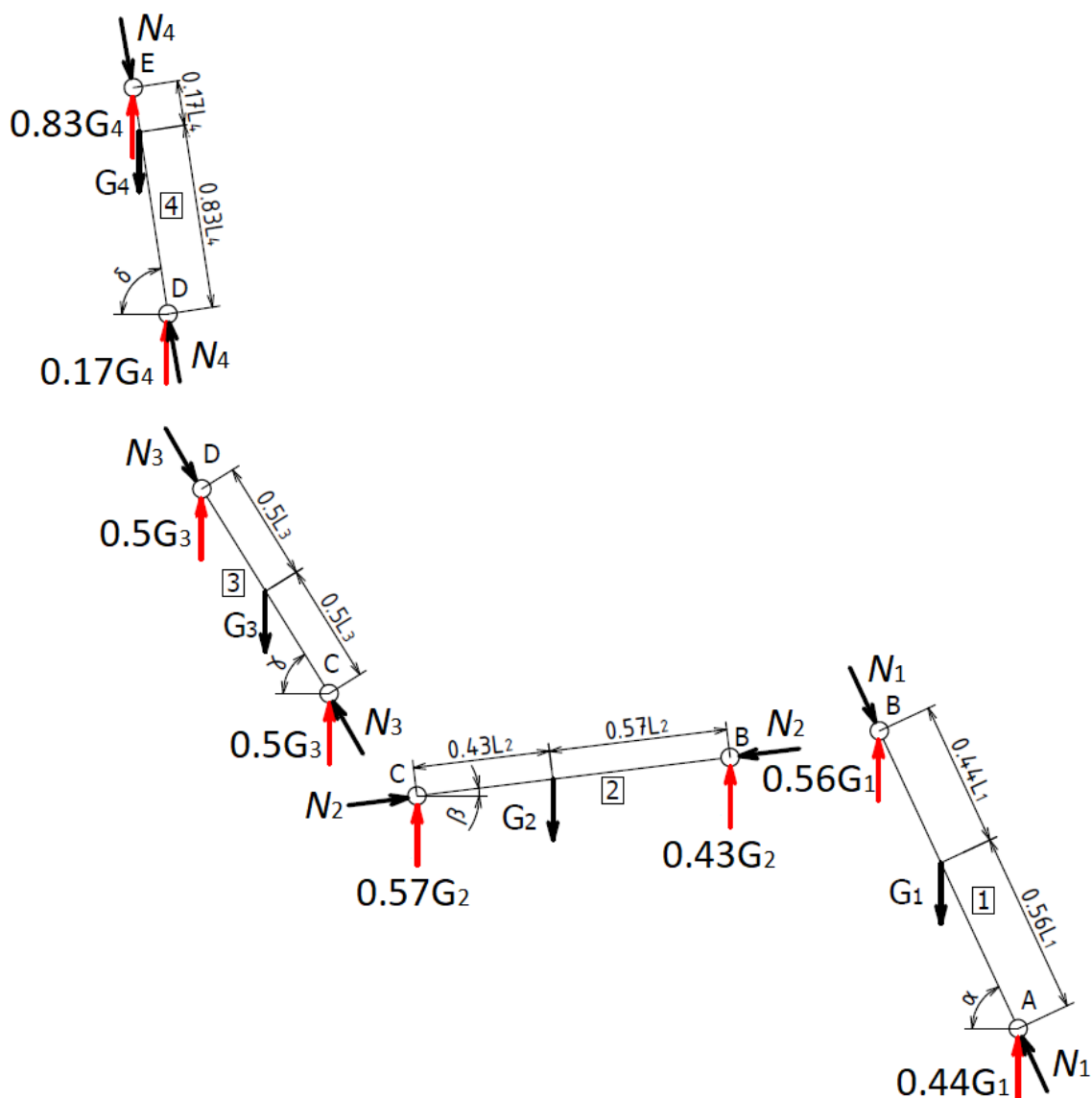
Obr. 31.10 Průběh normálových sil N / N /.

Řešení v programu Matlab, viz [6] <https://cs.wikipedia.org/wiki/MATLAB>, resp. matlabovský script, je uveden v Příkladu 31.1.

Tvorbou tohoto jednoduchého modelu došlo k poměrně velkým zjednodušením a při zanedbání ohybových momentů a posouvajících sil lze tvrdit, že mohlo dojít k větší chybě. Je proto vhodné tyto chybějící vnitřní statické účinky dopočítat, což ale má také vliv na průběh normálových sil. To je předvedeno v následujícím textu.

31.5 Deterministický model sedícího člověka (přesnější varianta s uvažováním normálových a posouvajících sil a ohybových momentů)

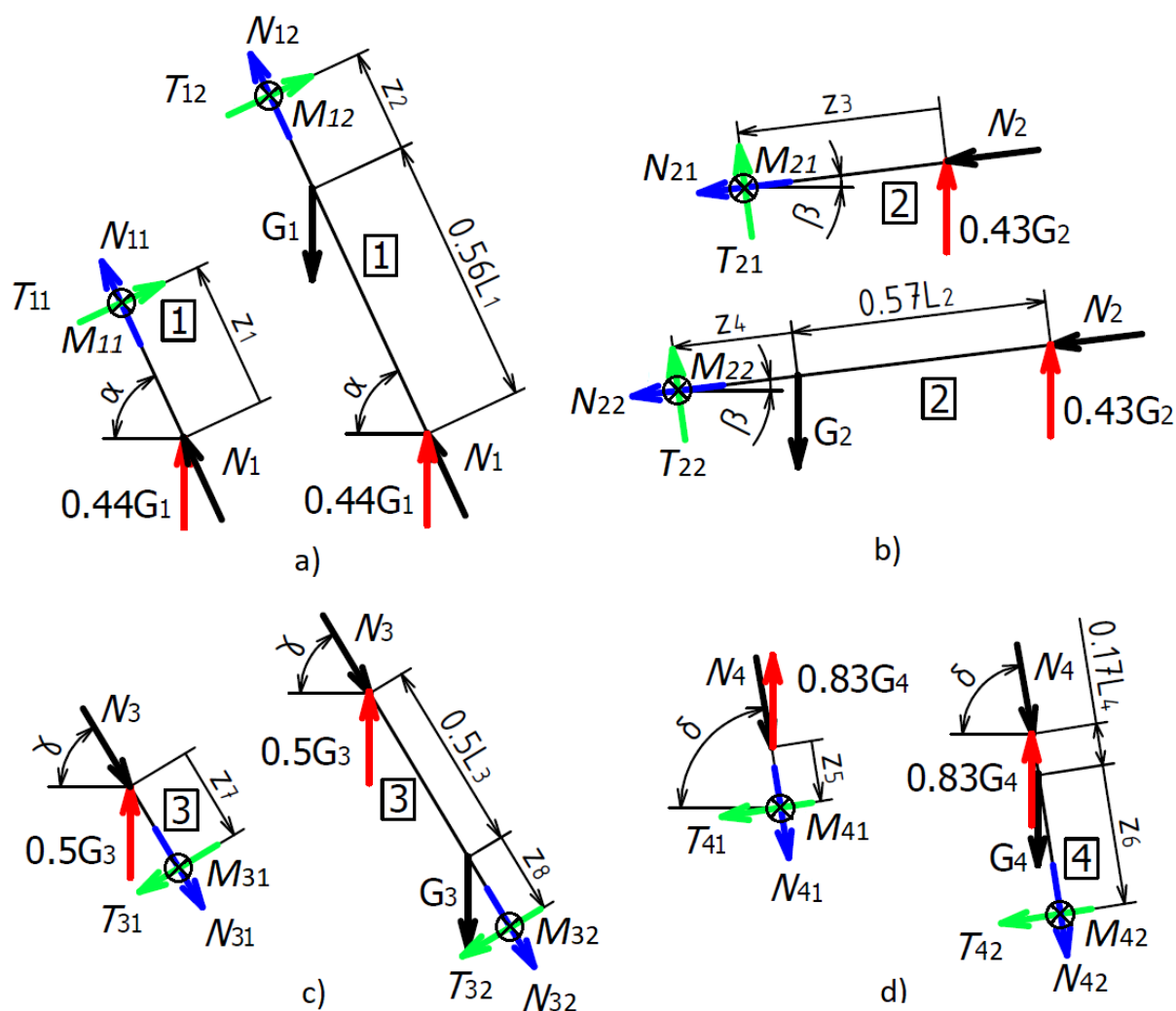
Obecně, u prutové soustavy (v našem případě idealizovaný sedící člověk) se zatížením mimo styčníky, se posouvající síly a ohybové momenty dají dopočítat tak, že se jednotlivé pruty (segmenty těla) osamostatní a řeší se jako prostě uložené nosníky. To platí, protože je-li celá soustava v rovnováze, tak musí být v rovnováze také každý její člen (segment). Osamostatněné pruty jsou uvedeny na Obr. 31.11. Uvažuje se, že konce takto uvolněných prutů jsou prostě podepřeny, protože konce prutů jsou ideální styčníky. Reakce se tedy určí podobným způsobem jako rovnice (31.1) a (31.2), přičemž velikost normálových reakcí známe, jsou to N_1 až N_4 spočítané styčníkovou metodou, viz vztahy (31.14) až (31.17).



Obr. 31.11 Osamostatněné pruty.

Všechny pruty je možné rozdělit na 2 úseky. V každém úseku lze stanovit vnitřní statické účinky a vždy 1 rovnici pro ohybový moment, 1 pro posouvající sílu a 1 pro normálovou sílu.

Obr. 31.12 jsou osamostatněné pruty, kde vzdálenosti z_i značí délky úseků, jejichž velikosti jsou patrné z Obr. 31.11. Výpočet jednotlivých sil a momentů je uveden v rovnicích (31.24) až (31.46).



Obr. 31.12 Osamostatněné pruty se znázorněnými vnitřními statickými účinky (N , T , M), rozdělené na 2 úseky: (a) prut 1, (b) prut 2, (c) prut 3, (d) prut 4.

Úseky z_i byly voleny s ohledem na co nejjednodušší postup řešení.

$$N_{11} = N_{MAX1} = -N_1 - 0.44G_1 \sin(\alpha), \quad (31.24)$$

$$N_{12} = N_{11} + G_1 \sin(\alpha), \quad (31.25)$$

$$T_{11} = -0.44G_1 \cos(\alpha), \quad (31.26)$$

$$T_{12} = T_{MAX1} = T_{11} + G_1 \cos(\alpha). \quad (31.27)$$

$$M_{11} = 0.44G_1 \cos(\alpha) z_1, \quad (31.28)$$

$$M_{12} = 0.44G_1 \cos(\alpha) (0.56L_1 + z_2) - G_1 \cos(\alpha)z_2, \quad (31.29)$$

$$N_{21} = -N_2 + 0.43G_2 \sin(\beta), \quad (31.30)$$

$$N_{22} = N_{MAX2} = N_{21} - G_2 \sin(\beta), \quad (31.31)$$

$$T_{21} = -0.43G_2 \cos(\beta), \quad (31.32)$$

$$T_{22} = T_{MAX2} = T_{21} + G_2 \cos(\beta), \quad (31.33)$$

$$M_{21} = 0.43G_2 \cos(\beta) z_3, \quad (31.34)$$

$$M_{22} = 0.43G_2 \cos(\beta) (0.57L_2 + z_4) - G_2 \cos(\beta)z_4, \quad (31.35)$$

$$N_{31} = N_3 - 0.5G_3 \sin(\gamma), \quad (31.36)$$

$$N_{32} = N_{MAX3} = N_{31} + G_3 \sin(\gamma), \quad (31.37)$$

$$T_{31} = -T_{32} = T_{MAX3} = 0.5G_3 \cos(\gamma), \quad (31.38)$$

$$M_{31} = 0.5G_3 \cos(\gamma) z_5, \quad (31.39)$$

$$M_{32} = 0.5G_3 \cos(\gamma) (0.5L_3 + z_6) - G_3 \cos(\gamma)z_6, \quad (31.40)$$

$$N_{41} = N_4 - 0.83G_4 \sin(\delta), \quad (31.41)$$

$$N_{42} = N_{MAX3} = N_{41} + G_4 \sin(\delta), \quad (31.42)$$

$$T_{41} = T_{MAX4} = 0.83G_4 \cos(\delta), \quad (31.43)$$

$$T_{42} = T_{41} - G_4 \cos(\delta), \quad (31.44)$$

$$M_{41} = 0.17G_4 \cos(\delta) z_7, \quad (31.45)$$

$$M_{42} = 0.83G_4 \cos(\gamma) (0.17L_4 + z_8) - G_4 \cos(\delta)z_8. \quad (31.46)$$

Maximální ohybový moment v každém prutu je vždy v těžišti.

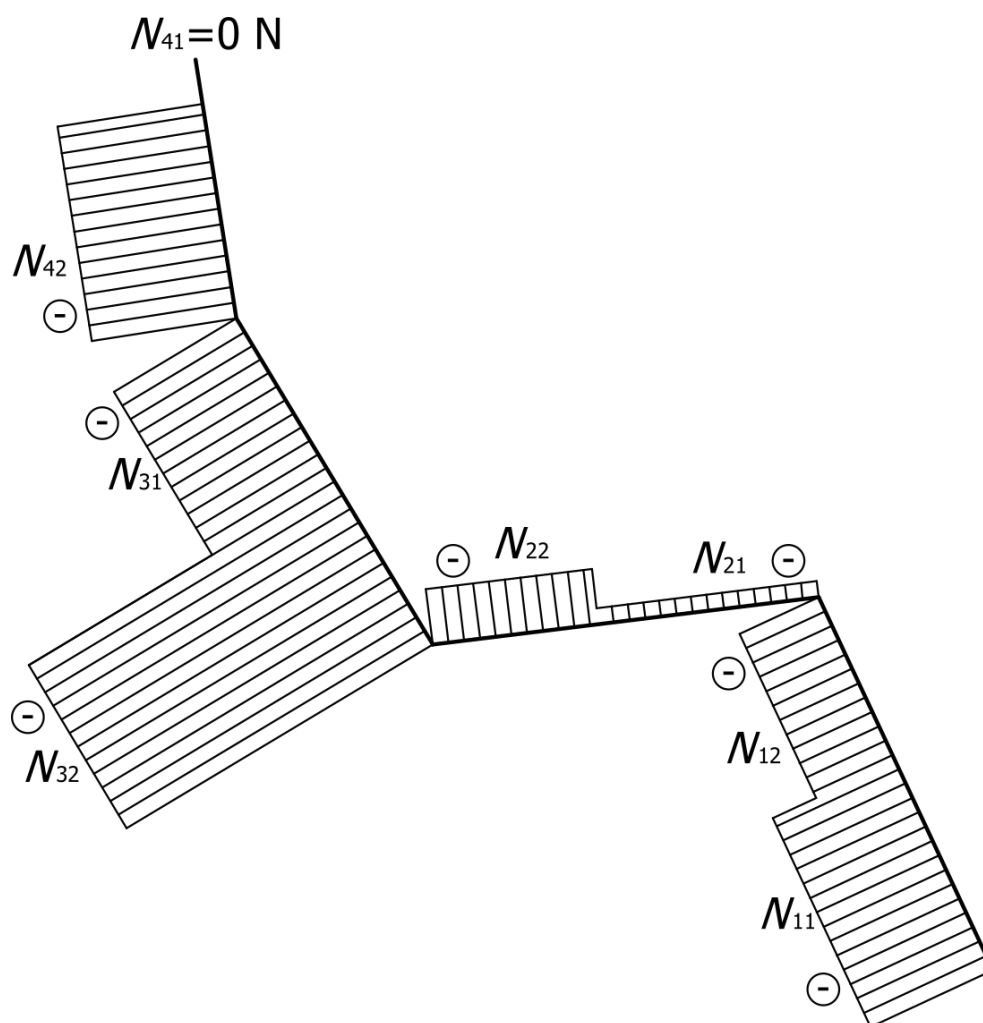
$$M_{OMAX1} = 0.44G_1 \cos(\alpha) 0.56L_1, \quad (31.47)$$

$$M_{OMAX2} = 0.43G_2 \cos(\beta) 0.57L_2, \quad (31.48)$$

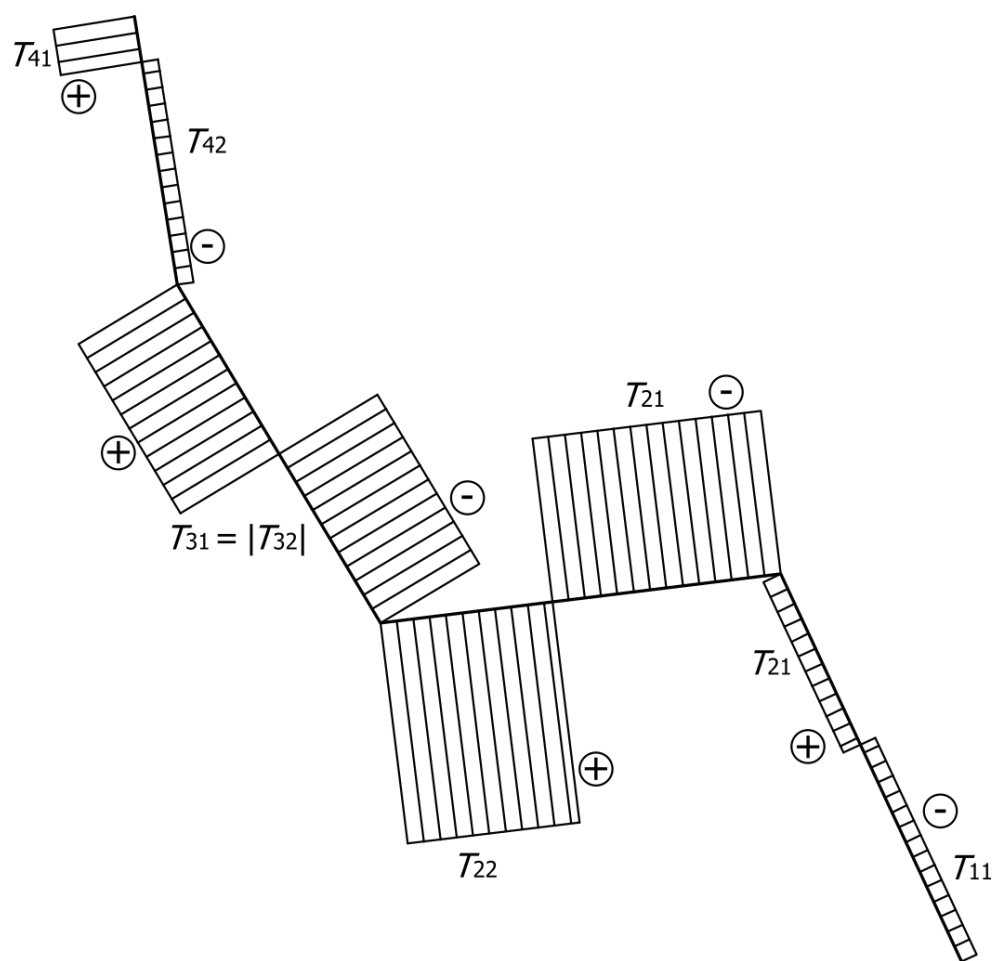
$$M_{OMAX3} = 0.5G_3 \cos(\gamma) 0.5L_3, \quad (31.49)$$

$$M_{OMAX4} = 0.17G_4 \cos(\delta) 0.17L_4. \quad (31.50)$$

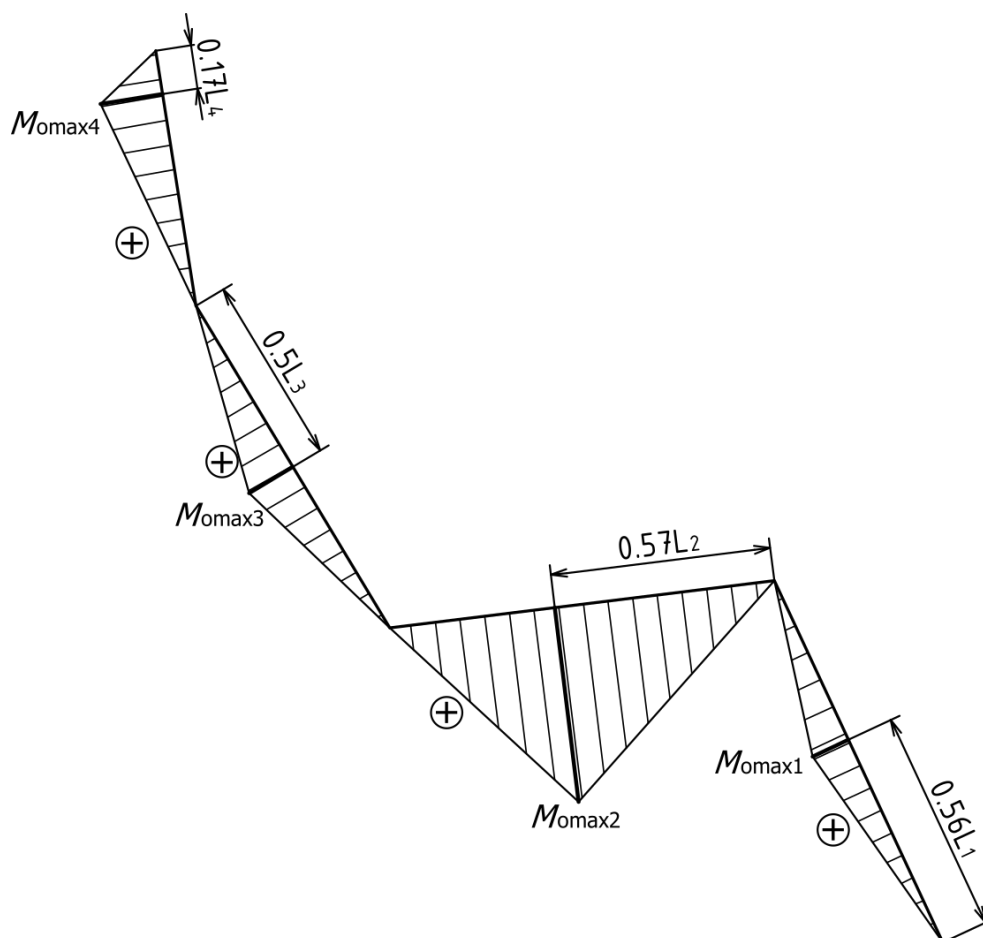
Průběhy vypočtených vnitřních statických účinků (N, T, M), pro zadané hodnoty z Tab 31.2, jsou vidět na Obr. 31.13 až Obr. 31.15.



Obr. 31.13 Průběh normálových sil N /N/.



Obr. 31.14 Průběh posouvajících sil T/N .

Obr. 31.15 Průběh ohybových momentů M /Nm/.

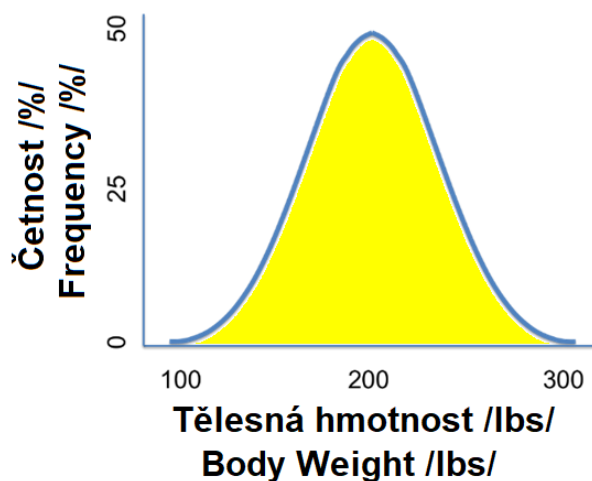
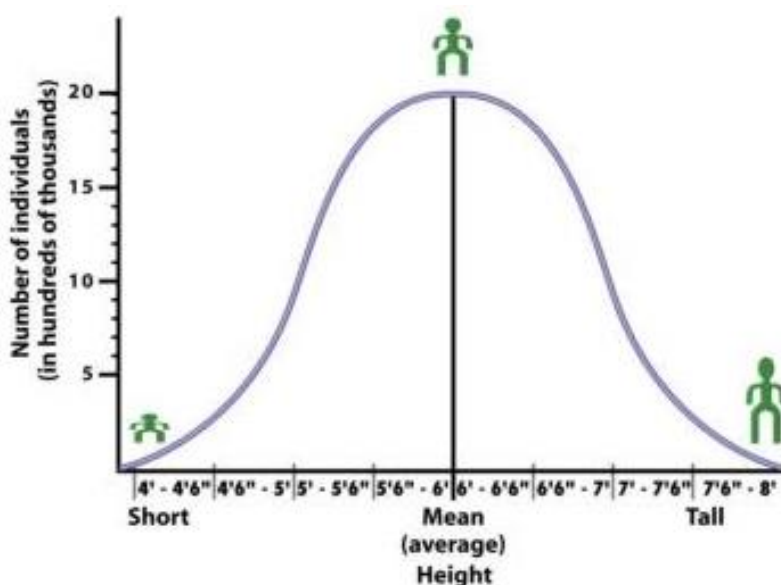
Řešení této úlohy je v Příkladu 31.2, kde je použit sw Matlab.

31.6 Stochastický model sedícího člověka

Pro zahrnutí různorodosti světa kolem nás, a tedy i lidské populace je použita stochastická metoda Monte Carlo. Výpočet je proveden pomocí softwaru Anthill. Blíže Kapitoly 27 až 29 v této knize.

Všechny vstupní hodnoty jsou dány intervalem s normálně ohraničeným rozdělením (modifikace Gaussova normálního rozložení pravděpodobnosti), což dostatečně přesně popisuje realitu. Pro určení intervalů hmotnosti a výšky člověka byl použit Obr. 31.16 a

Obr. 31.17.

Obr. 31.16 Rozdělení četnosti hmotnosti člověka m /lbs/, viz [2].Obr. 31.17 Rozdělení četnosti výšky člověka h /ft/, viz [2].

Tíhové zrychlení na povrchu Země se pohybuje od minimální hodnoty (rovník) po maximální hodnotu (póly) na Zemi.

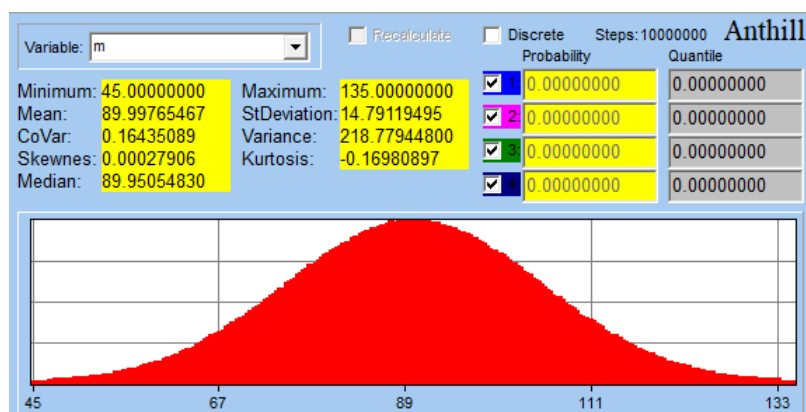
Pro úhly končetin byly intervaly zvoleny orientačně (obecně záleží na tvaru křesla a poloze při sezení). Aby vznikaly situace blízké realitě jsou úhel sedu γ a úhel horní části trupu δ na sobě závislé. Mělo by platit $\gamma < \delta$, a jejich poměr je určen odborným odhadem

$$\gamma = \frac{14}{15} \delta. \quad (31.51)$$

Vstupní hodnoty

Všechny vstupní histogramy v softwaru Anthill mají ohraničená normální rozdělení a jsou vytvořeny modifikací (změnou minimálních a maximálních hodnot) základního histogramu (soubor N01.DIS). Blíže kapitoly 27 až 29 v této knize.

Zde je uveden pouze reprezentativně histogram celkové hmotnosti člověka m , viz Obr. 31.18. V Tab. 31.3 jsou uvedeny charakteristické hodnoty pro jednotlivé histogramy.



Obr. 31.18 Reprezentativní vstupní histogram – celková hmotnost člověka m /kg/.

Tab. 31.3 Vstupní hodnoty (program Anthill).

Název veličiny		Symbol	Min.	Arit. průměr	Medián	Max.
Hmotnost člověka /kg/		m	45	90	90	135
Výška člověka /m/		h	1.2	1.8	1.8	2.4
Úhel segmentu 1 /°/		α	60	75	75	90
Úhel segmentu 2 /°/		β	0	10	10	20
Úhel segmentu 3 /°/		γ	60.67	70	70	79.33
Úhel segmentu 4 /°/		δ	65	75	75	85
Tíhové zrychlení /m/s ² /		g	9.78	9.81	9.81	9.83
Délka [m]	Segment č. 1	L_1	0.34	0.51	0.51	0.68
	Segment č. 2	L_2	0.29	0.44	0.44	0.59
	Segment č. 3	L_3	0.29	0.43	0.43	0.58
	Segment č. 4	L_4	0.2	0.3	0.3	0.4
Hmotnost [kg]	Segment č. 1	m_1	5.58	11.16	11.16	16.74
	Segment č. 2	m_2	11.16	22.32	22.32	33.48
	Segment č. 3	m_3	18	36	36	54
	Segment č. 4	m_4	10.26	20.52	20.52	30.78
Tíhová síla [N]	Segment č. 1	G_1	54.58	109.43	109.43	164.57
	Segment č. 2	G_2	109.16	218.86	218.86	329.13
	Segment č. 3	G_3	176.07	353	353	530.86
	Segment č. 4	G_4	100.36	201.21	201.21	302.59

Výstupní hodnoty

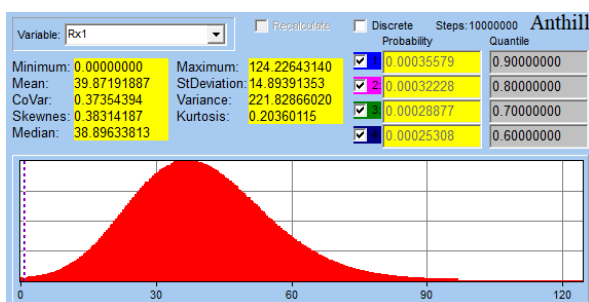
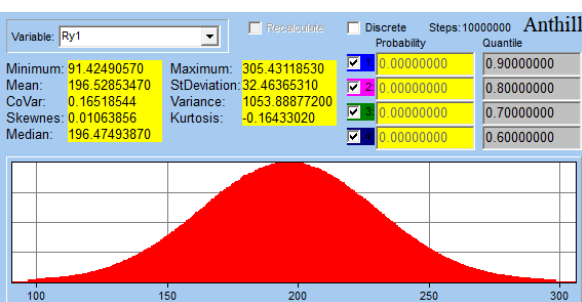
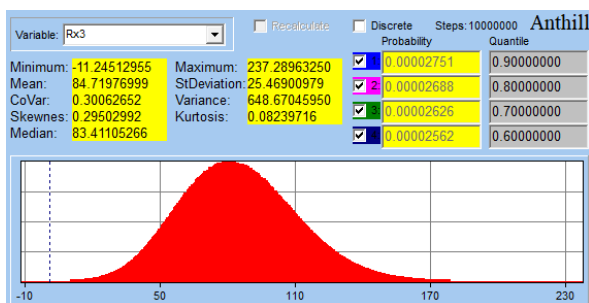
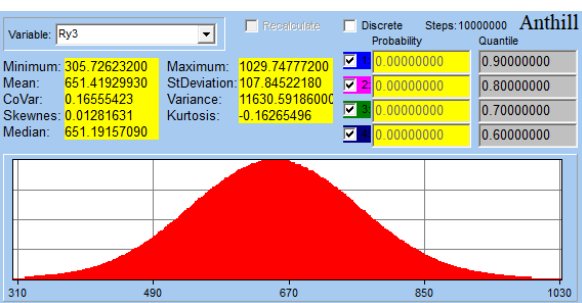
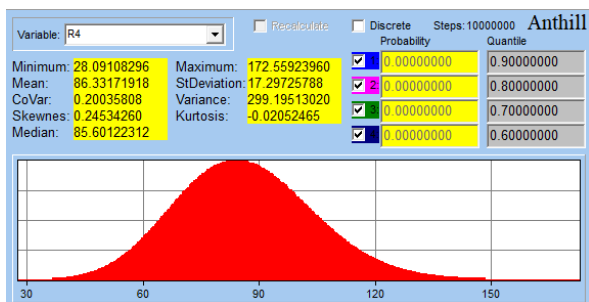
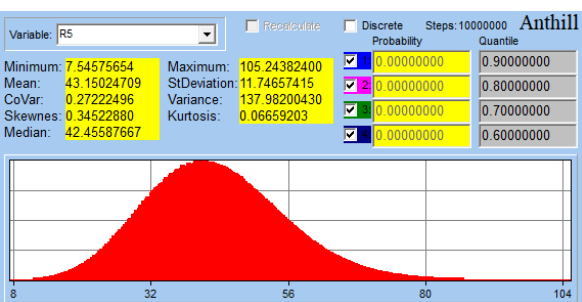
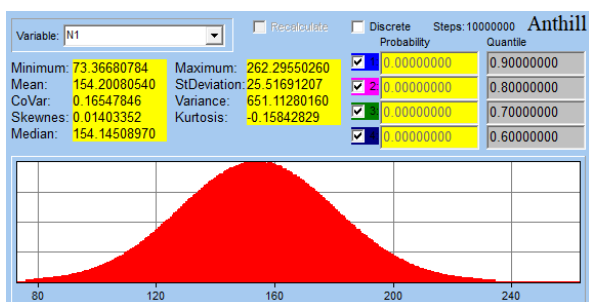
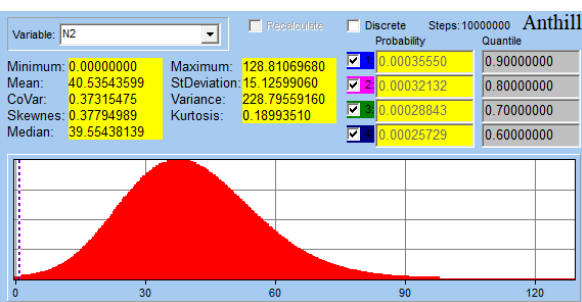
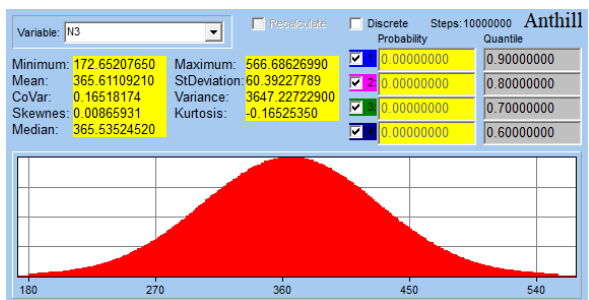
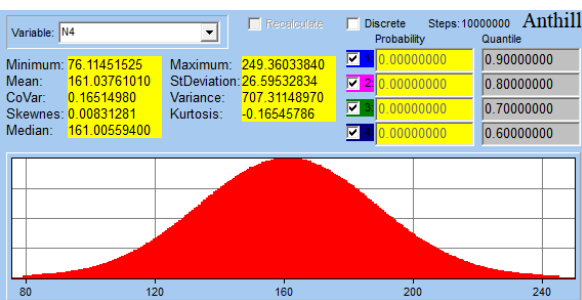
Tab. 31.4 Výstupní hodnoty (program Anthill)

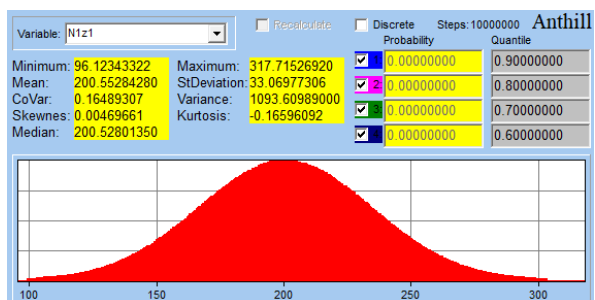
Název veličiny		Symbol	Min.	Aritm. průměr	Medián	Max.	Histogram
Reakční síla /N/, Obr. 31.8	Noha – Styčnick A	R_{x1}	0	39.87	38.9	124.23	Obr. 31.19
	Noha – Styčnick A	R_{y1}	91.42	196.53	196.47	305.43	Obr. 31.20
	Hýždě – Styčnick C	R_{x3}	-11.25	84.72	83.41	237.29	Obr. 31.21
	Hýždě – Styčnick C	R_{y3}	305.73	651.42	651.19	1029.75	Obr. 31.22
	Záda – Styčnick D	R_4	28.09	86.33	85.6	172.56	Obr. 31.23
	Hlava – Styčnick E	R_5	7.55	43.15	42.46	105.24	Obr. 31.24
Vnitřní normál. síla – styčnick ³²³ /N/, Obr. 31.8	Segment č. 1	N_1	73.37	154.2	154.15	262.3	Obr. 31.25
	Segment č. 2	N_2	0	40.54	39.55	128.81	Obr. 31.26
	Segment č. 3	N_3	172.65	365.61	365.54	566.69	Obr. 31.27
	Segment č. 4	N_4	76.12	161.04	161.01	249.36	Obr. 31.28
Vnitřní normál. síla mimo styčnick ³²⁴ /N/ Obr. 31.12	Segment č. 1	N_{11}	96.12	200.55	200.53	317.72	Obr. 31.29
		N_{12}	43.99	95.24	95.07	174.37	Obr. 31.30
	Segment č. 2	N_{21}	-42.32	24.23	23.42	118.8	Obr. 31.31
		N_{22}	0.58	62.17	61.02	167.26	Obr. 31.32
	Segment č. 3	N_{31}	95.21	200.02	200	307.23	Obr. 31.33
		N_{32}	250.11	531.26	531.12	827.75	Obr. 31.34
	Segment č. 4	N_{41}	0	0	0	0	–
		N_{42}	91.71	194.04	194	300.84	Obr. 31.35
Vnitřní pos. síla /N/, Obr. 31.12	Segment č. 1	$ T_{11} $	0	12.42	12.18	35.74	Obr. 31.36
		T_{12}	0	15.8	15.5	45.49	Obr. 31.37
	Segment č. 2	$ T_{21} $	44.21	92.53	95.52	141.3	Obr. 31.38
		T_{22}	58.6	122.65	122.65	187.3	Obr. 31.39
	Segment č. 3	$T_{31} = T_{32} $	16.56	60.28	59.59	129.27	Obr. 31.40
	Segment č. 4	T_{41}	7.57	43.15	42.46	105.34	Obr. 31.41
		$ T_{42} $	1.55	8.84	8.7	21.58	Obr. 31.42
Max. vnitřní ohyb. moment [Nm], Obr. 31.12	Segment č. 1	M_{OMAX1}	0	3.57	3.46	12.57	Obr. 31.43
	Segment č. 2	M_{OMAX2}	7.8	23.26	23.06	46.97	Obr. 31.44
	Segment č. 3	M_{OMAX3}	3.01	13.02	12.77	34.98	Obr. 31.45
	Segment č. 4	M_{OMAX4}	0.32	2.18	2.13	6.63	Obr. 31.46

³²³ Kapitola 31.4 – jedná se o normálové síly, které odpovídají případu, kdy jsou tíhové síly rozloženy do styčnicků.

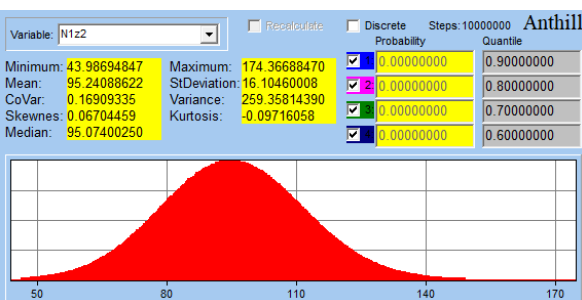
³²⁴ Kapitola 31.5 – jedná se o normálové síly. Které odpovídají případu, kdy jsou tíhové síly v těžištích.

Výstupní histogramy (stanoveno sw Anthill)

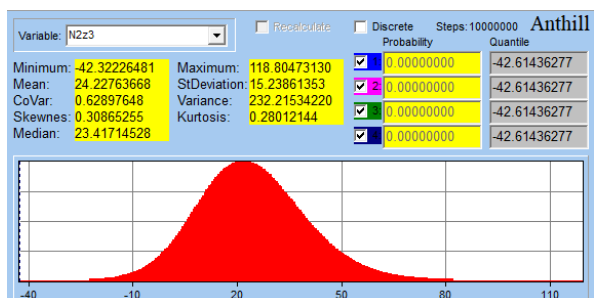
Obr. 31.19 Reakce $R_{x1}/N/$.Obr. 31.20 Reakce $R_{y1}/N/$.Obr. 31.21 Reakce $R_{x3}/N/$.Obr. 31.22 Reakce $R_{y3}/N/$.Obr. 31.23 Reakce $R_4/N/$.Obr. 31.24 Reakce $R_5/N/$.Obr. 31.25 Normálová síla $N_1/N/$.Obr. 31.26 Normálová síla $N_2/N/$.Obr. 31.27 Normálová síla $N_3/N/$.Obr. 31.28 Normálová síla $N_4/N/$.



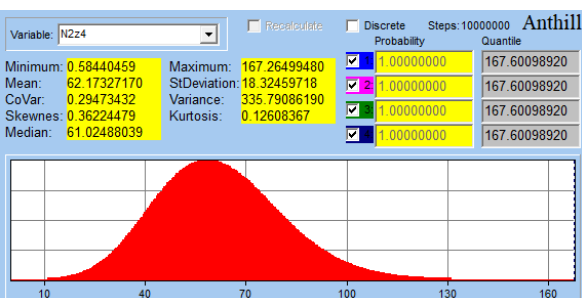
Obr. 31.29 Normálová síla N_{11} /N/.



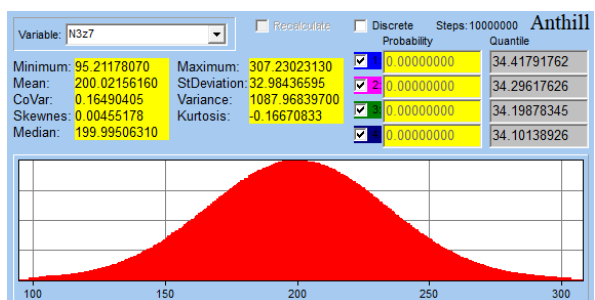
Obr. 31.30 Normálová síla N_{12} /N/.



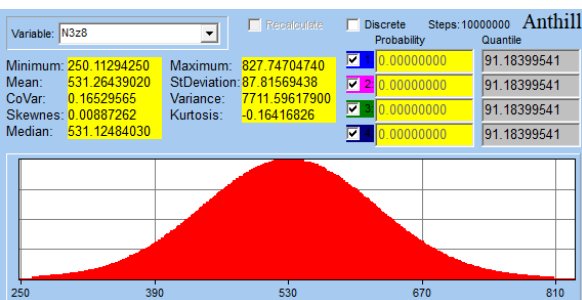
Obr. 31.31 Normálová síla N_{21} /N/.



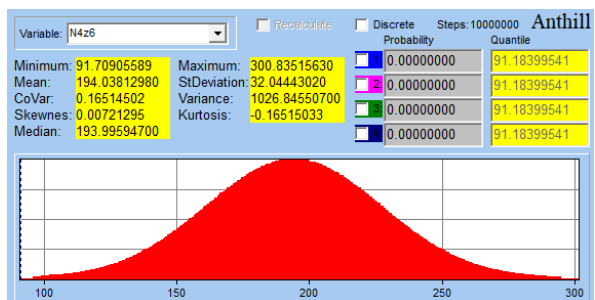
Obr. 31.32 Normálová síla N_{22} /N/.



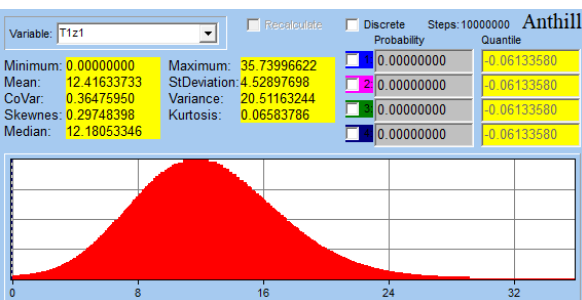
Obr. 31.33 Normálová síla N_{31} /N/.



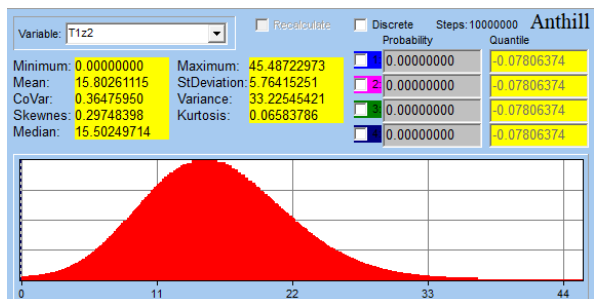
Obr. 31.34 Normálová síla N_{32} /N/.



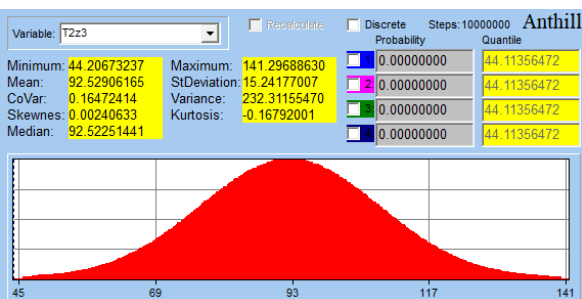
Obr. 31.35 Normálová síla N_{42} /N/.



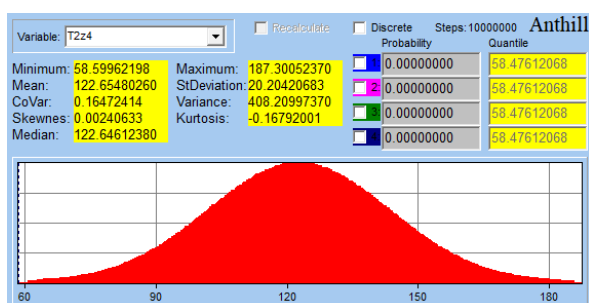
Obr. 31.36 Posouvající síla T_{11} /N/.



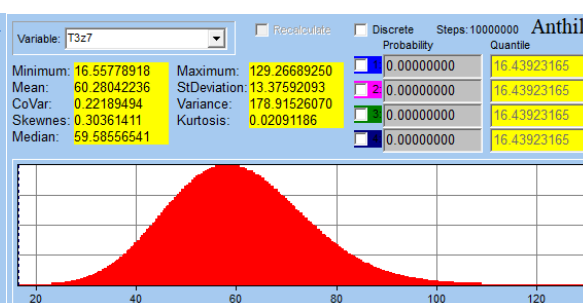
Obr. 31.37 Posouvající síla T_{12} /N/.



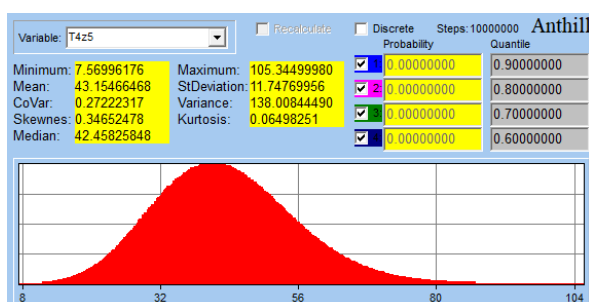
Obr. 31.38 Posouvající síla T_{21} /N/.



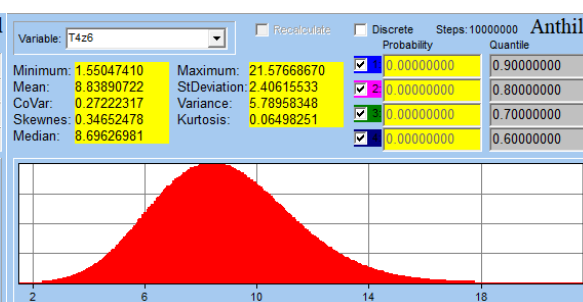
Obr. 31.39 Posouvající síla T_{22} /N/.



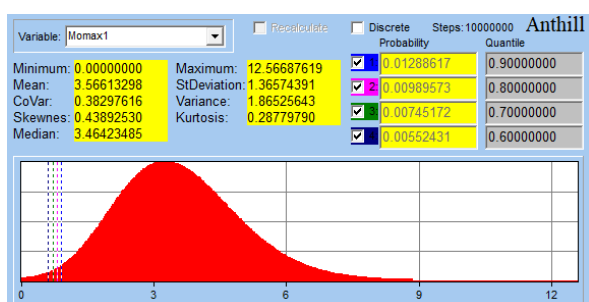
Obr. 31.40 Posouvající síla T_{31} /N/.



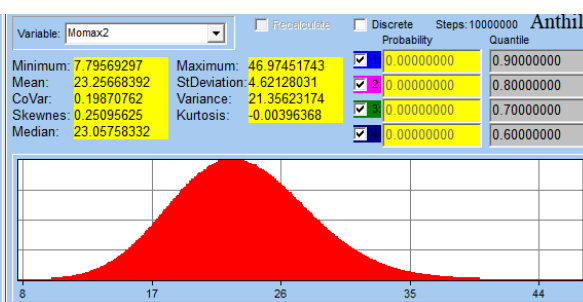
Obr. 31.41 Posouvající síla T_{41} /N/.



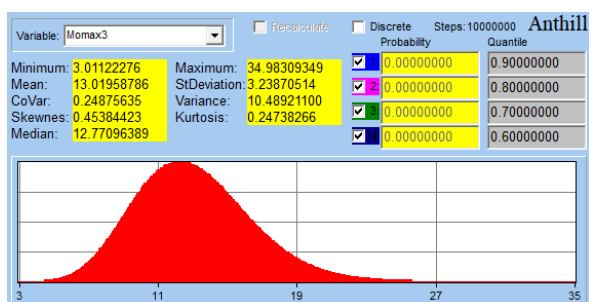
Obr. 31.42 Posouvající síla T_{42} /N/.



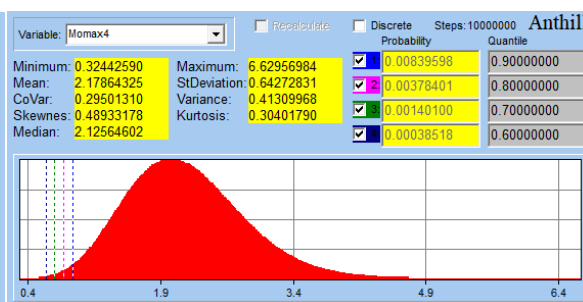
Obr. 31.43 Max. ohyb. moment M_{OMAX1} /Nm/.



Obr. 31.44 Max. ohyb. moment M_{OMAX2} /Nm/.



Obr. 31.45 Max. ohyb. moment M_{OMAX3} /Nm/.



Obr. 31.46 Max. ohyb. moment M_{OMAX4} /Nm/.

Úloha může být ještě zpřesněna podobným postupem jako v Příkladu 25.9, kde byla uvažována spojitě rozložena hmotnost a tíha.

31.7 Příklady

Příklad 31.1: Proved'te řešení úlohy sedícího člověka z kapitoly 31.4. Pro řešení využijte program Matlab.

Dáno: Parametry uvedené v Tab. 31.2 a na Obr. 31.6 a Obr. 31.8.

Základní informace o sw Matlab jsou uvedeny v [6]
<https://cs.wikipedia.org/wiki/MATLAB>.

Script programu Matlab (m-file) je uveden v následujícím textu.

```
close all, clear all, clc
```

```
% Neznámé
```

```
syms N1 N2 N3 N4 Rx1 Ry1 Rx3 Ry3 R4 R5
```

```
% Vstupní hodnoty
```

```
h=1.8; % m
```

```
m=80; % kg
```

```
g=9.81; % ms-2
```

```
alfa=deg2rad(80); % rad
```

```
beta=deg2rad(10); % rad
```

```
gama=deg2rad(70); % rad
```

```
delta=deg2rad(75); % rad
```

```
% Výpočet parametrů segmentů
```

```
% Délky segmentů
```

```
L1=0.285*m; % m
```

```
L2=0.245*m; % m
```

```
L3=0.24*m; % m
```

```
L4=0.165*m; % m
```

```
% Hmotnosti segmentů
```

```
m1=0.124*m; % kg
```

```
m2=0.248*m; % kg
```

```
m3=0.4*m; % kg
```

```
m4=0.228*m; % kg
```

```
% Tíhové síly
```

```
G1=m1*g; % N
```

```
G2=m2*g; % N
```

```
G3=m3*g; % N
```

```
G4=m4*g; % N
```

```
% Rovnice rovnováhy
```

```
r1=Rx1+N1*cos(alfa)==0;
```

```
r2=Ry1-0.44*G1-N1*sin(alfa)==0;
```

```
r3=-N1*cos(alfa)+N2*cos(beta)==0;
```

```
r4=-0.56*G1-0.43*G2+N1*sin(alfa)+N2*sin(beta)==0;
```

```
r5=Rx3-N2*cos(beta)+N3*cos(gama)==0;
```

```
r6=Ry3-0.57*G2-0.5*G3-N2*sin(beta)-N3*sin(gama)==0;
```

```
r7=N4+0.5*G3*sin(delta)+0.17*G4*sin(delta)-N3*cos(delta-gama)==0;
```

```
r8=R4-0.5*G3*cos(delta)-0.17*G4*cos(delta)-N3*sin(delta-gama)==0;
```

```
r9=-N4+0.83*G4*sin(delta)==0;
```

```
r10=R5-0.83*G4*cos(delta)==0;
```

```
% Výpočet normálových sil a reakcí
```

```
solution=solve([r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7 r8 r9 r10], [N1 N2 N3 N4 Rx1 Ry1 Rx3 Ry3 R4 R5]);
```

% Vypsání hodnot normálových a reakčních sil

```
N1=vpa(solution.N1,5), N2=vpa(solution.N2,5), N3=vpa(solution.N3,5)
N4=vpa(solution.N4,5), Rx1=vpa(solution.Rx1,5), Ry1=vpa(solution.Ry1,5)
Rx3=vpa(solution.Rx3,5), Ry3=vpa(solution.Ry3,5), R4=vpa(solution.R4,5)
R5=vpa(solution.R5,5)
```

Příklad 31.2: Proveďte řešení úlohy sedícího člověka z kapitoly 31.5. Pro řešení využijte program Matlab.

Dáno: Parametry uvedené v Tab. 31.2 a na Obr. 31.5, Obr. 31.6, Obr. 31.11 a Obr. 31.12.

Základní informace o sw Matlab jsou uvedeny v referenci [6] <https://cs.wikipedia.org/wiki/MATLAB>.

Script programu Matlab (m-file) je uveden v následujícím textu.

```
close all, clear all, clc
```

```
% Neznámé
```

```
syms N1 N2 N3 N4 Rx1 Ry1 Rx3 Ry3 R4 R5 z1 z2 z3 z4 z5 z6 z7 z8
```

```
% Vstupní hodnoty
```

```
h=1.8; % m
```

```
m=80; % kg
```

```
g=9.81; % ms-2
```

```
alfa=deg2rad(80); % rad
```

```
beta=deg2rad(10); % rad
```

```
gama=deg2rad(70); % rad
```

```
delta=deg2rad(75); % rad
```

```
% Výpočet parametrů segmentů
```

```
% Délky segmentů
```

```
L1=0.285*h; % m
```

```
L2=0.245*h; % m
```

```
L3=0.24*h; % m
```

```
L4=0.165*h; % m
```

```
% Hmotnosti segmentů
```

```
m1=0.124*m; % kg
```

```
m2=0.248*m; % kg
```

```
m3=0.4*m; % kg
```

```
m4=0.228*m; % kg
```

```
% Tíhové síly
```

```
G1=m1*g; % N
```

```
G2=m2*g; % N
```

```
G3=m3*g; % N
```

```
G4=m4*g; % N
```

```
% Rovnice rovnováhy
```

```
r1=Rx1+N1*cos(alfa)==0;
```

```
r2=Ry1-0.44*G1-N1*sin(alfa)==0;
```

```
r3=-N1*cos(alfa)+N2*cos(beta)==0;
```

```
r4=-0.56*G1-0.43*G2+N1*sin(alfa)+N2*sin(beta)==0;
```

```
r5=Rx3-N2*cos(beta)+N3*cos(gama)==0;
```

```
r6=Ry3-0.57*G2-0.5*G3-N2*sin(beta)-N3*sin(gama)==0;
```



```

r7=N4+0.5*G3*sin(delta)+0.17*G4*sin(delta)-N3*cos(delta-gama)==0;
r8=R4-0.5*G3*cos(delta)-0.17*G4*cos(delta)-N3*sin(delta-gama)==0;
r9=-N4+0.83*G4*sin(delta)==0;
r10=R5-0.83*G4*cos(delta)==0;

% Výpočet normálových sil a reakcí
solution=solve([r1 r2 r3 r4 r5 r6 r7 r8 r9 r10], [N1 N2 N3 N4 Rx1 Ry1 Rx3 Ry3 R4
R5]);

% Vypsání hodnot normálových a reakčních sil
N1=vpa(solution.N1,5); N2=vpa(solution.N2,5); N3=vpa(solution.N3,5);
N4=vpa(solution.N4,5); Rx1=vpa(solution.Rx1,5); Ry1=vpa(solution.Ry1,5);
Rx3=vpa(solution.Rx3,5); Ry3=vpa(solution.Ry3,5); R4=vpa(solution.R4,5);
R5=vpa(solution.R5,5);

%-----
% Konec řešení Příkladu 31.1

%-----
% Pokračování řešení příkladu 31.2

% Výpočet vnitřních statických účinků pro řešení s uvažováním normálových a
% posouvajících sil a ohybových momentů
N11=-N1-0.44*G1*sin(alfa);
N12=N11+G1*sin(alfa);
T11=-0.44*G1*cos(alfa);
T12=T11+G1*cos(alfa);
M11(z1)=0.44*G1*cos(alfa)*z1;
M12(z2)=0.44*G1*cos(alfa)*(0.56*L1+z2)-G1*cos(alfa)*z2;
N21=-N2+0.43*G2*sin(beta);
N22=N21-G2*sin(beta);
T21=-0.43*G2*cos(beta);
T22=T21+G2*cos(beta);
M21(z3)=0.43*G2*cos(beta)*z3;
M22(z4)=0.43*G2*cos(beta)*(0.57*L2+z4)-G2*cos(beta)*z4;
N31=N3-0.5*G3*sin(gama);
N32=N31+G3*sin(gama);
T31=0.5*G3*cos(gama);
T32=-T31;
M31(z5)=0.5*G3*cos(gama)*z5;
M32(z6)=0.5*G3*cos(gama)*(0.5*L3+z6)-G3*cos(gama)*z6;
N41=N4-0.83*G4*sin(delta);
N42=N41+G4*sin(delta);
T41=0.83*G4*cos(delta);
T42=T41-G4*cos(delta);
M41(z7)=0.83*G4*cos(delta)*z7;
M42(z8)=0.83*G4*cos(delta)*(0.17*L4+z8)-G4*cos(delta)*z8;

% Vyčíslení jednotlivých normálových a posouvajících sil a maxim ohybových
% momentů
N11=vpa(N11,5), N12=vpa(N12,5), N21=vpa(N21,5), N22=vpa(N22,5), N31=vpa(N31,5),
N32=vpa(N32,5), N41=vpa(N41,5), N42=vpa(N42,5), T11=vpa(T11,5), T12=vpa(T12,5),
T21=vpa(T21,5), T22=vpa(T22,5), T31=vpa(T31,5), T32=vpa(T32,5), T41=vpa(T41,5),
T42=vpa(T42,5), Momax1=vpa(M11(0.56*L1),5), Momax2=vpa(M21(0.57*L2),5),
Momax3=vpa(M31(0.5*L3),5), Momax4=vpa(M41(0.17*L4),5)

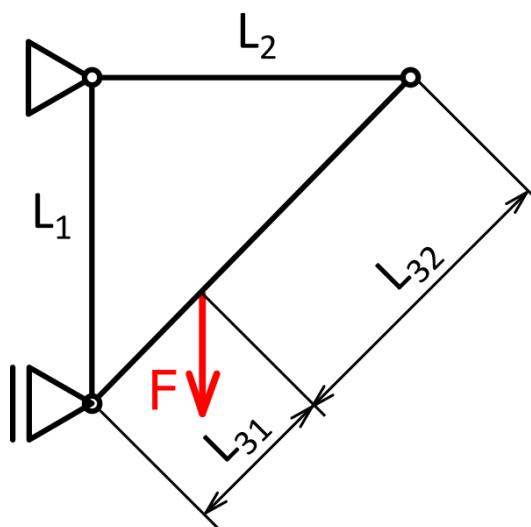
```

31.8 Otázky k pochopení látky

1. Vysvětlete rozdíl mezi pojmy stochastický a deterministický výpočet?
2. Proč je vhodné zkoumat sedícího člověka?
3. Co je (bio)kinematická dvojice?
4. Co je (bio)kinematický řetězec?
5. Co je styčník?

31.9 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Odvoďte rozdělení mimostýčné zátěžné síly do styčníků dle Obr. 31.47.



Obr. 31.47 Jednoduchá prutová soustava.

2. Měli byste dokázat odvodit rovnice v Kapitole 31.4.

31.10 Reference ke kapitole 31

- [1] Frydrýšek, K., *Biomechanika 1*, ISBN 978-80-248-4263-9, monograph, VSB – Technical University of Ostrava, Faculty of Mechanical Engineering, Ostrava, Czech Republic, 2019, pp. 1-461.
- [2] Čepica, D., *Biomechanika – Stochastické zatěžování člověka*, Ostrava, 2019. Bakalářská práce. VŠB – Technická univerzita Ostrava, Fakulta strojní, Katedra aplikované mechaniky. Vedoucí práce prof. Ing. Karel Frydrýšek, Ph.D., ING-PAED IGIP.
- [3] Frydrýšek, K., Čepica, D., Halo, T., Stochastic Loading of a Sitting Human. *Strojnícky časopis – Journal of Mechanical Engineering*, 2019, 69, 97–110, doi: <https://www.doi.org/10.2478/scjme-2019-0020>.
- [4] Skolióza – Wikipedie (wikipedia.org), <https://cs.wikipedia.org/wiki/Skoli%C3%B3za>.
- [5] Styčník – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/Sty%C4%8Dn%C3%ADk>.
- [6] MATLAB – Wikipedie (wikipedia.org) <https://cs.wikipedia.org/wiki/MATLAB>.

32. IMPLANTÁT OD NÁVRHU AŽ K POUŽITÍ

Tato kapitola je věnována problematice vývoje zdravotnických prostředků a jejich uvedení na trh. Zaměřuje se zejména na oblast traumatologických implantátů, nicméně v obecné rovině poskytuje základní ucelený přehled pro celou oblast zdravotnických prostředků od chirurgických nůžek až po zařízení pro magnetickou rezonanci, dialýzu či robota pro chirurgii. Kapitola vysvětluje aktuální souvislosti a skutečnosti související s vývojem zdravotnických prostředků na trhu Evropské Unie.

Autory této kapitoly jsou Oldřich Pospíchal, Miroslav Bureš, Miroslav Havlíček a Karel Frydrýšek.

32.1 Úvod

Proces návrhu a vývoje implantátů je velmi přísně regulován normativními a legislativními požadavky tak, aby byla zajištěna nejen bezpečnost pacientů, ale i zdravotnických pracovníků (lékařů, zdravotních sester, pracovníků provádějících sterilizaci atp.).

Legislativní požadavky dneška jsou úzce spjaty se skandálem s prsními implantáty francouzské firmy **Poly Implant Prothèse**³²⁵, kdy výrobce ve snaze snížit náklady na výrobu, vyráběl **prsní implantáty**³²⁶ z průmyslového silikonu (který nebyl schválen pro lékařské použití a obsahoval nežádoucí příměsi). Implantáty z průmyslového silikonu měly poloviční životnost, způsobovaly ve zvýšené míře záněty, zjizvení a další komplikace. V roce 2011 bylo

³²⁵ **Poly Implant Prothèse (PIP)** založil jako francouzskou společnost v roce 1991 francouzský řezník a lékařský obchodní zástupce **Jean-Claude Mas**. Společnost byla preventivně zlikvidována v roce 2010 po odhalení, že od roku 2001 nelegálně vyráběla a prodávala prsní implantáty vyrobené z levnějšího průmyslového silikonu, namísto předepsaného zdravotně nezávadného a schváleného lékařského silikonu. V roce 2013 byl za svoje činy ve Francii poslán do vězení na čtyři roky Jean-Claude Mas.



Logo zaniklé společnosti Poly Implant Prothèse (Zdroj obrázku [1])

[https://en.wikipedia.org/wiki/Poly_Implant_Proth%C3%A8se#/media/File:Poly_Implants_Proth%C3%A8ses_\(logo\).svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Poly_Implant_Proth%C3%A8se#/media/File:Poly_Implants_Proth%C3%A8ses_(logo).svg).

³²⁶ **Prsní implantáty**, tj. plastickou operací aplikovaný implantát do prsou. Používají se za účelem zkrášlení nebo rekonstrukcí po úrazech či nemocech.

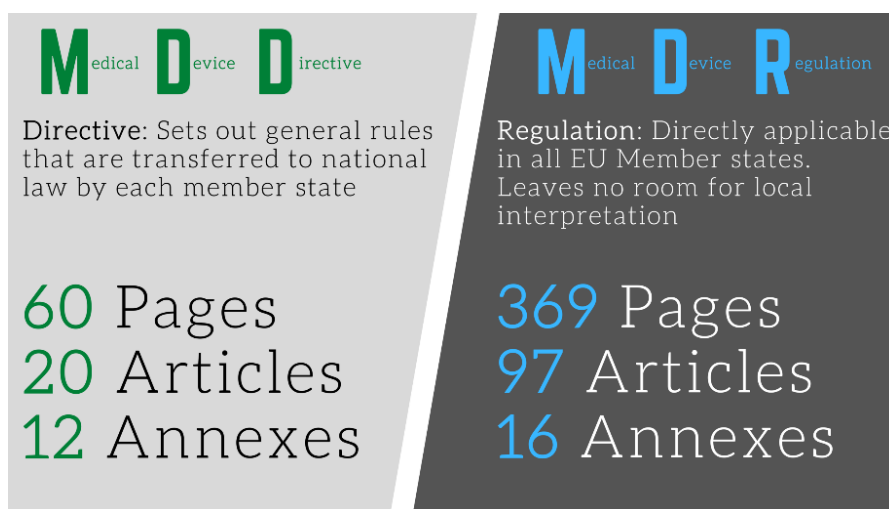


Silikonový prsní implantát (Zdroj obrázku [2])

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breast_implants_in_hand_01.jpg.

jen ve Francii 30000 pacientkám v této souvislosti doporučeno preventivní odstranění implantátů. Blíže např. [3].

V důsledku výše zmíněného skandálu, Evropská komise úplně přepracovala předpisy pro zdravotnické prostředky s cílem zajistit vysokou úroveň bezpečnosti a obnovit důvěru veřejnosti. Dne 5. dubna 2017 vydala nové Nařízení Evropského parlamentu a rady o zdravotnických prostředcích, viz [4], které je právně závazné a vymahatelné pro všechny výrobce, distributory a dovozce zdravotnických prostředků v Evropské unii a které významnou měrou zpřísnilo podmínky pro uvádění zdravotnických prostředků na trh. Nárůst legislativních požadavků je znázorněn na Obr. 32.1, kde na levé straně jsou legislativní požadavky platné do roku 2017 (MDD – Medical Device Directive) a na straně pravé požadavky aktuální (MDR – Medical Device Regulation).



Obr. 32.1 Rozsah regulačních požadavků z roku 1993 (MDD) a z roku 2017 (MDR), viz [5].

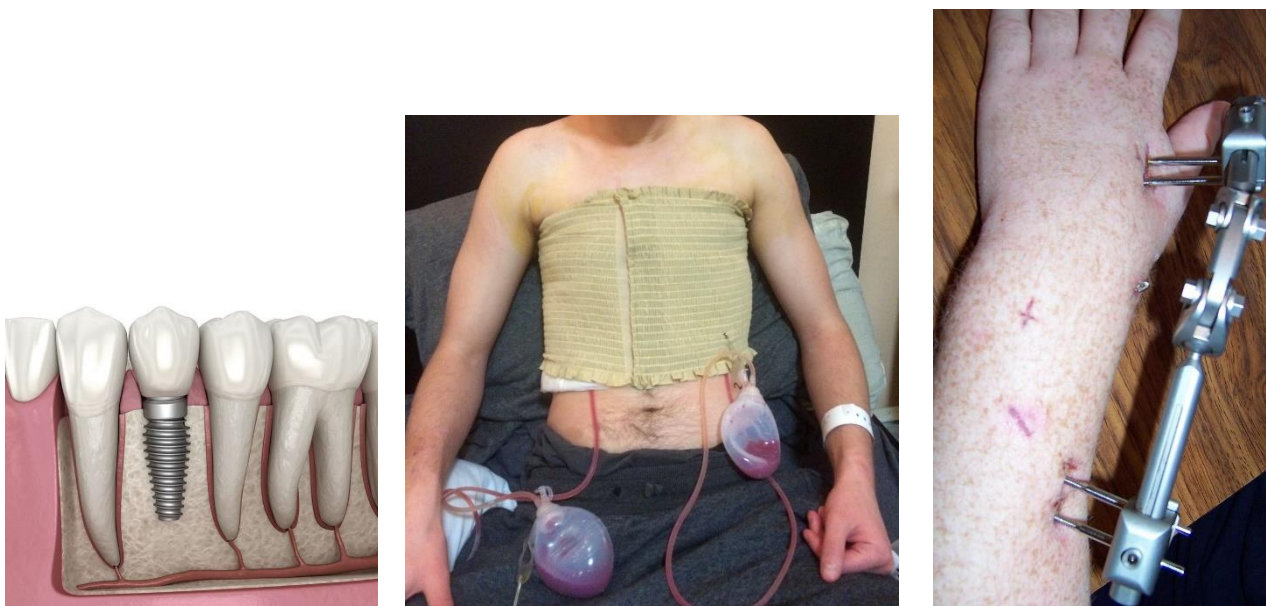
Návrh a vývoj implantátů se tak rázem stal jedním z nejvíce regulovaných a kontrolovaných odvětví v Evropské unii. Při vývoji je kladen nejvyšší důraz na prokázání klinické bezpečnosti a výkonu implantátu ještě před jeho uvedením na trh, a právě této problematice jsou věnovány následující odstavce.

32.2 Implantát a implantologie

Věda zabývající se implantáty se nazývá **implantologie**³²⁷, což je lékařský, inženýrský, biomechanický či biomedicínský vědní obor. Je zaměřen na výzkum, vývoj, testování, výrobu a aplikaci implantátů.

Implantát je zdravotnický prostředek vložený do organismu, a to za účelem nahrazení chybějící či poškozené biologické tkáně či struktury, k vylepšení stávající biologické tkáně či struktury, nebo případně z estetických důvodů. Vše za účelem zlepšení zdravotního či psychického stavu nebo nových možností pacienta/klienta. Může být také použitý pro lidi, zvířata a rostliny. Příklady lidských implantátů jsou uvedeny na Obr. 32.2 a také na Obr. 19.3, 22.11, 22.13, 25.2, 25.3 a 29.9.

³²⁷ Anglicky **Implantology**.



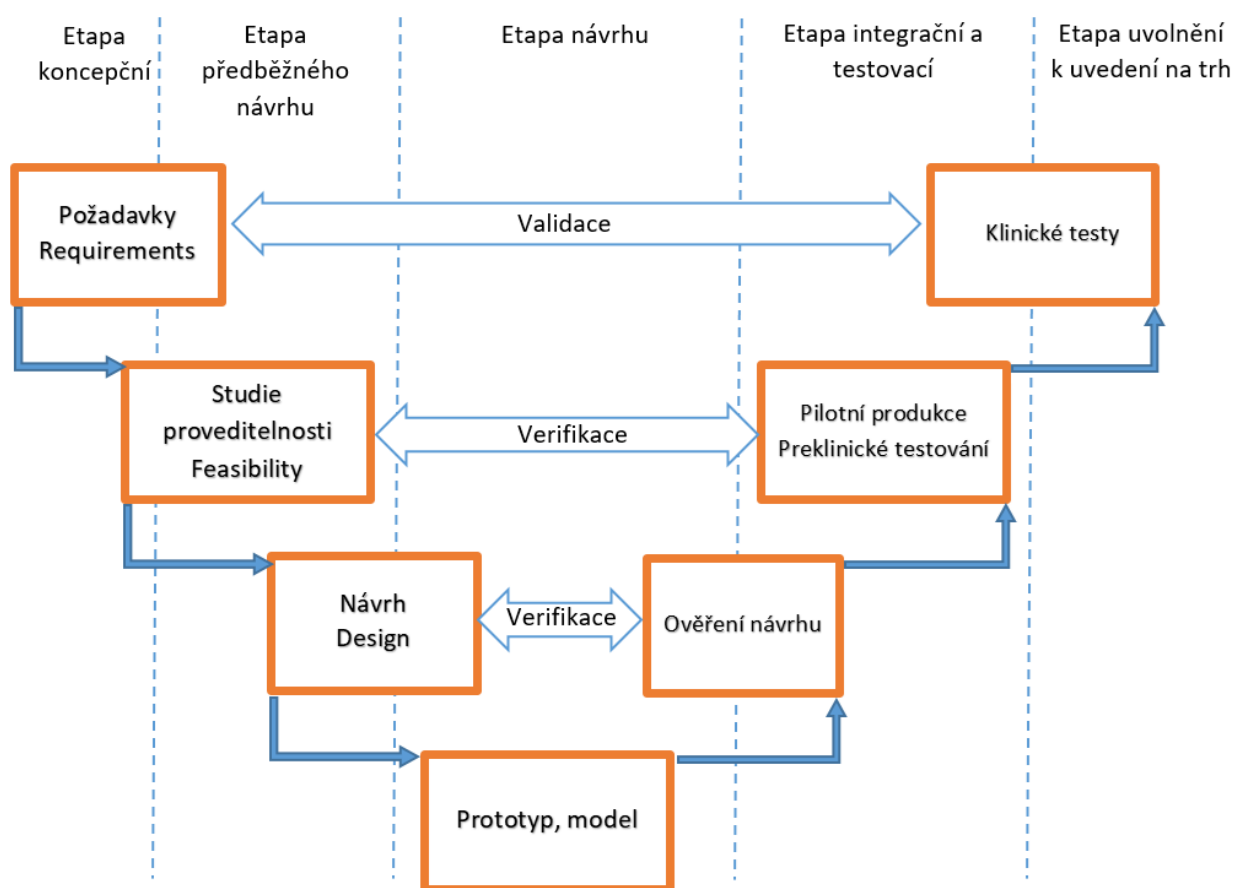
Obr. 32.2 Příklady implantátů (a) zubní implantát, (b) drenáž, (c) unilaterální zevní fixátor pro osteosyntézu (zdroj <https://cs.wikipedia.org/wiki/Implantologie>).

Základní členění implantátů je na implantáty dočasné (umístěné v těle po většinou předem definovaný čas) a implantáty trvalé.

32.3 Systém managementu kvality

Aby výrobce vyhověl předpisům, musí mít zaveden systém řízení kvality, který zajistí, že celý proces návrhu a vývoje je řízen a plánován systematickým a opakovatelným způsobem. Evropští výrobci primárně používají pro zavedení systému řízení kvality normu ISO 13485, viz [6]. Plnění požadavků této normy musí výrobce prokázat certifikačnímu orgánu a následně je mu vydán certifikát, který ho opravňuje k činnostem v oblasti návrhu, vývoje a výroby zdravotnických prostředků.

K prokázání shody s legislativními požadavky, musí výrobce dokumentovat celý průběh návrhu a vývoje v technické dokumentaci. Proces vývoje implantátu je znázorněn na Obr. 32.3. Všechny etapy vývoje musí být přezkoumány a musí být ověřeno, že průběžné výstupy vývoje jsou ve shodě se vstupními požadavky.



Obr. 32.3 Schéma procesu vývoje implantátu nebo jiné zdravotní pomůcky.

Je důležité, aby byl proces návrhu a vývoje projektově řízen. Na začátku vývoje musí být stanoveny základní cíle, nutné etapy vývoje a dosažitelné milníky. Stanovení milníků umožňuje systematické posouzení průběhu projektu vývoje vedením, aby bylo zajištěno, že budou činnosti dokončeny včas a v rámci rozpočtu. Pravidelné milníky a projektová jednání pomáhají identifikovat problémy v průběhu projektu a umožňují přijmout včasná opatření ke snížení rizik, která by mohla vést k selhání projektu, v horším případě k ohrožení bezpečnosti pacienta. V projektu musí být identifikovány lidské a finanční zdroje, nutné k úspěšné realizaci.

32.4 Etapa koncepční

Nápady na nové nebo inovované implantáty přichází zejména ze strany chirurgů, biomedicínských inženýrů či z výzkumných pracovišť. Velmi často souvisí s technologickým pokrokem, příkladem může být technologie 3D tisku, která přinesla nové příležitosti v oblasti personifikovaných implantátů (Obr. 32.4).



Obr. 32.4 Náhrada dolní čelisti vyrobená 3D tiskem [7].

Při zahájení projektů vývoje musí být definovány základní cíle, určený účel a indikace implantátu. Musí být vytvořen takový interdisciplinární tým, který pomůže správně korigovat vývoj produktu a zajistit takový výstup, který bude splňovat všechny požadované funkce při zohlednění všech aspektů bezpečnosti a výkonu.

Proveditelnost

Na počátku vývoje se musí detailně analyzovat všechny vstupní požadavky a provést studii proveditelnosti. Základními aspekty studie jsou:

- **Požadavky trhu**

Z pohledu výrobce není komerčně životaschopné, navrhovat implantát, který nemá dostatečný počet pacientů nebo je trh omezen konkurencí již zavedených implantátů. Je třeba analyzovat potenciál trhu, podobné implantáty vyráběné konkurencí a potenciální tržní hodnotu. Vzhledem k velmi vysokým nákladům na vývoj implantátu je analýza trhu jedním z určujících aspektů, které mají dominantní vliv na vývojové aktivity výrobců.

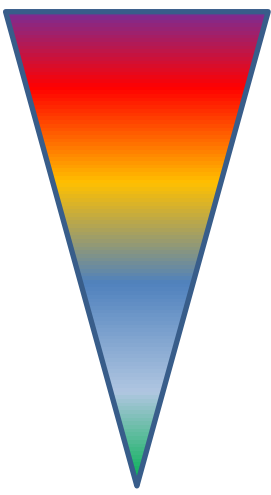
Zároveň musí být provedeny patentové rešerše a rešerše duševního vlastnictví, aby se při vývoji zabránilo střetu s vlastnickými právy druhých osob, případně aby se zjistilo, zda lze vlastní design chránit.

- **Regulační požadavky**

Zdravotnické prostředky obecně musí mít regulační schválení před uvedením na trh. Existuje celá řada národních či mezinárodně dohodnutých požadavků, které musí zdravotnické prostředky splňovat. Je třeba mít na paměti, že jsou rozdíly mezi požadavky nutnými pro uvedení na trh v jednotlivých zemích či společných trzích. Například, požadavky evropské komise nejsou harmonizovány s požadavky **FDA** (zkratka amerického Úřadu pro kontrolu potravin a léčiv – **Food and Drug Administration**) ve Spojených státech.

Rozsah regulačních požadavků je přímo závislý na úrovni rizika zdravotnického prostředku spojeného s jeho použitím. Do nejvyšší třídy rizika III patří například kardiostimulátory, jejíž chybná funkce by mohla způsobit téměř okamžitou smrt pacienta. Traumatologické implantáty jsou ve třídě rizika IIb, chybná funkce implantátu může vést k výraznému zhoršení zdravotního stavu pacienta. Nejprísnější legislativní požadavky jsou kladeny na zdravotnické prostředky třídy rizika III. V Tab. 32.1 je uveden základní klasifikační systém s příklady.

Tab. 32.1 Třídy rizika zdravotnických prostředků dle evropské legislativy.

Třída rizika	Riziko	Příklad	Úroveň rizika
III	Vysoké	Kardiostimulátor Totální endoprotéza	
IIb	Středně vysoké	Plicní ventilátor Nitrodřeňový hřeb	
IIa	Střední	Kostní vrták Odsávací kanyla	
Is	Nízké	třída I, sterilní Jednorázové nůžky	
Im	Nízké	třída I, s měřicí funkcí. Teploměr	
I	Nízké	Chirurgické nástroje, nůžky, svorky, pinzety aj.	

Pouze u třídy rizika I může výrobce posoudit shodu s legislativními požadavky sám a vystavit prohlášení o shodě s těmito požadavky. U všech vyšších tříd rizika musí shodu posoudit oznámený subjekt (notifikovaná osoba) a vystavit certifikát o shodě. Oznámené subjekty jsou osoby autorizované evropskou komisí k posuzování shody s příslušným právním předpisem.

Mezi regulační požadavky patří i obecné standardy (normy) úrovně 1, které platí pro všechny zdravotnické prostředky, zvláštní standardy úrovně 2, které platí pro konkrétní skupinu prostředků a specifické standardy úrovně 3, které platí pro konkrétní modely. Ne všechny normy jsou povinné, jejich dodržování však velmi urychluje proces certifikace. V Tab. 32.2 jsou uvedeny příklady norem aplikovaných pro návrh a vývoj kostních drátů, kde úroveň 1 je úrovní nejvyšší.

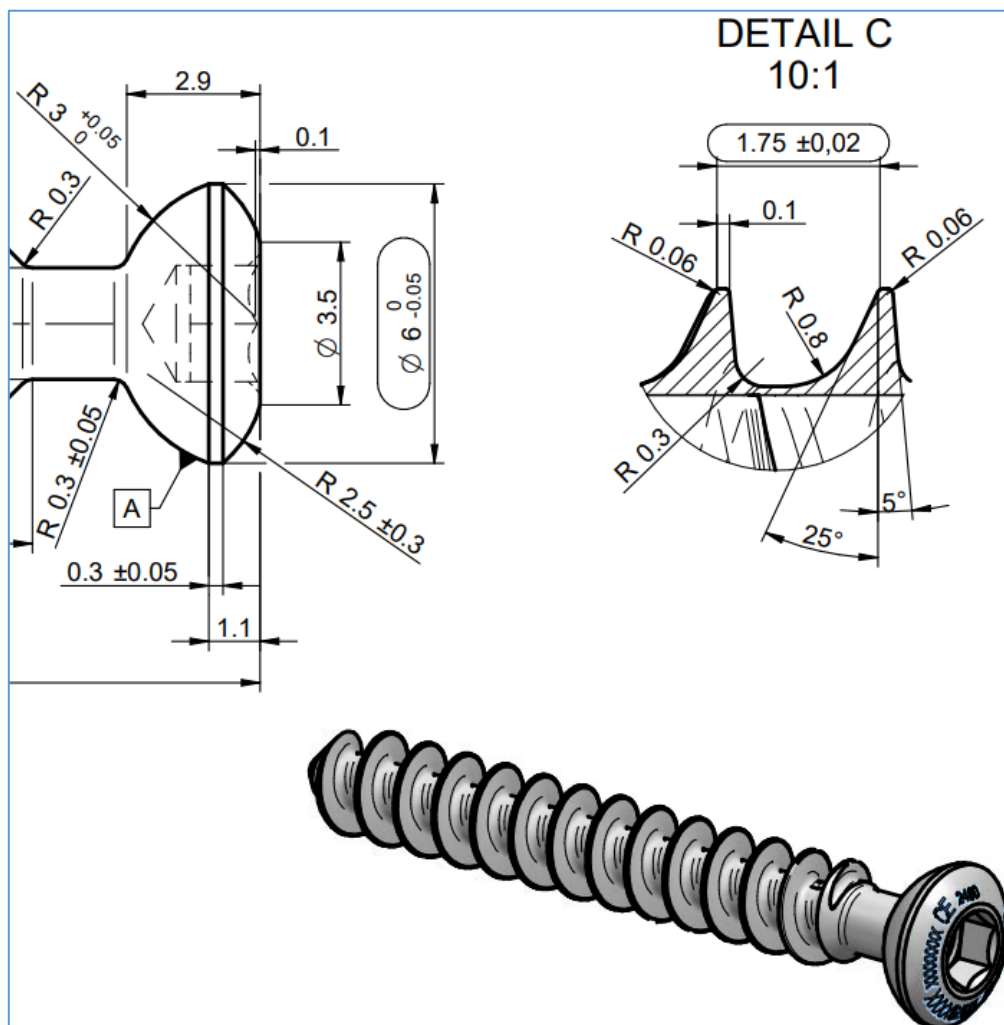
Tab. 32.2 Příklady norem pro vývoj implantátů.

Úroveň	Označení normy	Název normy	Komentář
1	EN ISO 14630	Neaktivní chirurgické implantáty	Obecné požadavky pro všechny neaktivní chirurgické implantáty
2	EN ISO 14602	Neaktivní chirurgické implantáty – Implantáty pro osteosyntézu	Zvláštní požadavky pro implantáty pro osteosyntézu
3	ISO 5838-3	Chirurgické implantáty – Kostní pruty a dráty	Specifické požadavky pro pruty a dráty

- **Požadavky na design**

Produktová specifikace je nezbytná pro návrh zdravotnického prostředku. Musí přesně stanovit, co se od návrhu vyžaduje. Každá etapa a milník vývoje ověřuje, zda je postup prací ve shodě s počátečními požadavky. Mezi požadavky na design patří i normy. Na počátku vývoje je důležité provést důkladnou rešerši všech požadavků na produkt (ať

již klinických, odborných, obchodních či normativních), aby bylo zajištěno, že všechny potřebné funkce výsledného produktu budou včas identifikovány. Na Obr. 32.5 je výřez z výkresu kostní šroubu, geometrie a rozměry závitu jsou stanoveny normou ISO 5835.

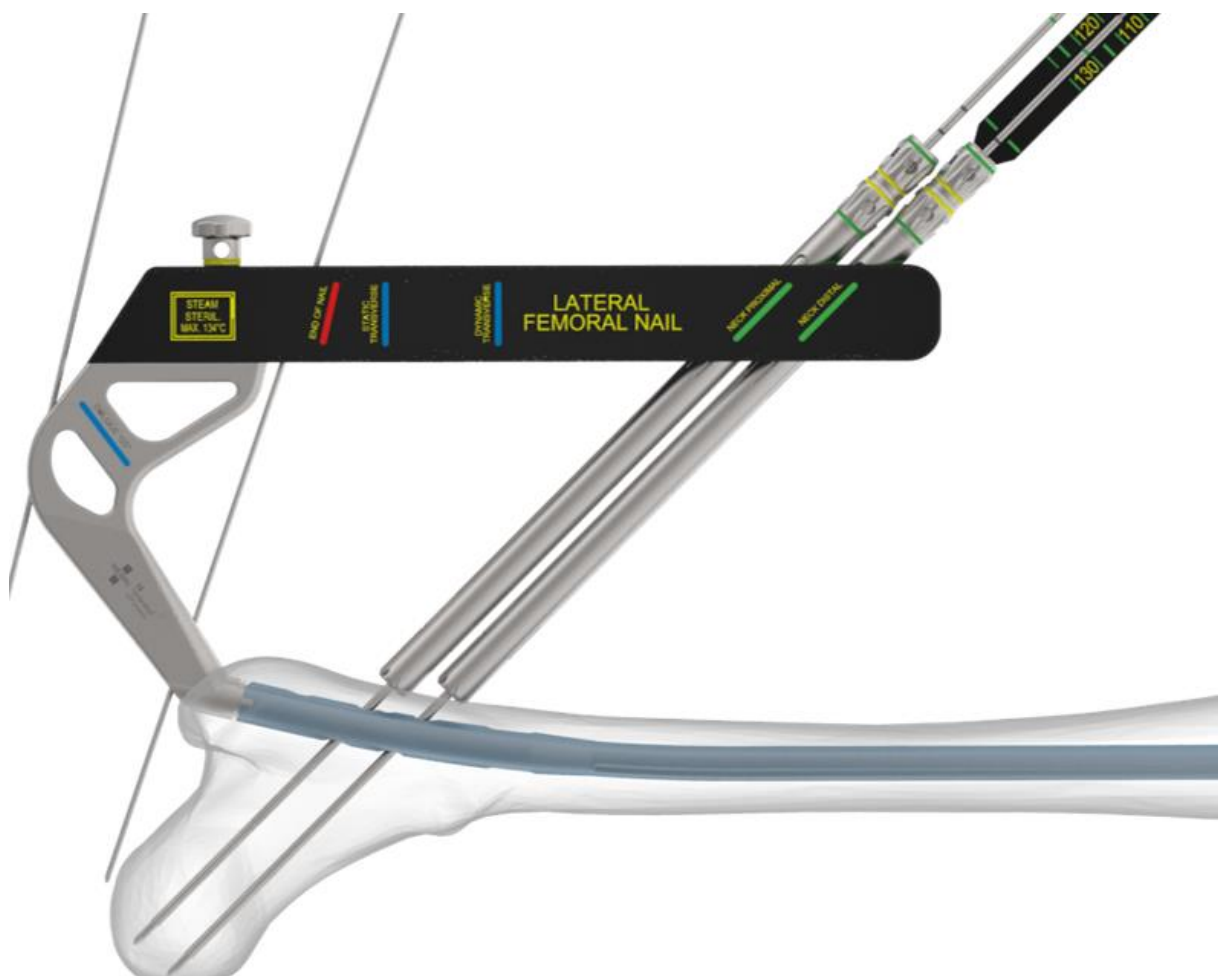


Obr. 32.5 Část výkresu kostní šroubu s normovaným závitem (zdroj MEDIN a.s.).

Pro zavedení většiny implantátů je nutné použít chirurgické nástroje navržené pro zavedení konkrétního implantátu od konkrétního výrobce. Na počátku vývoje je důležité zvažovat i specifikace těchto nástrojů, protože musí být zajištěna jejich kompatibilita s implantátem. V mnoha případech je složitost a doba návrhu chirurgických nástrojů větší než u vlastního implantátu. Na Obr. 32.6 je graficky znázorněn femorální hřeb proximálně a anterográdně³²⁸ zavedený do nitrodřeňové dutiny³²⁹ s připojeným cíličem, který je nutný pro zavedení šroubů do krčku femuru.

³²⁸ **Anterográdní** směr označuje v anatomii směr vpřed či přední směr, tj. směr od těla nebo od určitého bodu na těle. Opakem je **retrográdní** směr.

³²⁹ **Nitrodřeňové dutina** = latinsky **cavitas medullaris**.



Obr. 32.6 Systém femorálního laterálního hřebu s cíličem, vodícími pouzdry a hloubkoměrem při osteosyntéze (zdroj MEDIN a.s.).

Požadavky na konstrukci implantátu dále zahrnují:

- určený účel použití,
- designové atributy,
- materiál,
- technologii výroby,
- způsob sterilizace,
- obal,
- informace pro uživatele atp.

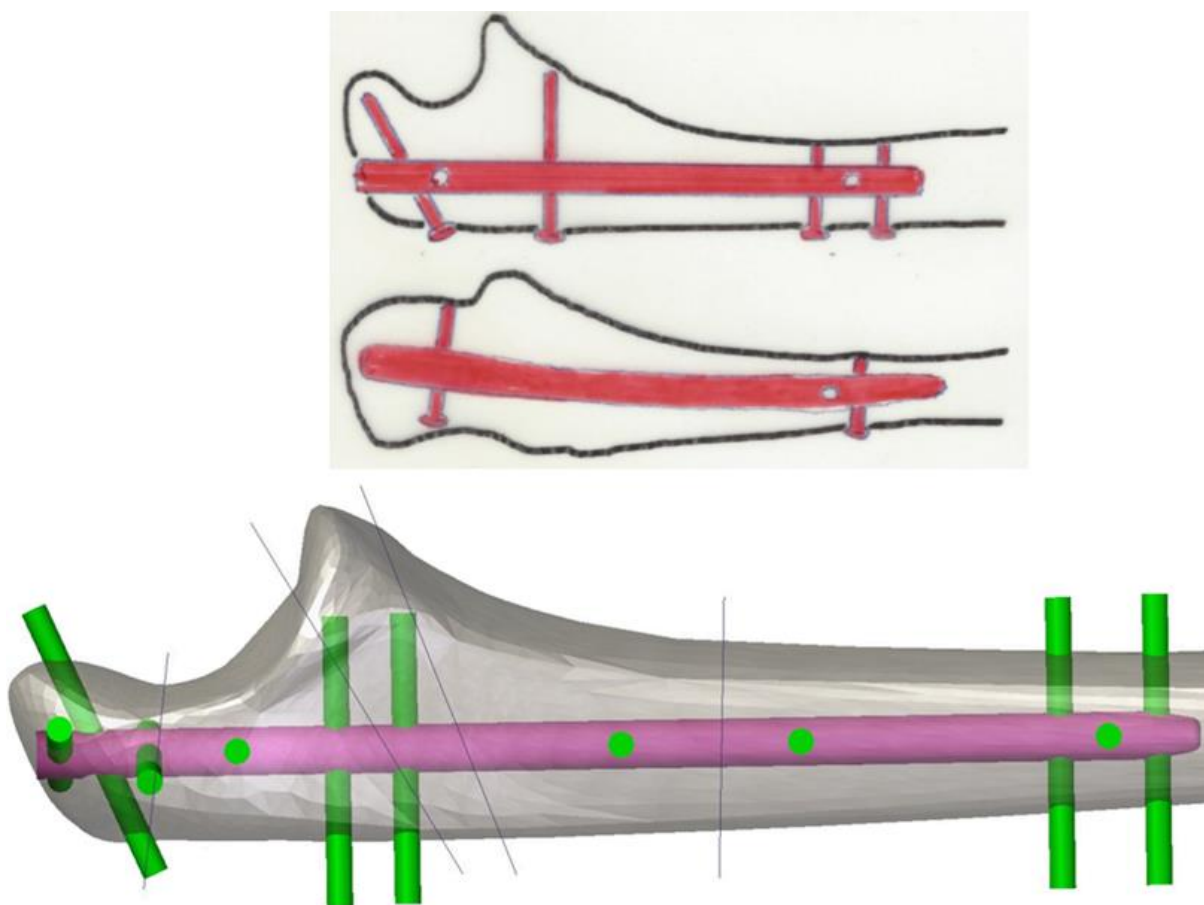
Je třeba zmínit, že požadavky na konstrukci jednotlivých implantátů pro podobný určený účel se mohou lišit. Např. pro totální endoprotézu kyčelního kloubu je požadavek životnosti 25 let, pro femorální nitrodřeňový hřeb je požadavek zajistit stabilitu zlomeniny krčku (collum femoris) po dobu hojení, což je doba v řádu několika týdnů.

32.5 Etapy designu

Koncepční design

V počáteční fázi návrhu designu je prostor pro generování mnoha řešení potenciálně splňující požadavky návrhu. Cílem je vytvořit co nejvíce variant. Tato fáze zahrnuje jednoduché

náčrty, grafické skici, počítačové 3D CAD modely, analytické výpočty apod. Důležitou součástí jsou konzultace s lékaři, strojními inženýry, biomechaniky, dodavateli technologií a odborným zdravotnickým personálem. Na Obr. 32.7 jsou dva způsoby tvorby koncepčního designu.



Obr. 32.7 Ruční skica ulnárního hřebu nahoře a 3D počítačový CAD návrh dole (zdroj MEDIN a.s.).

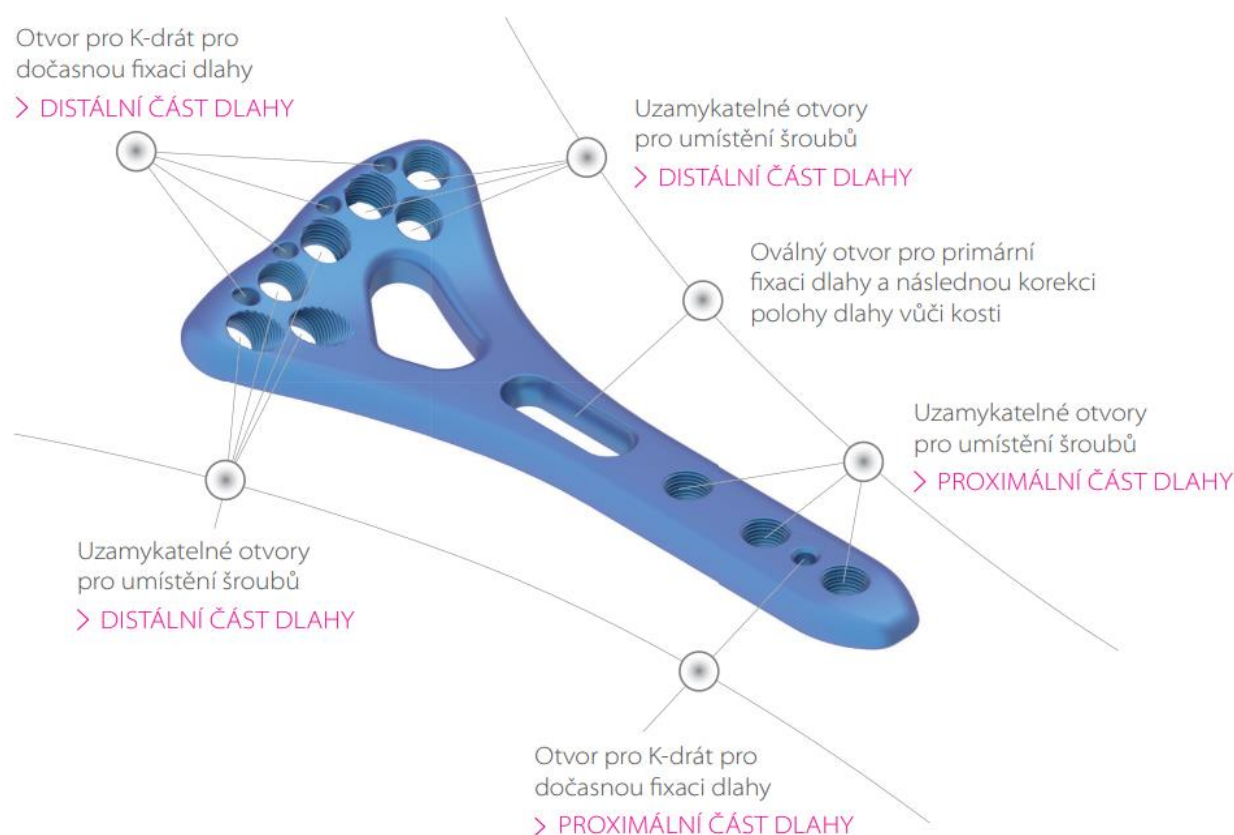
Koncepční návrhy by měly být hodnoceny celým desingovým týmem, aby byl pro detailní design zvolen ten nejvhodnější koncept k vývoji.

Detailní design

Detailní návrh designu implantátu zahrnuje především:

- konstrukční modely,
- specifikace materiálu, včetně chemických a mechanických vlastností,
- specifikace finálních povrchových úprav,
- konstruční výkresy a kusovníky,
- analýzy toleračních polí pro zajištění kompatibility,
- specifikace balení,
- požadavky na kontrolu a testování,
- funkční charakteristiky.

Na Obr. 32.8 je znázorněn detailní design implantátu ve fázi návrhu.



Obr. 32.8 Vývojový design dlahy pro zlomeniny distálního rádia (zdroj MEDIN a.s.).

32.6 Ověření návrhu

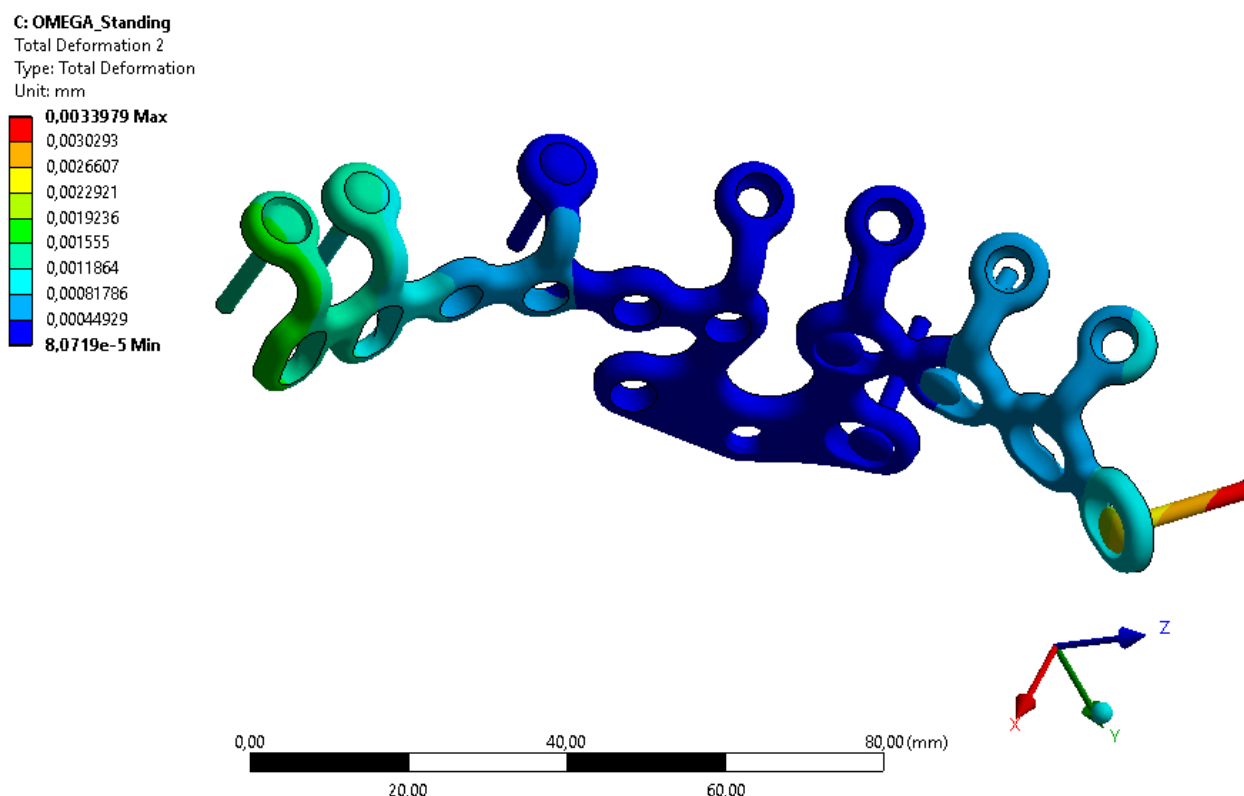
Ověření návrhu (verifikace) je potvrzením toho, že implantát splňuje požadavky definované na počátku vývoje. V podstatě jde o odpověď na otázky, zda je postupováno správně a zda nedošlo v průběhu návrhu k chybě.

Metody ověření mohou zahrnovat:

- **pevnostní analýzy metodou konečných prvků,**
- **analýzy rizik,**
- **výrobu a testování prototypů.**

Analýza metodou konečných prvků

Analýza konečných prvků je široce používaná právě při vývoji implantátů a používá se pro ověření, zda bude mít navrhovaný design dostatečné pevnostní charakteristiky, aby vydržel podmínky statického a dynamického zatěžování v lidském těle. Tento přístup umožňuje snížit náklady na výrobu a testování prototypů a výrazně zkracuje dobu vývoje. Na Obr. 32.9 je výstup z výpočtové analýzy zatěžování pánevní dlahy „OMEGA“ vytvořený v programu Ansys.



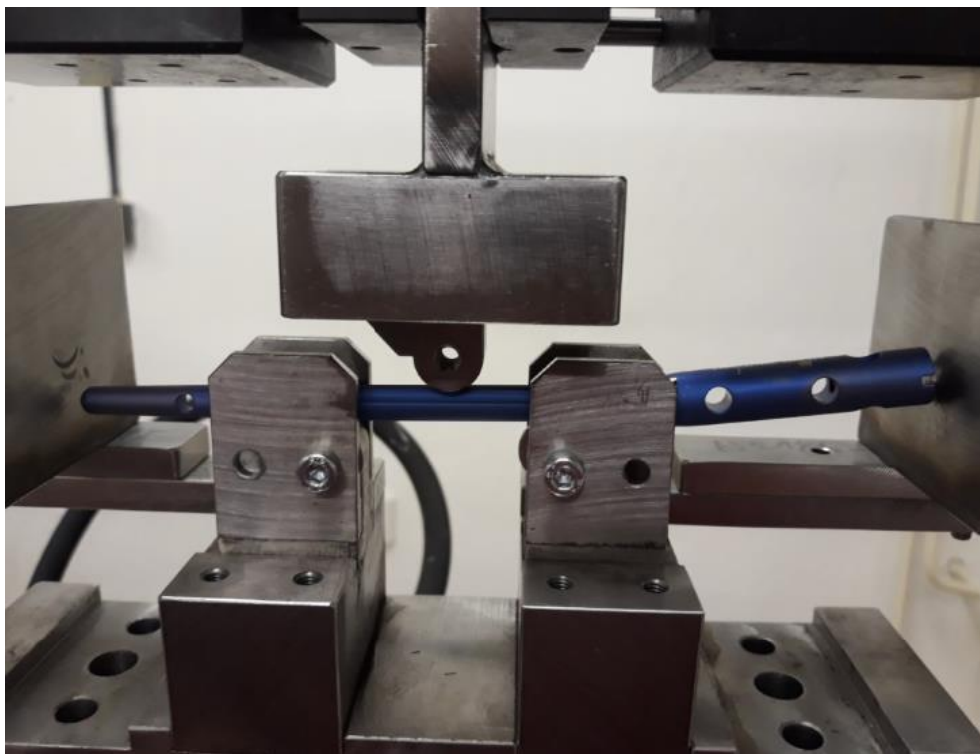
Obr. 32.9 Analýza výsledných posunutí metodou konečných prvků – zatížená dlaho pánevní „OMEGA“ (zdroj MEDIN a.s., software Ansys).

Analýza rizik

Všechny zdravotnické prostředky musí být navrženy a vyrobeny tak, aby byla zajištěna maximální bezpečnost pacientů a zdravotnických pracovníků. Výrobci musí snížit na nejnížší možnou úroveň všechna identifikovaná rizika. Všechna zbytková rizika musí být vyvážena přínosem (benefitem) pro pacienta, jinak nemůže být prostředek uveden na trh. Posuzována musí být rizika aplikační (rizika plynoucí z použití), designová (rizika designu) a rizika procesní (rizika výrobní, dodavatelská, skladovací). V průběhu celého životního cyklu zdravotnického prostředků musí výrobci zajistit nepřetržité sledování a vyhodnocování rizik spojených s prostředkem.

Výroba a testování prototypů

Prototypování poskytuje cenná data při ověřování návrhu, pomáhá komunikaci mezi vývojáři a lékaři, umožňuje provádět reálná testování. Na druhou stranu patří mezi časově náročné a nákladné oblasti vývoje implantátu, proto se k prototypové fázi přistupuje až v závěru návrhu designu implantátu. Na obrázku 32.10 je fotografie z testování prototypu tibiálního hřebu.



Obr. 32.10 Testování pevnostních charakteristik prototypu tibiálního hřebu pro osteosyntézu (zdroj MEDIN a.s.).

32.7 Etapa integrační a testovací

Před převedením dokumentace z návrhu a vývoje do sériové výroby je nezbytné zajistit opakovatelnost a spolehlivost výrobních procesů. První výrobní dávky musí být statisticky vyhodnoceny a postupy výroby validovány. Validován rovněž musí být výstup z návrhu a vývoje. **Mezi validace návrhu** a vývoje patří tyto činnosti:

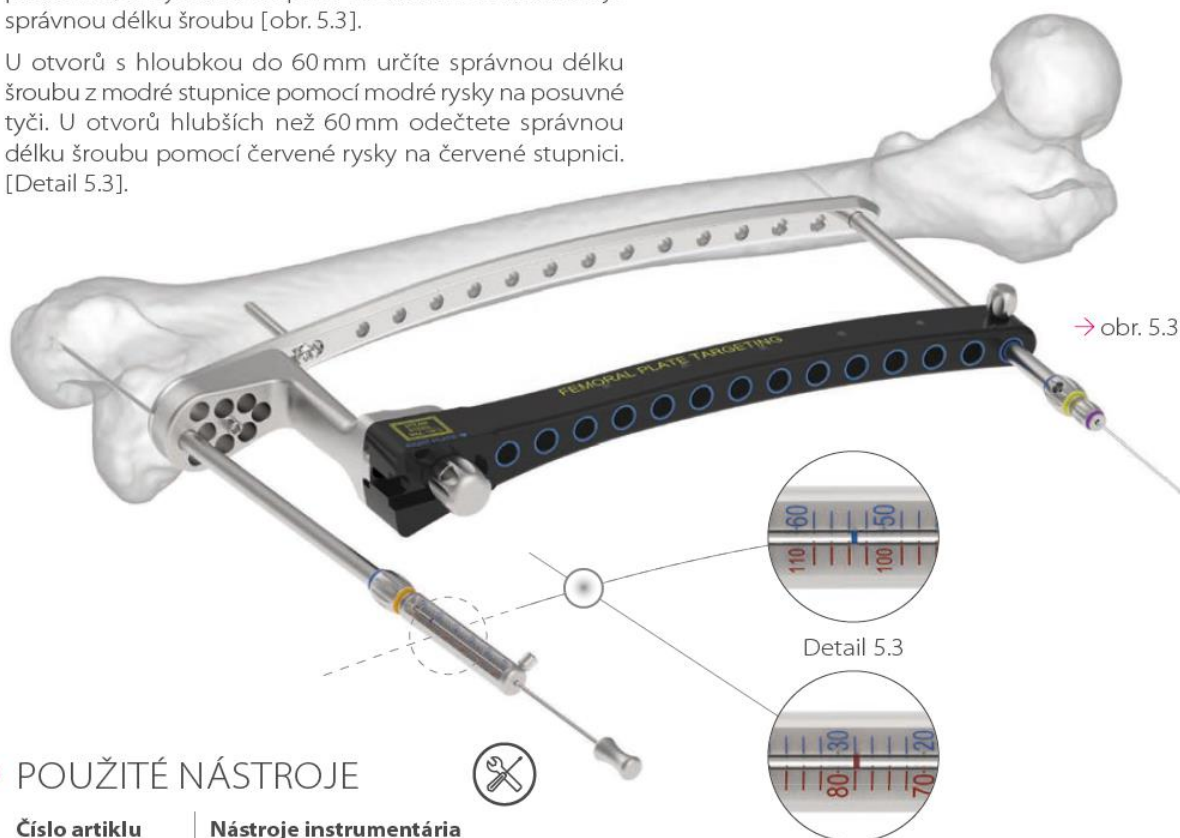
- mechanické testování vzorků z vyrobených dávek,
- validace balení,
- validace sterilizace,
- validace transportních a skladovacích podmínek,
- testy životnosti a skladovatelnosti.

Před uvolněním produktu k sériové výrobě je nutné zajistit, aby byly vypracovány všechny potřebné dokumenty související s implantátem. **Dokumentace pro implantát** zahrnuje minimálně:

- návod k použití,
- operační techniku,
- plán školení chirurgů a zdravotnických pracovníků,
- finální předpisy pro výrobu, značení a balení.

Na obrázku 32.11 je ukázka z operačního postupu, který je finálním výsledkem spolupráce vývojářů a lékařů.

- > Délku šroubu lze změřit i hloubkoměrem pomocí vodícího pouzdra 8/7. Ryska na stupnici hloubkoměru znázorňuje správnou délku šroubu [obr. 5.3].
- > U otvorů s hloubkou do 60 mm určíte správnou délku šroubu z modré stupnice pomocí modré rysky na posuvné tyči. U otvorů hlubších než 60 mm odečtete správnou délku šroubu pomocí červené rysky na červené stupnici. [Detail 5.3].



→ POUŽITÉ NÁSTROJE

Číslo artiklu	Nástroje instrumentária
397 129 69 4785	Hloubkoměr; 2x110 mm

Obr. 32.11 Ukázka z operačního postupu pro dlahu femorální distální pro osteosyntézu (zdroj MEDIN a.s.).

32.8 Etapa uvolnění k uvedení na trh

Jak již bylo zmíněno na začátku této kapitoly, aby mohl být implantát uveden na trh, musí pro něj být oznámeným subjektem vydán certifikát. Vlastní certifikaci ještě předchází klinické zkoušení (pokud není prokázána rovnocennost klinických dat z prostředí podobného). Klinická zkouška je závěrečnou validací návrhu a vývoje a patří mezi časově a finančně nejnáročnější fáze vývoje implantátu.

Certifikát je vydáván po posouzení shody dokumentace implantátu s legislativními a normativními požadavky. Dokumentace implantátu je obvykle v rozsahu několika tisíc stran textu, desítek dokumentů, obrázků, výsledků testů, dat, analýz atp. V Tab. 32.3 je přehled základní dokumentace implantátu.

Tab. 32.3 Přehled základní dokumentace implantátu.

Oblast	Dokumentace	Související testy, důkazy, dokumentace
Biocompatibilita	Plán biologického hodnocení Report biologického hodnocení	Testy cytotoxicity, senzibilizace, dráždivost, pyrogenita, systémová toxicita, genotoxicita, karcinogenita a další.
Preklinické hodnocení	Hodnocení použitelnosti Report preklinického hodnocení	Reporty ze statických a dynamických testů, Testy kompatibility, sterilizovatelnosti, životnosti, chemického složení a mechanických vlastností materiálu a další.
Risk Management	Plán řízení rizika Report řízení rizika	Analýzy rizik aplikační, designové a procesní
Značení a balení	Dokumentace štítků, obalů, návodů k použití.	Grafické znázornění etiket, kompletní návody k použití a operační postupy v jazykových mutacích cílových trhů.
Popis	Popis a specifikace	Seznam všech velikostí a modelů, Určený účel, určená populace, UDI a další nomenklатурní kódy, Princip fungování prostředku a další, Technické specifikace
Výkresy	Výkresová dokumentace	Výkresy dílů, Výkresy součástí, polotovarů atp.
Výroba	Flow-chart výroby Výrobní dokumentace Kontrolní dokumentace	Grafické znázornění výroby včetně všech vstupů. Technologické postupy, výrobní a procesní návody. Kontrolní návodky a protokoly, popisy metod testování apod.
Životnost	Životnost při skladování Životnost při použití Transport	Dlouhodobé a krátkodobé stabilitní studie. Klinická data z oblasti následného klinického sledování. Testy transportu, podmínek přepravy.
Klinické hodnocení	Plán klinického hodnocení Report klinického hodnocení Zpráva z klinické zkoušky Zpráva z klinického sledování	Klinické studie prospektivní i retrospektivní, klinické zkoušky, srovnávací studie, rešerše z klinických dat, posouzení rovnocennosti a další.
Sterilizační procesy	Validace sterilizace	Studie odolnosti vůči sterilizaci. Testy různých metod sterilizace.
Sledování po uvedení na trh	PMS ³³⁰ plán a zpráva PMCF ³³¹ plán a zpráva	Data z prodejů, stížností, reklamací, školení, legislativních změn, z auditů Klinická data z klinických pracovišť.

³³⁰ **PMS** – z angl. Post-Market Surveillance, jedná se o legislativní požadavek, aby výrobci zdravotnických prostředků měli nastavený systém sledování po uvedení na trh a pravidelně vyhodnocovali data z trhu zejména z pohledu šetření zbytkových rizik, stížností na produkt, výskytu komplikací či nežádoucích příhod.

³³¹ **PMCF** – z angl. Post-Market Clinical Follow-up, je aktivní sběr klinických dat po uvedení produktu na trh, například formou retrospektivních a prospektivních řízených klinických studií, jedná se o povinnou součást PMS u prostředků vyšších tříd rizika.

32.9 Otázky k pochopení látky

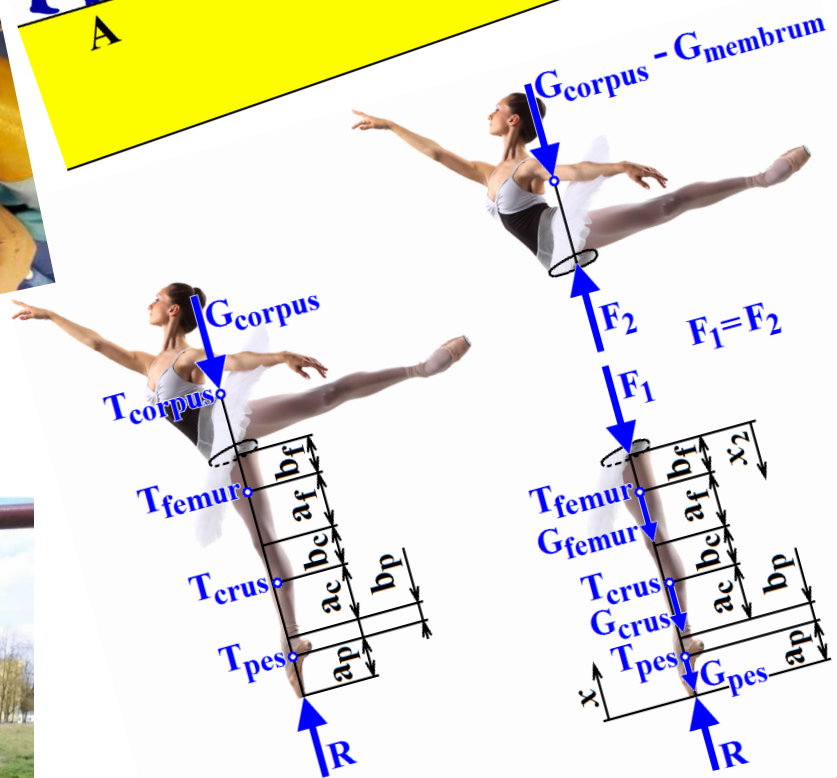
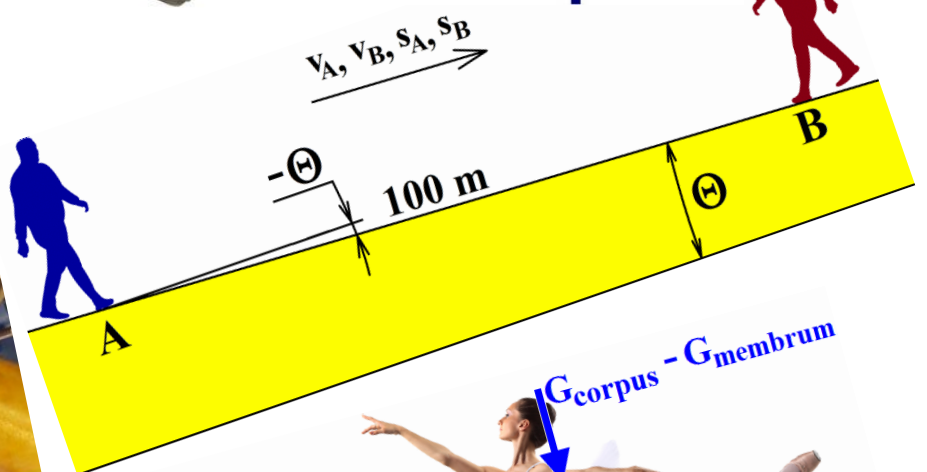
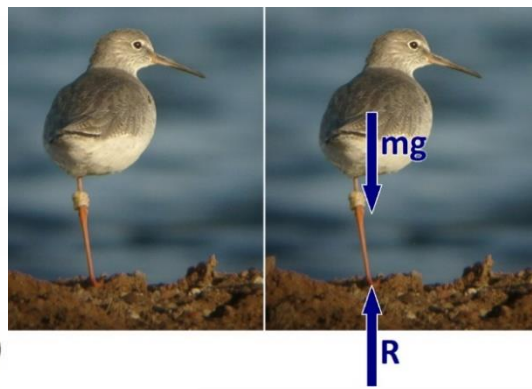
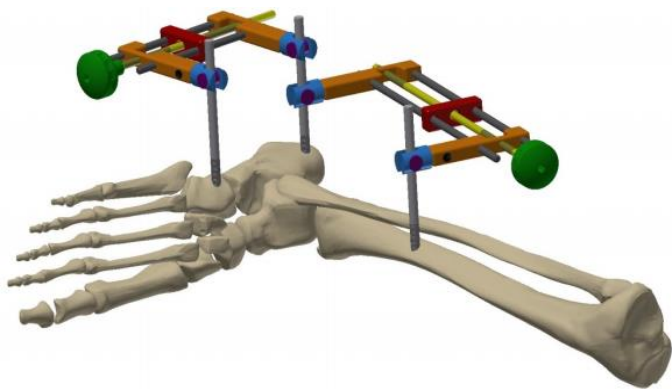
1. Co znamená zkratka úřadu FDA?
2. Co znamená zkratka MDD?
3. Co znamená zkratka MDR?
4. Vysvětlete stručně některé rozdíly mezi MDD a MDR?
5. V několika větách vysvětlete model procesu vývoje implantátu nebo jiné zdravotní pomůcky.
6. Vysvětlete třídy rizika zdravotnických prostředků dle evropské legislativy.
7. Uveďte alespoň čtyři požadavky na konstrukci implantátu.
8. Jaké znáte metody ověření návrhu?

32.10 Otázky k vlastnímu studiu, zamyšlení a odlehčení

1. Přečtěte si referenci [8], týkající se „přelomového“ páteřního implantátu, viz <https://www.denik.cz/veda-a-technika/paterni-implantat-neurorestore.html>.
2. Přečtěte si referenci [9], týkající se „přelomového“ patního hřebu C-Nail, viz <https://www.nempk.cz/novinky/svetovy-odborny-tisk-objevuje-unikatni-patni-hreb-pardubickeho-traumatologa>, a následně i s tím související vědecký článek [10], viz <https://doi.org/10.3390/app12105265>.

32.11 Reference ke kapitole 32

- [1] Poly Implants Prothèses (logo) - Poly Implant Prothèse – Wikipedia, [https://en.wikipedia.org/wiki/Poly_Implant_Proth%C3%A8se#/media/File:Poly_Implants_Proth%C3%A8ses_\(logo\).svg](https://en.wikipedia.org/wiki/Poly_Implant_Proth%C3%A8se#/media/File:Poly_Implants_Proth%C3%A8ses_(logo).svg).
- [2] Breast implants in hand 01.jpg – Wikimedia Commons, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Breast_implants_in_hand_01.jpg.
- [3] Kirsh, D., PIP breast implant scandal: A story that triggered change. *Massdevice.com* [online]. Cleveland, OH 44114: WTW Media, 2017, November 13. 2017 [cit. 2022-03-25]. Dostupné z: <https://www.massdevice.com/pip-breast-implant-scandal-story-triggered-change/>.
- [4] *REGULATION (EU) 2017/745 OF THE EUROPEAN PARLIAMENT AND OF THE COUNCIL: on medical devices, amending Directive 2001/83/EC, Regulation (EC) No 178/2002 and Regulation (EC) No 1223/2009 and repealing Council Directives 90/385/EEC and 93/42/EEC*. In: European Union: European Parliament, 2017, ročník 2017, číslo 745.
- [5] *Global Medical Device Regulation Guide* [online]. England: Medical Device Experts, 2021 [cit. 2022-03-25]. Dostupné z: <https://www.mdr.guide/mdr>.
- [6] ISO 13485:2016-ED.3.0. *Medical devices: Quality management systems — Requirements for regulatory purposes*. Ed.3.0. EU: ISO, 2016.
- [7] 3d-tisk-1.jpg. *Prospon* [online]. Czech republic: Prospon.cz, 2016 [cit. 2022-03-30]. Dostupné z: <http://www.prospon.cz/images/3d-tisk-1.jpg>.
- [8] Byl na vozíku, nyní může opět chodit. Muži pomohl přelomový páteřní implantát - *Deník.cz* (denik.cz) <https://www.denik.cz/veda-a-technika/paterni-implantat-neurorestore.html>.
- [9] Světový odborný tisk objevuje unikátní patní hřeb pardubického traumatologa, Nemocnice Pardubického kraje, 2016 [cit. 2022-03-30]. Dostupné z <https://www.nempk.cz/novinky/svetovy-odborny-tisk-objevuje-unikatni-patni-hreb-pardubickeho-traumatologa>.
- [10] Sejda, F., Frydryšek, K., Pleva, L., Pompach, M., Hlinka, J., Sadílek, M., Murčínková, Z., Krpec, P., Havlíček, M., Madeja, R., Pometlová, J., Učeň, O., & Dostálová, K. (2022). Numerical Analysis of the Calcaneal Nail C-NAIL. *Applied Sciences*, 2022, 12(10), 5265. [cit. 2023-03-30] Dostupné z <https://doi.org/10.3390/app12105265>.
- [11] Implantologie – Wikipedie (wikipedia.org), <https://cs.wikipedia.org/wiki/Implantologie>.



ISBN 978-80-7599-232-1

